AM1 gest 20/21 Lezione 32

11/11/2020

Parentesi teorica

Insiemi di numeri

$\mathbb{N} := \{\text{numeri naturali}\} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z} := \{\text{numeri interi}\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$\mathbb{Q} := \{\text{numeri razionali}\} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$

$\mathbb{R} := \{\text{numeri reali}\}$.

I numeri reali sono quelli con un segno, un numero finito di cifre davanti alla virgola, un numero finito o infinito di cifre dopo la virgola:

$$\pi = 3,141592 \dots$$

$$-\frac{4}{3} = -1,3333 \dots$$

Osservazioni

- I numeri naturali sono stati introdotti per contare (tranne lo zero).

- I numeri reali e razionali <u>positivi</u> sono stati introdotti per misurare (per esempio una lunghezza rispetto a una data unità di misura data).

- I numeri razionali non bastano per le misure: la diagonale del quadrato di lato 1 è $\sqrt{2}$ che non è razionale.

  Infatti se per assurdo $\sqrt{2}$ fosse razionale, lo scrivo come $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con p, q interi non entrambi pari. Allora

  $$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ è pari}$$

  $$\Rightarrow p \text{ è pari}, \ p = 2m \Rightarrow 2q^2 = p^2 = (2m)^2 = 4m^2$$

  $$\Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2 \text{ è pari} \Rightarrow q \text{ pari}$$

  Assurdo perché p e q non sono entrambi pari.

- I numeri con segno sono stati originariamente introdotti (almeno in Europa) per ragioni di contabilità ([entrate] − [uscite] può essere sia positivo che negativo).

- Attenzione: 1 e 0,9999.... sono due modi di scrivere lo stesso numero.

  Infatti: $0{,}9999\ldots = 3 \cdot 0{,}3333\ldots = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$.

  E anche: $-27{,}152 = -27{,}1519999\ldots$

- Gli algoritmi per le operazioni elementari $(+,-,\times,:)$ visti a scuola funzionano solo per numeri con un numero finito di cifre decimali. La definizione di queste operazioni per i numeri reali si fa per approssimazione.

- I numeri con un espansione decimale finita (un numero finito di cifre dopo la virgola) sono quelli della forma $x = \frac{p}{10^k}$.

- I numeri con espansione decimale periodica, per esempio

$$-37{,}14\underbrace{63}6363\ldots$$

Sono esattamente i numeri razionali.

Razionale $\Longrightarrow$ periodico

Esempio: ottengo le cifre di $x = \frac{140}{11}$ facendo la divisione

$$
\begin{array}{l|l}
140 & 11 \\ \cline{2-2}
11 & 12{,}72 \leftarrow \text{da qui in poi i numeri si ripetono.} \\ \cline{1-1}
\;\;30 & \\
\;\;22 & \\ \cline{1-1}
\;\;\;\;80 & \\
\;\;\;\;77 & \\ \cline{1-1}
\;\;\;\;\;30 & \\
\;\;\;\;\;\ldots &
\end{array}
$$

Periodico $\Rightarrow$ razionale

Per esempio:

$$x = 31{,}2474747\ldots$$
$$= 31{,}2 + 0{,}0474747\ldots$$
$$= \frac{312}{10} + \frac{1}{10}\cdot 0{,}474747\ldots$$
$$= \frac{312}{10} + \frac{1}{10}\cdot 47\cdot 0{,}010101\ldots$$
$$= \frac{312}{10} + \frac{47}{10}\cdot\frac{1}{99} \quad \leftarrow \text{razionale}$$

ho usato che $0,[01][01][01]\ldots = \frac{1}{99}$

Più in generale $0,[001][001]\ldots = \frac{1}{999}$ e

$$0,[\underbrace{00\cdots01}_{n \text{ cifre}}][\quad][\quad]\ldots = \frac{1}{\underbrace{99\cdots9}_{k \text{ cifre}}}.$$

Definizione di estremo superiore e inferiore

di un insieme che non si scrive come unione finita di intervalli.

Dato $X \subset \mathbb{R}$, $y \in [-\infty, +\infty]$ si dice maggiorante di X se

$$y \geq x \ \forall\, x \in X;$$

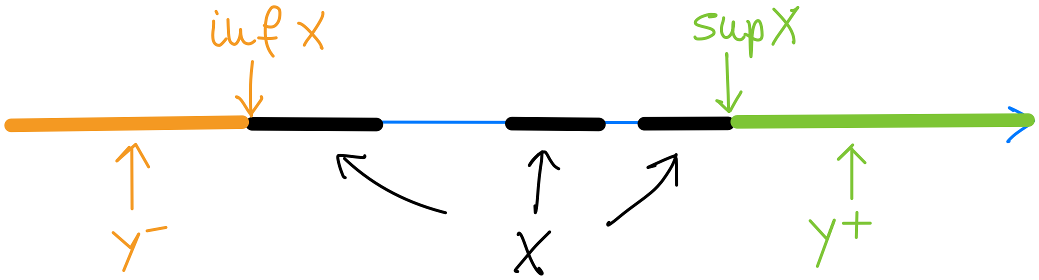
e si dice minorante se invece

$$y \leq x \ \forall\, x \in X.$$

Pongo

$$Y^+ := \{ \text{maggioranti di } X \}$$

$$Y^- := \{ \text{minoranti di } X \}$$

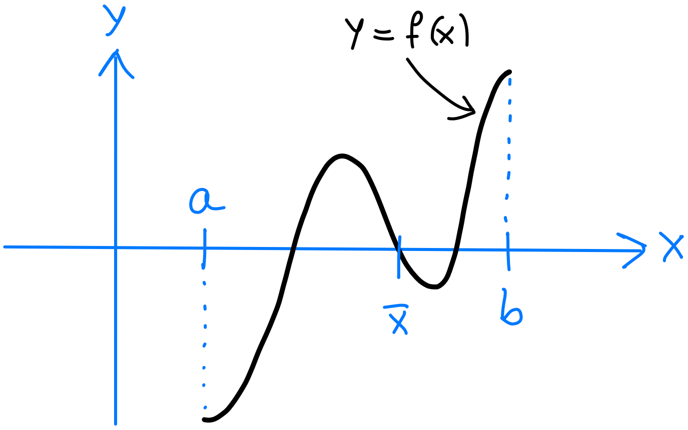


Definisco **estremo superiore** di X è il più piccolo dei maggioranti di X cioè il minimo di Y^+ e l' **estremo inferiore** di X è il più grande dei minoranti di X cioè il massimo di Y^-.

> Fatto fondamentale (completezza dei numeri reali)
> $\sup X$ e $\inf X$ esistono per ogni insieme $X \subset \mathbb{R}$.

Conseguenza della completezza dei numeri reali:

<u>Teorema</u> (di esistenza degli zeri)
Sia $I = [a,b]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ continua e tale che i valori di f agli estremi di I sono discordi (cioè $f(a) < 0 < f(b)$ oppure $f(b) < 0 < f(a)$). Allora esiste $\bar{x} \in (a,b)$ t.c. $f(\bar{x}) = 0$.



Osservazioni

- Se usassi solo i numeri razionali l'enunciato non sarebbe vero: sia $f(x) := x^2 - 2$, allora $f(0) = -2$, $f(2) = 2$ ma non esiste alcun $x \in \mathbb{Q}$ t.c. $f(x) = 0$ (perché $\pm\sqrt{2}$ non sono razionali).

- L'ipotesi f continua non può essere tolta se $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ è data da

$$f(x) := \begin{cases} +1 & \text{per } x \in [0,1] \\ 0 & \\ -1 & \text{per } x \in [-1,0) \end{cases}$$

allora $f(-1) < 0 < f(1)$ ma non esiste x t.c. $f(x) = 0$.

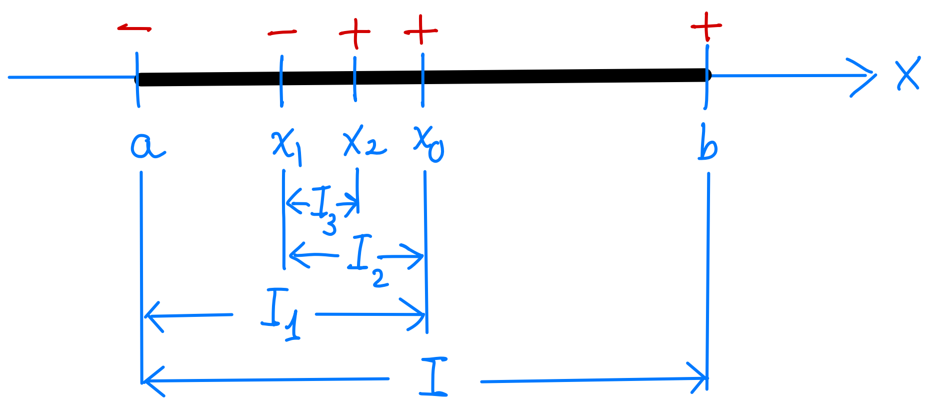
- L'ipotesi che il dominio I sia un intervallo non può essere tolta: se $f(x) := \frac{1}{x}$, allora $f(-1) < 0 < f(1)$ ma non esiste x t.c. $f(x) = 0$. (f è definita e continua su $[-1,0) \cup (0,1]$ ma non $[-1,1]$).

Riprendo dalla lezione precedente.

<u>Teorema</u> (di esistenza degli zeri)
Sia $I = [a,b]$ e $f: I \to \mathbb{R}$ continua e tale che i valori di f agli estremi di I sono discordi (cioè $f(a) < 0 < f(b)$ oppure $f(b) < 0 < f(a)$).
Allora esiste almeno un $\bar{x} \in (a,b)$ t.c. $f(\bar{x}) = 0$.

Prima di dimostrare il teorema descrivo un algoritmo per calcolare uno degli $\bar{x}$ t.c. $f(\bar{x}) = 0$.

<u>Algoritmo di bisezione</u>
Suppongo $f(a) < 0 < f(b)$



Costruisco una successione di intervalli $I \supset I_1 \supset I_2 \cdots \supset I_n$ tali che f ha valori discordi agli estremi.

Indico con x_n il punto medio di I_n e $\ell_n := \text{lungh.}(I_n)$.
Per il teorema esiste $\bar{x}$ dentro I_n t.c. $f(\bar{x})=0$.
Osservo che x_n approssima $\bar{x}$ con errore inferiore a $\frac{\ell_n}{2}$ cioè

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\ell_n}{2}$$

So che $\ell_n = \frac{\text{lungh}(I)}{2^n} = \frac{b-a}{2^n}$.

Quindi

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

in particolare l'errore $\frac{b-a}{2^{n+1}}$ tende a 0 esponenzialm.

In particolare se $\text{lungh}(I) = b-a = 1$ allora
x_9 approssima $\bar{x}$ con errore $\leq \frac{1}{2^{10}} \leq 10^{-3}$.
x_{19} " " " $\leq \frac{1}{2^{20}} \leq 10^{-6}$
etc.

Dimostrazione del teorema (traccia)

Costruisco I_n con l'algoritmo di bisezione per ogni $n = 1, 2, \ldots$
Indico con a_n e b_n gli estremi dell'intervallo, cioè $I_n = [a_n, b_n]$.
Siccome $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ ho che $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \ldots$ e $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \ldots$

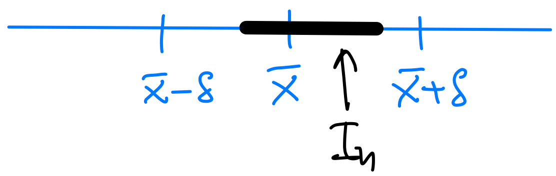
Inoltre $b_n - a_n = \text{lungh}(I_n) = \frac{b-a}{2^n}$.

Quindi $\sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$.

Chiamo questo punto $\bar{x}$.

Usando la continuità di f in $\bar{x}$ ottengo che $f(\bar{x})=0$.

Infatti se per assurdo $f(\bar{x})>0$ (oppure $f(\bar{x})<0$)
allora trovo $\delta>0$ t.c. $f(x)>0$ su $[\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$
Ma per n abbastanza grande, $I_n \subset [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$

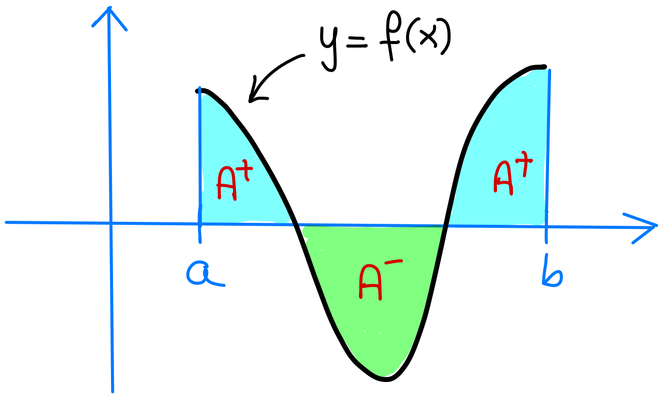


Ma allora f non ha valori discordi agli estremi di I_n, e questo è assurdo. □

Integrali

Definizione di integrale (definito)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua



Pongo

$$A^+ := \{ (x,y) : x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq f(x) \}$$

$$A^- := \{ (x,y) : x \in [a,b],\ f(x) \leq y \leq 0 \}$$

L' integrale di f da a a b è il numero dato da

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx} := \text{area}(A^+) - \text{area}(A^-)$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ si legge "integrale da a a b di f(x) in dx"

terminologia: f è la funzione integranda ; a e b sono gli estremi di integrazione.

Osservazioni

- Se $f \geq 0$, $\text{area}(A^-) = 0$ e quindi $\int_a^b f(x)\,dx =$
  $= \text{area}(A^+) \geq 0$;
  se $f \leq 0$ allora $\text{area}(A^+) = 0$ e $\int_a^b f(x)\,dx =$
  $= -\text{area}(A^-) \leq 0$.

- Torna comodo definire

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx = \text{area}(A^-) - \text{area}(A^+)$$

- Il valore di $\int_a^b f(x)\,dx$ dipende a f e da a e b, ma non dipende dalla variabile x.
  In altre parole

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt \quad .$$

- "dx" serve a indicare la "fine" dell'integrale e a ricordare qual'è la variabile di integrazione. Per esempio: $\int_0^1 x^2 y\,dx$ dipende da y e non da x, e x è la variabile di integrazione, mentre $\int_0^1 x^2 y\,dy$ dipende da x e non da y; y è la variabile di integraz.

- La definizione sopra usa la nozione intuitiva di area di un insieme nel piano.
  Ma tale nozione non è ben definita (e non è definibile).
  Per questa ragione i testi di Analisi contengono una definizione diversa di integrale, che non usa la nozione di area.

Questioni da affrontare

- Calcolo esatto degli integrali;
- calcolo approssimato degli integrali (che non si calcolano esattamente);
- altri significati dell'integrale.

Calcolo esatto degli integrali

Definizione

Date $f, F : \underset{\text{intervallo}}{I} \to \mathbb{R}$ continue, dico che F è una primitiva di f se $F' = f$.

Es. $\frac{x^3}{3}$ è una primitiva di x^2, ma anche $\frac{x^3}{3} + c$ con c costante è una primitiva di x^2.

In generale, se F è una primitiva di f allora $F + c$ con c costante è pure una primitiva.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Siano $F, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue con F primitiva di f. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Osservazioni

- Questo teorema riduce il calcolo degli integrali (aree) al trovare la primitiva dell'integranda.
- Nei calcoli conviene scrivere $F(b) - F(a)$ come $\left| F(x) \right|_a^b$ (oppure $F(x)\Big|_a^b$).

Esempi

- $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \Big| \text{primitiva di } x^2 \Big|_0^1 = \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$

- $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx = \left| \text{primitiva di } \frac{1}{x} \right|_1^3 = \left| \log x \right|_1^3 = \log 3 - \log 1 = \log 3.$

- $\int_0^2 e^x\,dx = \left| \text{primitiva di } e^x \right|_0^2 = \left| e^x \right|_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1.$

Le tecniche per trovare la primitiva le vediamo nelle prossime lezioni.

Attenzione: le primitive di alcune funzioni (per es. e^{x^2}, e^{-x^2}) non hanno una formula.

Per la dimostrazione del teorema servono tre lemmi.

<u>Lemma 1</u>

intervallo

Data $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile con $h' = 0$, allora h è costante.

<u>Lemma 2</u>

intervallo

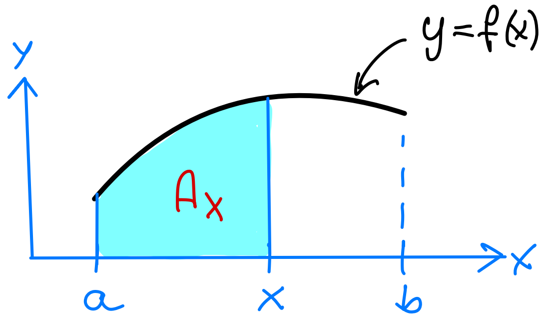
Date $f, F, G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ con F e G primitive di f, allora esiste c costante t.c. $G = F + c$.

<u>Lemma 3</u>

Data $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, definisco $G : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ come

$$G(x) := \int_a^x f(t)\,dt = \text{area}(A_x)$$

Allora G è una primitiva di f.



Dim. del teorema

Prendo G come nel lemma 3.

Per il lemma 2, esiste c costante t.c. $G=F+c$.

Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{definizione}\\ \text{di } G(b)}}{=} G(b) \underset{\substack{\uparrow\\ G(a)=\int_a^a f(t)dt=0\\ \text{(area di un segmento)}}}{=} G(b)-G(a)$$

$$= (F(b)+c)-(F(a)+c)$$

$$= F(b)-F(a).$$

$\square$

Dim. lemma 1

Dati $x_0, x_1 \in I$ devo dimostrare che $h(x_1)=h(x_0)$.

Per il teorema di Lagrange esiste $\tilde{x} \in (x_0,x_1)$ t.c.

$$\frac{h(x_1)-h(x_0)}{x_1-x_0} = h'(\tilde{x}) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{per ipotesi}}}{=} 0$$

Quindi $h(x_1)-h(x_0)=0$.

$\square$

Dim. lemma 2

Pongo $h=G-F$. Allora $h'=G'-F'=f-f=0$.

Per il lemma 1, $h=c$ costante. Quindi

$G=F+h=F+c$.

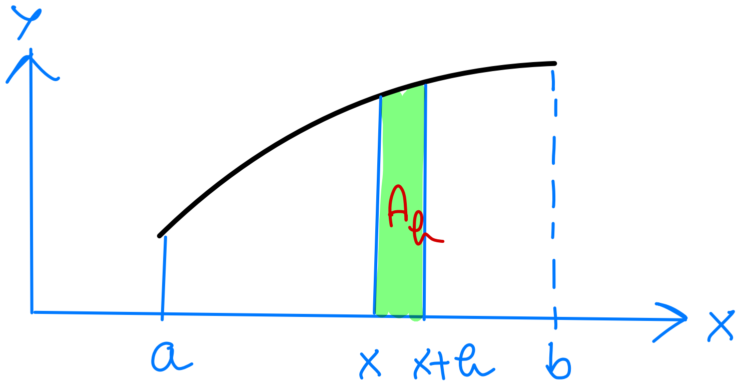
$\square$

Dim. Lemma 3

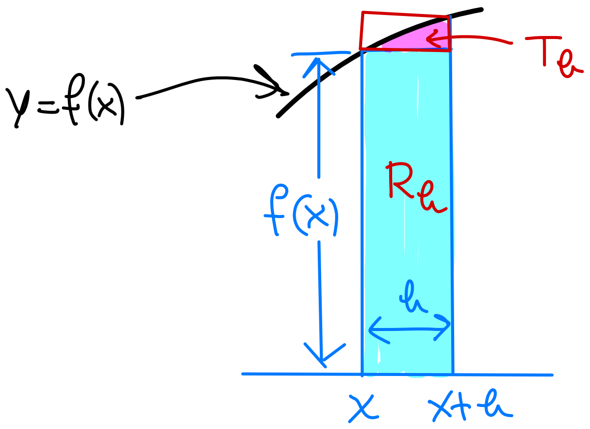
Suppongo f positiva e crescente.

Devo dimostrare che $G' = f$, cioè che

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(x).$$



Osservo che $G(x+h)-G(x) = \text{area}(A_h) = \underbrace{\text{area}(R_h)}_{= h\cdot f(x)} + \text{area}(T_h)$



Quindi
$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \frac{\text{area}(R_h)}{h} + \frac{\text{area}(T_h)}{h}$$
$$= f(x) + \frac{\text{area}(T_h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$$

Inoltre $0 \le \text{area}(T_h) \le h\cdot\left(f(x+h)-f(x)\right)$

Quindi
$$0 \le \frac{\text{area}(T_h)}{h} \le f(x+h)-f(x) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$\square$

AM1 gest 20/21 — lezione 35 — 14/11/2020

Riprendo il discorso sul calcolo (esatto) degli integrali.

Formula di cambio di variabile

a) $$\int \boxed{f(g(x))} \cdot \boxed{g'(x)\,dx} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sost. } y=g(x)\\ dy = g'(x)\,dx}}{=} \int \boxed{f(y)}\,\boxed{dy} \underset{\substack{\uparrow\\ F \text{ primitiva}\\ \text{di } f}}{=} F(y)+c \underset{\substack{\uparrow\\ \text{sostituisco}\\ y \text{ con } g(x)}}{=} F(g(x))+c$$

b) $$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy\,.$$

Dim.

a) La tesi è che $F(g(x))$ è una primitiva di $f(g(x))\cdot g'(x)$. Lo verifico derivando $F(g(x))$:

$$\Big(F(\underbrace{g(x)}_{y})\Big)' \underset{\substack{\uparrow\\ \text{derivata della}\\ \text{funz. composta}}}{=} F'(y)\cdot g'(x) \underset{\substack{\uparrow\\ F'=f\\ \text{perché } F \text{ è}\\ \text{una prim. di } f}}{=} f(y)\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x)\,.$$

b) Uso a) e il teorema fondam. del calcolo integr.:

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \Big| F(g(x)) \Big|_a^b = \Big| F(y) \Big|_{g(a)}^{g(b)}.$$

$$\Big| F(g(x)) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \Big| F(y) \Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

$\square$

Caso particolare

a) $$\int f(mx+p)\,dx \underset{\uparrow}{=} \int f(y)\frac{1}{m}\,dy = \frac{1}{m}F(y)+c = \frac{1}{m}F(mx+p)+c$$

$y = mx+p$

$dy = (mx+p)'\,dx = m\cdot dx$

$dx = \frac{1}{m}\,dy$

b) $$\int_a^b f(mx+p)\,dx \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{m}\int_{ma+p}^{mb+p} f(y)\,dy\,.$$

Esempi

- $$\int e^{2x+1}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int e^y\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int e^y\,dy = \frac{1}{2}\,e^y+c$$

  $y = 2x+1$

  $dy = 2\,dx;\ dx = \frac{1}{2}\,dy$

  $$= \frac{1}{2}e^{2x+1}+c\,.$$

- $$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\left(\pi-\frac{x}{2}\right)dx \underset{\uparrow}{=} \int_{\pi}^{\pi/2} \operatorname{sen} y\,(-2)\,dy = 2\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} y\,dy$$

  $y = \pi-\frac{x}{2}$

  $dy = -\frac{1}{2}\,dx;\quad dx = -2\,dy$

  $$= 2\Big|-\cos y\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

  $$= 2(1-0) = 2$$

- $$\int e^{x^2}x\,dx \underset{\uparrow}{=} \int e^y\,\frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}\int e^y\,dy = \frac{1}{2}\,e^y+c$$

  $y = x^2$

  $dy = 2x\,dx$

  $\frac{1}{2}dy = x\,dx$

  $$= \frac{1}{2}e^{x^2}+c$$

- $\int \cos(x^2)\cdot x^3\, dx \underset{\substack{y=x^2 \\ dy = 2x\,dx;\ \frac{1}{2x}dy = dx}}{=} \int \cos y \cdot \frac{\cancel{x^3}^{2}}{2\cancel{x}}\, dy = \int \cos y \cdot \frac{y}{2}\, dy$

da qui procedete integrando per parti...

- $\int_{-2}^{2} \cos(x^2)\cdot x^3\, dx = \int_4^4 \cos y \cdot \frac{y}{2}\, dy = 0$

perché gli estremi di integraz. sono uguali!

- $\int \tan x\, dx = \int \frac{\boxed{\sin x \, dx}}{\boxed{\cos x}} \underset{y=\cos x}{=} \int \frac{1}{\boxed{y}} \boxed{(-1)\cdot dy}$

$y = \cos x$

$dy = -\sin x \cdot dx \qquad -dy = \sin x \cdot dx$

$= -\int \frac{1}{y}\, dy$

$= -\log|y| + c = -\log|\cos x| + c$

Cosa succede con il cambio di var. $y = \sin x$?

$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx \underset{y=\sin x}{=} \int \frac{y}{\cos x} \frac{1}{\cos x} \cdot dy$

$y = \sin x$

$dy = \cos x\, dx;\ dx = \frac{1}{\cos x}\, dy$

$= \int \frac{y}{\cos^2 x}\, dy = \int \frac{y}{1-y^2}\, dy \ \dots$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - y^2$

- $\displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx \underset{\substack{y=\sqrt{x}\\ dy=\frac{dx}{2\sqrt{x}}}}{=} \int_0^2 \underbrace{e^y}_{f}\,\underbrace{2y}_{g}\,dy \underset{\text{per parti}}{=} \Big|\underbrace{e^y}_{F}\,\underbrace{2y}_{g}\Big|_0^2 - \int_0^2 \underbrace{e^y}_{F}\,\underbrace{2}_{g'}\,dy$

$dx = 2\sqrt{x}\,dy = 2y\,dy$

$$= 4e^2 - 2\,\big|e^y\big|_0^2$$
$$= 4e^2 - 2(e^2-1)$$
$$= 2e^2 + 2.$$

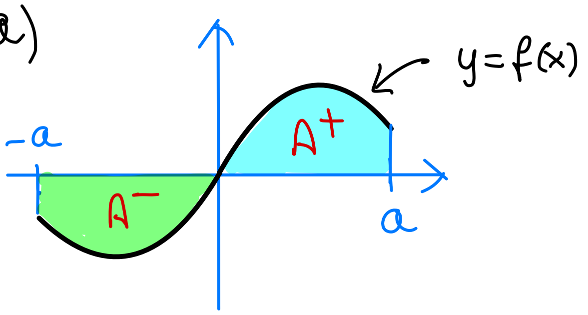
Fatto utile

a) Se f è dispari $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$;

b) se f è pari $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

Dim. a disegni

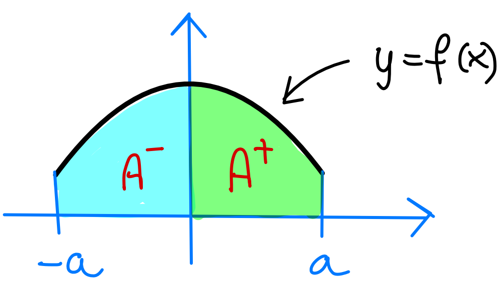
a)



$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \text{area}(A^+) - \text{area}(A^-) = 0$$

sono uguali per simmetria

b)



$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \text{area}(A^+) + \text{area}(A^-)$$
$$= 2\,\text{area}(A^+) = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Dim. "vera"

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)\,dx}_{} + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$x = -y$
$dx = -dy$

$$= \int_{a}^{0} f(-y)(-1)\,dy$$

$$= \int_{0}^{a} f(-y)\,dy = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx$$

Quindi

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)+f(-x)\,dx$$

Se f è dispari, $f(-x) = -f(x)$ e $f(x)+f(-x) = 0$
e ottengo

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} 0 \cdot dx = 0 .$$

Se f è pari $f(-x) = f(x)$, $f(x)+f(-x) = 2f(x)$ e

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx .$$

$\square$

Esempi problematici

- $$\int_0^3 e^{x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_0^9 e^y \frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

  $y = x^2$
  $dy = 2x\,dx$
  $dx = \frac{dy}{2x} = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

  È ora? La situazione non è migliorata! La primitiva di e^{x^2} non si esprime in termini di funz. elem.

- $$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big|\arctan x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Rifaccio lo stesso calcolo con un cambio di var.:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+(1/y)^2}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot dy = -\int_{-1}^1 \frac{1}{y^2+1}\,dy$$
$$= -\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$x = \frac{1}{y}$; $y = \frac{1}{x}$
$dx = -\frac{1}{y^2}dy$

Quindi $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ cioè $\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

Dov'è l'errore?

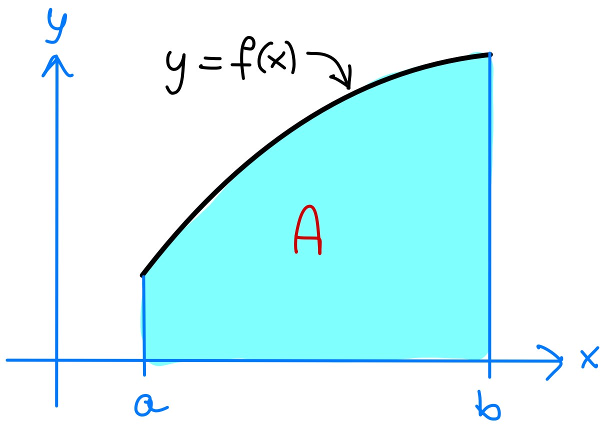
- $$\int_{-2}^2 e^{x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_4^4 e^y \frac{1}{2\sqrt{y}}\,dy = 0.$$

  $y = x^2$,
  $dy = 2x\,dx$; $dx = \frac{dy}{2x} = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

Assurdo perché $e^{x^2} > 0$ e quindi $\int_{-2}^2 e^{x^2}\,dx > 0$.

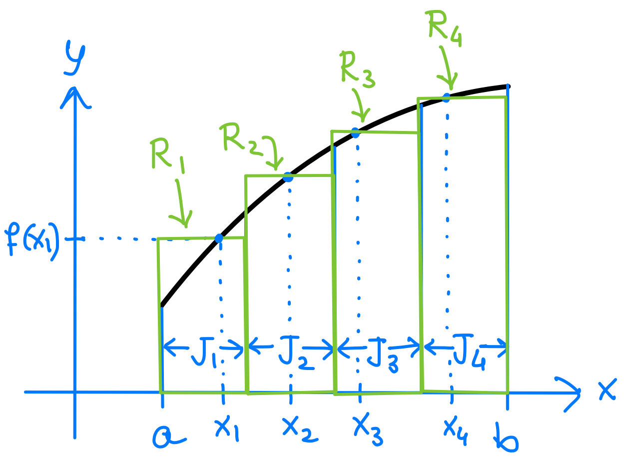
Dov'è l'errore?

Approssimazione dell'integrale



Se $f \geq 0$, $\quad I := \int_a^b f(x)\,dx = \text{area}(A)$

Per calcolare in modo approssimato I, approssimo A con dei rettangoli.



Fisso N grande e divido $[a,b]$ in intervalli $J_1, \dots, J_N$ lunghezza $\delta = \frac{b-a}{N}$

Scelgo $x_1 \in J_1$, $x_2 \in J_2$, $\dots$, $x_N \in J_N$.

Prendo R_1 rettangolo con base J_1 e altezza $f(x_1)$; R_2 rett. con base J_2 e altezza $f(x_2)$; etc.

La somma I_δ delle aree dei rettangoli R_n dovrebbe approssimare l'area di A.

$$I_\delta := \sum_{n=1}^{N} \text{area}(R_n) = \boxed{\sum_{n=1}^{N} f(x_n)\cdot\delta}$$

"somma di Riemann"

altezza

lunghezza di J_n

Teorema 1

Se f è continua, $\lim_{\delta\to 0} I_\delta = I = \int_a^b f(x)dx$.

(Vale anche se f non è positiva.)
Questo risultato non lo dimostro.
Dimostro invece delle stime dell'errore

$$err_\delta := |I - I_\delta|$$

Proposizione 2

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua e derivabile e $m>0$ è t.c. $|f'(x)|\le m \ \forall x\in[a,b]$.
Allora

$$err_\delta \le m(b-a)\,\delta$$

Se $m=1$, $b-a=1$, $\delta=10^{-3} \Rightarrow err_\delta \le 10^{-3}$.

Proposizione 3

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte, e sia $M > 0$ t.c. $|f''(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$.

Prendo x_n punto medio di J_n per ogni n.

Allora

$$err_\delta \leq \frac{M}{24}(b-a)\,\delta^2$$

In particolare se $M=1$, $b-a=1$ e $\delta = 10^{-3}$ allora $err_\delta \leq \frac{\delta^2}{24} \leq 10^{-7}$.

(Questa stima è migliore della precedente)

Dim

$$I - I_\delta = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{n=1}^{N} f(x_n)\,\delta$$

scrivo $[a,b]$ come unione degli intervalli $J_1, \dots, J_N$ →

$$= \sum_{n=1}^{N} \int_{J_n} f(x)\,dx - \sum_{n=1}^{N} f(x_n)\,\delta$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \left(\int_{J_n} f(x)\,dx - f(x_n)\cdot\delta \right)$$

Allora

$$(1) \quad err_\delta := |I - I_\delta| \leq \sum_{n=1}^{N} \left| \int_{J_n} f(x)\,dx - f(x_n)\cdot\delta \right|$$

Esamino ora $\int_{J_u} f(x)\,dx$.

Siccome x_u è il punto medio di J_u, e J_u è lungo δ, allora $J_u = \left[x_u - \frac{\delta}{2}, x_u + \frac{\delta}{2}\right]$ e quindi

$$\int_{J_u} f(x)\,dx = \int_{x_u-\frac{\delta}{2}}^{x_u+\frac{\delta}{2}} f(x)\,dx$$

$x = x_u + t$
$dx = dt$

$$\longrightarrow = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} f(x_u+t)\,dt$$

Sviluppo di T. di ord. 1 di f in x_u:
$f(x_u+t) = f(x_u) + f'(x_u)t + R_u(t)$

$$= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} f(x_u) + f'(x_u)t + R_u(t)\,dt$$

$$= \left| f(x_u)\cdot t \right|_{-\delta/2}^{\delta/2} + \left| f'(x_u)\frac{t^2}{2} \right|_{-\delta/2}^{\delta/2} + \int_{-\delta/2}^{\delta/2} R_u(t)\,dt$$

$$= f(x_u)\cdot\delta + \int_{-\delta/2}^{\delta/2} R_u(t)\,dt$$

Ma allora

$$(2) \qquad \left| \int_{J_u} f(x)\,dx - f(x_u)\,\delta \right| = \left| \int_{-\delta/2}^{\delta/2} R_u(t)\,dt \right|$$

Uso ora la formula del resto di Lagrange:

$$R_u(t) = \frac{f''(\tilde{t})}{2}\,t^2 \qquad \text{con } \tilde{t} \in [0,t]$$

Quindi

$$-\frac{M}{2}t^2 \leq R_k(t) \leq \frac{M}{2}t^2$$

Quindi

$$\underbrace{-\int_{-\delta/2}^{\delta/2} \frac{M}{2}t^2\,dt}_{= -\frac{M}{24}\delta^3} \leq \int_{-\delta/2}^{\delta/2} R_k(t)\,dt \leq \underbrace{\int_{-\delta/2}^{\delta/2} \frac{M}{2}t^2\,dt}_{= \frac{M}{24}\delta^3}$$

Quindi

$$\left| \int_{-\delta/2}^{\delta/2} R_k(t)\,dt \right| \leq \frac{M}{24}\delta^3$$

Quindi (2) diventa

$$\left| \int_{J_k} f(x)\,dx - f(x_k)\,\delta \right| = \left| \int_{-\delta/2}^{\delta/2} R_k(t)\,dt \right| \leq \frac{M}{24}\delta^3$$

e usando la (1)

$$err_\delta := |I - I_\delta| \leq \sum_{k=1}^{N} \left| \int_{J_k} f(x)\,dx - f(x_k)\cdot\delta \right|$$

$$\leq N \cdot \frac{M}{24}\delta^3 \underset{\delta = \frac{b-a}{N}}{=} \frac{M}{24}(b-a)\,\delta^2.$$

$\square$

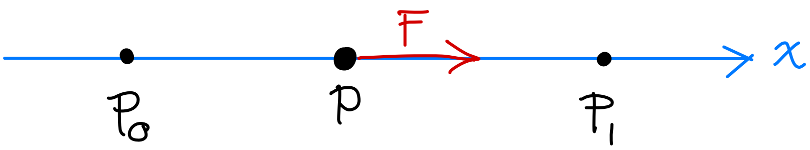
AM1 gest 20/21 — lezione 36

17/11/2020

Altri significati dell'integrale

Lavoro di una forza

P punto che si muove sull'asse delle x dalla posizione P_0 a P_1, soggetto ad una forza F diretta come l'asse x



Se F è costante, il lavoro di F su P è definito come

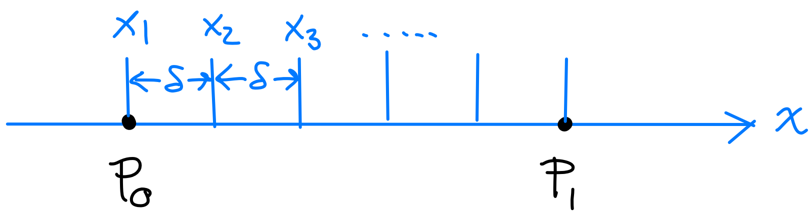
(1) $$L := F \cdot \Delta x = F \cdot (P_1 - P_0)$$

Se F non è costante e dipende dalla posizione di P allora

(2) $$L := \int_{P_0}^{P_1} F(x)\, dx$$

Come si ottiene (2) da (1) ?

Per F non costante calcolo il lavoro L a partire da (1) suddividendo l'intervallo $[P_0, P_1]$ in intervallini di lunghezza δ piccolo, dove in prima approx. F è costante



Quindi $\quad L = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} L_n}_{\substack{\text{lavoro di } F \\ \text{sull' intervallo} \\ [x_u,\, x_{u+1}]}} \simeq \sum_{u=1}^{N} F(x_u)\cdot \delta$.

Quindi $\quad L = \lim_{\delta\to 0} \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{N} F(x_u)\cdot\delta\right]}_{\text{somma di Riemann che approssima l' integrale}} = \int_{P_0}^{P_1} F(x)\,dx$

Spazio percorso da un punto in movimento

P punto in movimento nel piano (o nello spazio)

Quindi $\quad P = (x(t), y(t)) \quad \big(P = (x(t), y(t), z(t)) \big)$

velocità (vettore)	$\vec{v} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$	già viste
velocità (scalare)	$\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}$	
accelerazione	$\vec{a} = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$	

La distanza percorsa da P tra l'istante t_0 e t_1 è

$$d = \int_{t_0}^{t_1} \lvert\vec{v}(t)\rvert\, dt$$

Giustificazione

Indica con $d(t)$ la distanza percorsa dall'istante t_0 a t. Abbiamo visto (nelle lezioni sulla derivata) che $|\vec{v}(t)| = d'(t)$.

Quindi $d(t)$ è una primitiva di $|\vec{v}(t)|$.

Ma allora

$$\int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}(t)|\,dt \underset{\uparrow}{=} \Big| d(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = \underbrace{d(t_1)}_{= d} - \underbrace{d(t_0)}_{= 0} = d$$

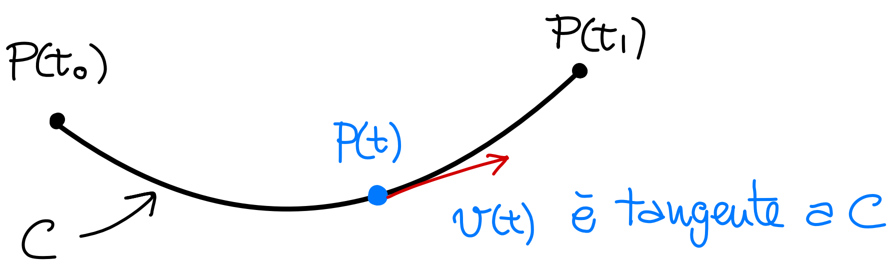
Teor. fond. del calcolo int.

Lunghezza delle curve (nel piano o nello spazio)

Dato P come sopra, chiamo "traiettoria di P" l'insieme delle posizioni di P (con t in un dato intervallo di tempo) cioè

$$\mathcal{C} = \{ P(t) : t_0 \leq t \leq t_1 \}$$

In generale $\mathcal{C}$ è una curva.



Se P passa per ogni punto di C solo una volta allora

$$(*) \qquad \text{lunghezza}(C) = d = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}(t)|\, dt$$

(In effetti basta che i punti di C per cui P passa più di una volta siano in numero finito)

Data una curva C, trovare una parametrizzazione vuol dire scrivere C come traiettoria di un punto in movimento, cioè

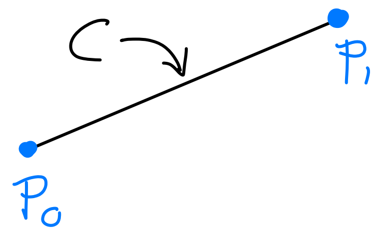
$$C = \{ P(t) : t \in \underbrace{I}_{\text{intervallo}} \}$$

Data una parametrizzazione $P(t)$, posso calcolare la lunghezza di C usando $(*)$.

Esempi di parametrizzazione

1. Sia C il segmento che congiunge due punti P_0 e P_1

$P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$



Allora $C = \{ \underbrace{(1-t)P_0 + t P_1}_{P(t)} : 0 \leq t \leq 1 \}$

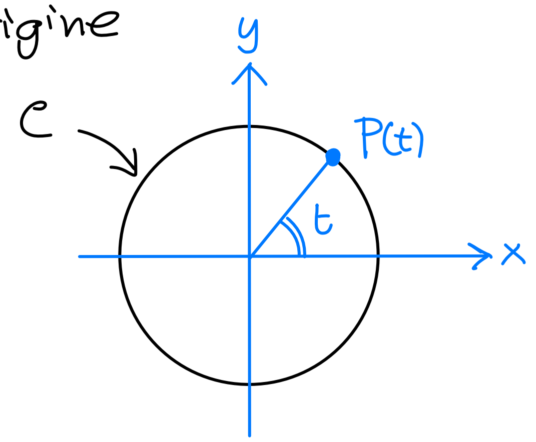
Cioè $P(t) = \big(\underbrace{(1-t)x_0 + t x_1}_{x(t)} \,;\, \underbrace{(1-t)y_0 + t y_1}_{y(t)} \big)$.

Allora $\vec{v} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = P_1 - P_0$

Parametrizzazione a velocità costante: $\vec{v}$ non dipende da t

Esistono anche parametrizzazioni a velocità NON costante, per esempio $P(t) = (1-t^2)P_0 + t^2 P_1$ con $0 \leq t \leq 1$.

2. Sia C la circonferenza di raggio r centrata nell'origine



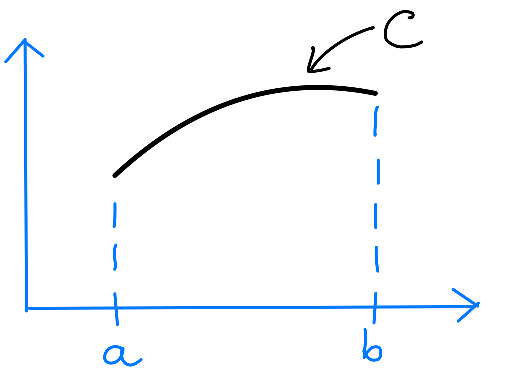
$P(t)$ punto di coordinate polari r (costante) e $t \in [0, 2\pi]$, cioè

$$P(t) = (r\cos t, r\sin t)$$

In questo caso $\vec{v}(t) = (-r\sin t, r\cos t)$

$|\vec{v}(t)| = r$, $\vec{a}(t) = (-r\cos t, -r\sin t)$

3. Se C è il grafico di $f(x)$ con $a \leq x \leq b$



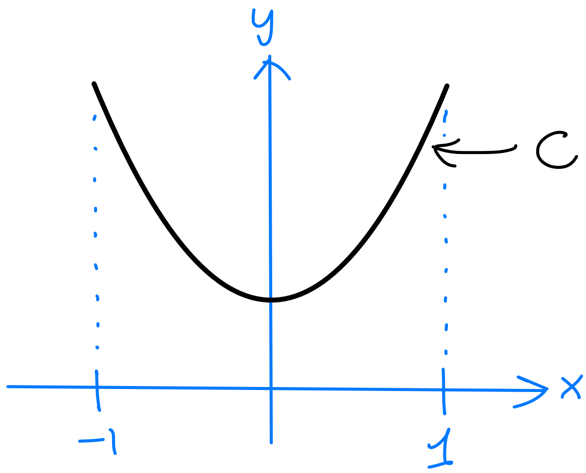
Allora $C = \{ (x, f(x)) : a \leq x \leq b \}$

$$= \{ \underbrace{(t, f(t))}_{P(t)} : a \leq t \leq b \}$$

$\vec{v}(t) = (1, f'(t))$; $|\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$ e

$$\text{lungh}(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

<u>Esercizio</u> $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ con $-1 \leq x \leq 1$



$$\text{lungh}(C) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} - \frac{1}{2}}\, dx$$

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$$

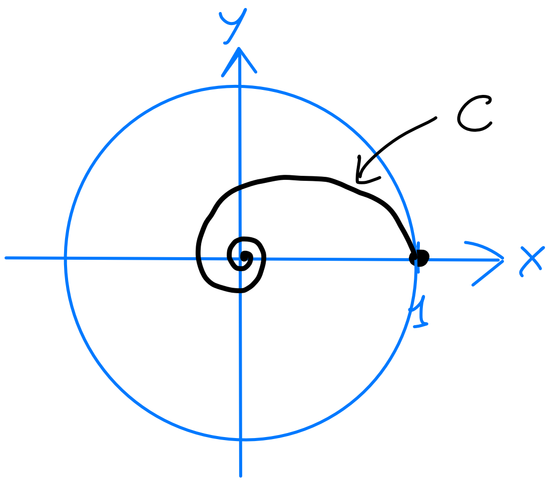
$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2}}\; dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{e^{x}}{2} + \frac{e^{-x}}{2}\; dx = \left| \frac{e^{x}}{2} - \frac{e^{-x}}{2} \right|_{-1}^{1} = e + \frac{1}{e}.$$

Esercizio

Calcolare la lunghezza della curva C parametriz. da $P(t) = (e^{-t} \cos t,\ e^{-t} \operatorname{sen} t)$ con $t \geqslant 0$.

Cioè $P(t)$ ha coordinate polari $r = e^{-t}$, $\alpha = t$



$$\text{lungh}(C) = \int_{0}^{+\infty} |\vec{v}(t)|\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t} \sqrt{(-\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t - \operatorname{sen} t)^2}$$

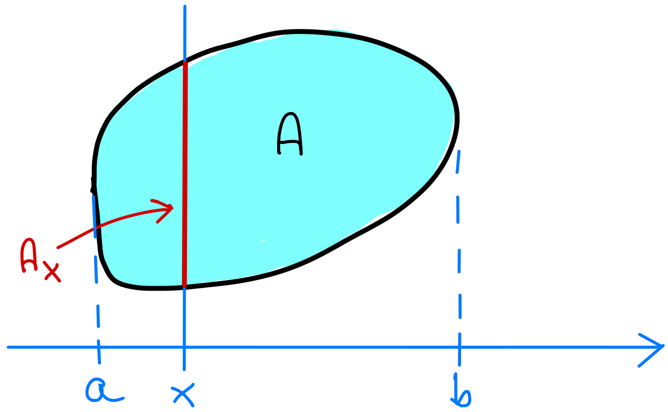
$\vec{v}(t) = e^{-t}(-\cos t - \operatorname{sen} t;\ \cos t - \operatorname{sen} t)$

$$= \int_{0}^{+\infty} \sqrt{2}\, e^{-t}\, dt = \sqrt{2} \left| -e^{-t} \right|_{0}^{+\infty}$$

$$= \sqrt{2} \left(-\text{“}e^{-\infty}\text{”} + e^{-0} \right) = \sqrt{2}$$

Calcolo delle aree

Considero una figura piana A



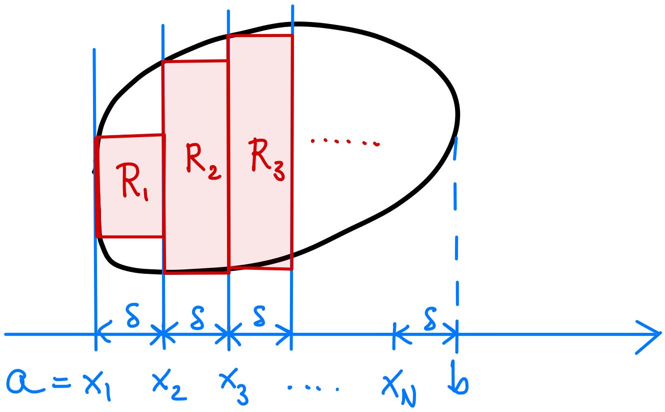
Per calcolare l'area di A scelgo un'asse e per ogni x sull'asse indico con A_x la sezione di A ad altezza x (A intersecato con la retta ortogonale all'asse e passante per x).

Pongo $\ell(x) :=$ lunghezza di A_x. Allora

$$\boxed{\text{area}(A) = \int_a^b \ell(x)\,dx}$$

Giustificazione della formula

Per calcolare l'area di A, approssimo A con dei rettangoli :



dìvido $[a,b]$ in N intervallini di lunghezza δ $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_N, b]$ e costruisco i rettangoli $R_1, \dots, R_N$ come in figura.

$x_1 = a$

Ogni R_n ha altezza $\ell(x_n)$ e base δ.

Mi aspetto che $\text{area}(A)$ sia approssimata da $\sum_{n=1}^{N} \text{area}(R_n)$ tanto meglio quanto più δ è piccolo, cioè

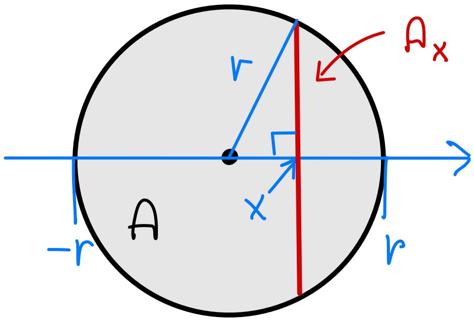
$$\text{area}(A) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{n=1}^{N} \text{area}(R_n)$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \ell(x_n) \cdot \delta}_{\text{somma di Riemann}} = \int_a^b \ell(x)\, dx.$$

$\square$

Esempio 1

A cerchio di raggio r (so già qual è l'area, questa è solo una verifica).



$$\ell(x) = \text{lungh}(A_x) = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

Quindi

$$\text{area}(A) = \int_{-r}^{r} \ell(x)\,dx = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

$x = r\,\text{sen}\,t$
$dx = r\cos t \cdot dt$

$$\longmapsto = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - r^2\text{sen}^2 t} \cdot r\cos t\;dt$$

$$= 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\underbrace{1 - \text{sen}^2 t}_{\cos^2 t}}\;\cos t\;dt$$

$\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$
perché $\cos t \geq 0$

$$\longmapsto = 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\;dt$$

$\cos^2 t = \dfrac{\cos(2t) + 1}{2}$

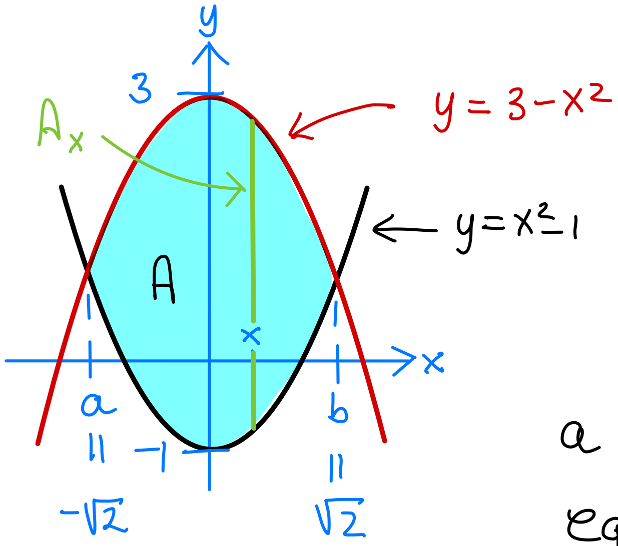
$$\longmapsto = r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) + 1\;dt$$

$$= r^2 \left| \frac{\text{sen}(2t)}{2} + t \right|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \pi r^2$$

Esempio 2

Calcolare l'area dell'insieme A dei punti (x,y) tali che $x^2-1 \leqslant y \leqslant 3-x^2$.



A_x = segmento di estremi (x, x^2-1) e $(x, 3-x^2)$

$$\ell(x) = (3-x^2)-(x^2-1) = 4-2x^2$$

a e b sono le soluzioni dell'equazione $x^2-1 = 3-x^2$ cioè

$2x^2=4$; $x^2=2$; $x=\pm\sqrt{2}$

Quindi

$$\text{area}(A) = \int_a^b \ell(x)\,dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 4-2x^2\,dx$$

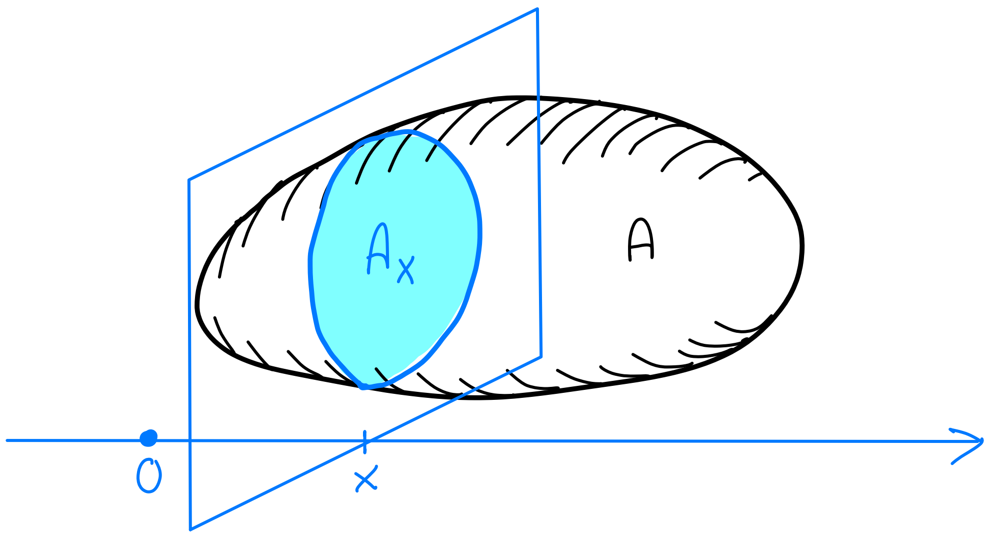
$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} 4-2x^2\,dx$$

$$= 2\left|4x-\frac{2}{3}x^3\right|_0^{\sqrt{2}}$$

$$= 2\left(4\sqrt{2}-\frac{2}{3}2\sqrt{2}\right) = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

Calcolo dei volumi

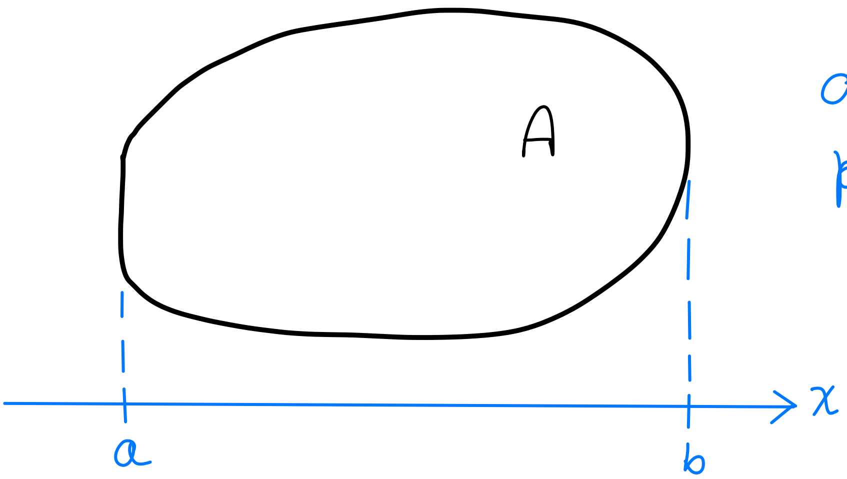
Considero un solido A nello spazio.



Per calcolare il volume di A scelgo un asse e per ogni x sull'asse indico con A_x la sezione del solido ad altezza x cioè l'intersezione di A con il piano ortogonale all'asse e passante per x.

Pongo $a(x) := \text{area}(A_x)$. Allora

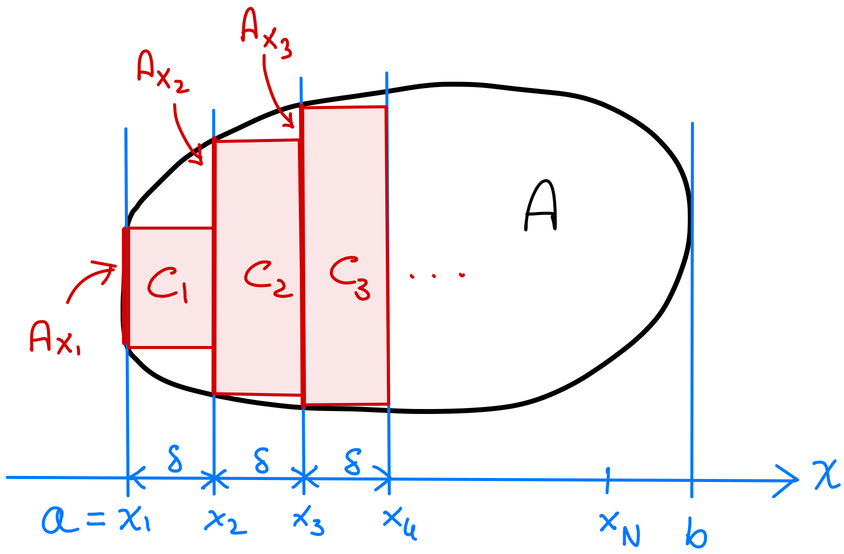
$$\boxed{\text{vol}(A) = \int_a^b a(x)\,dx}$$

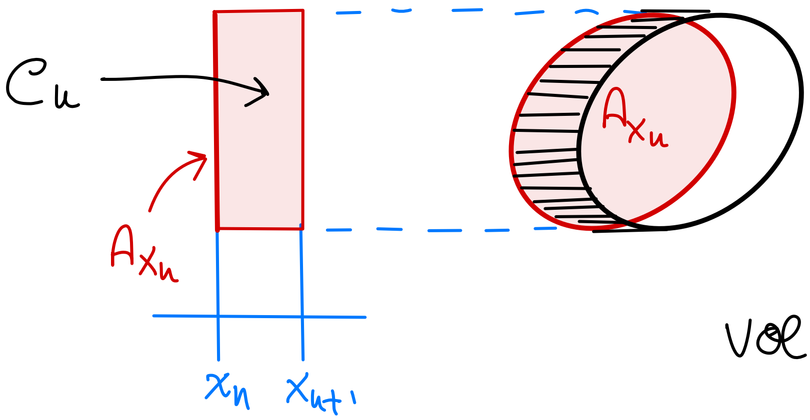


disegno in proiezione

Giustificazione della formula

Procedo come prima, approssimando A con dei cilindri $C_1, C_2, \dots, C_N$ di spessore δ.





C_n cilindro (retto) di base A_{x_n} e altezza δ

$$\mathrm{vol}(C_n) = \mathrm{area}(A_{x_n}) \cdot \delta = a(x_n) \cdot \delta$$

Allora

$$\mathrm{vol}(A) = \lim_{\delta \to 0} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{vol}(C_n)$$

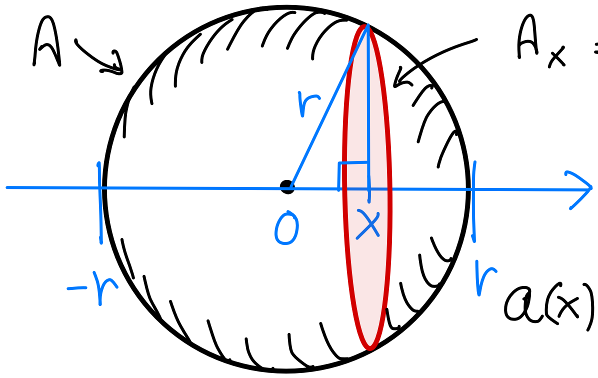
$$= \lim_{\delta \to 0} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} a(x_n) \cdot \delta}_{\text{somma di Riemann}} = \int_a^b a(x)\, dx.$$

$\square$

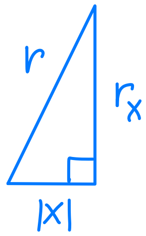
Come esempi ricaviamo le formule (note!) per il volume della sfera e del cono.

Esempio 1

A sfera di raggio r.



A_x = cerchio di raggio $r_x = \sqrt{r^2 - x^2}$



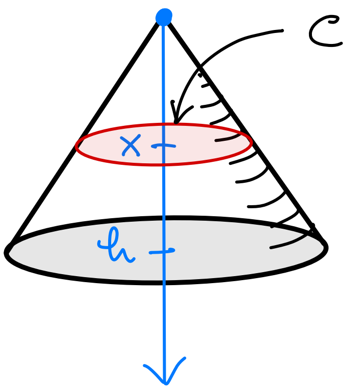
$$a(x) = \text{area}(A_x) = \pi r_x^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

$$\text{vol}(A) = \int_{-r}^{r} a(x)\,dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx$$

$$= \pi \left| r^2 x - \frac{x^3}{3} \right|_{-r}^{r} = \cdots = \frac{4\pi}{3} r^3 .$$

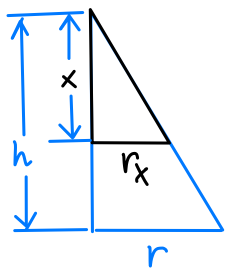
Esempio 2

A cono (retto a base circolare) con altezza h e raggio di base r



C_x cerchio di raggio

$$r_x = \frac{r}{h} x \; ; \quad a(x) = \pi r_x^2 = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2$$



$$\frac{r_x}{x} = \frac{r}{h}$$

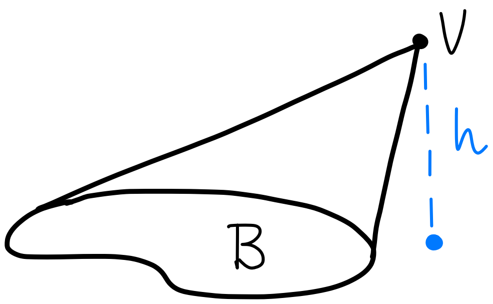
per similitudine del triangolo nero e blu.

$$\mathrm{vol}(A) = \int_0^h a(x)\,dx = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 dx$$

$$= \left| \frac{\pi r^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \right|_0^h$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \mathrm{area}(B) \cdot h$$

La formula $\mathrm{vol}(A) = \frac{1}{3} \mathrm{area}(B) \cdot h$ vale anche per coni con base b non circolare



La si dimostra allo stesso modo (provateci!)

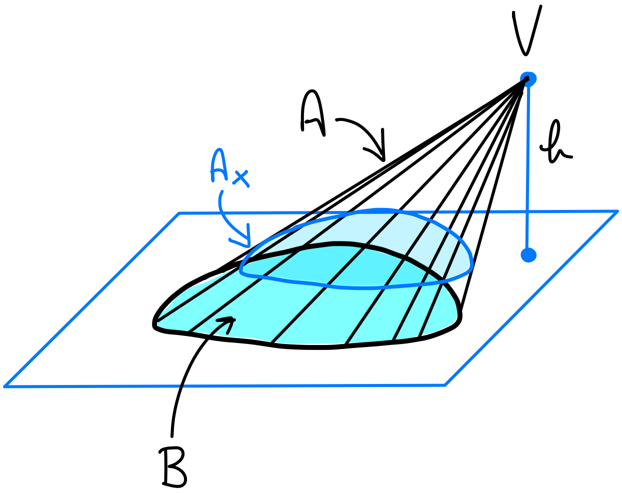
AM1 gest 20/21 lezione 39

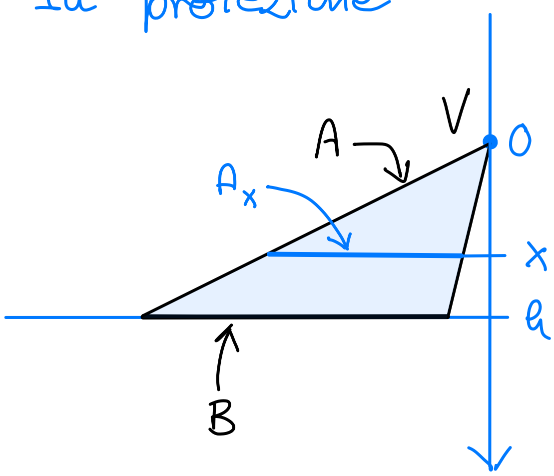
20/11/2020

Riprendo il calcolo dei volumi

Esempio 3

Volume di un cono qualunque A con base B e altezza h: $\mathrm{Vol}(A) = \frac{1}{3}\,\mathrm{area}(B)\cdot h$





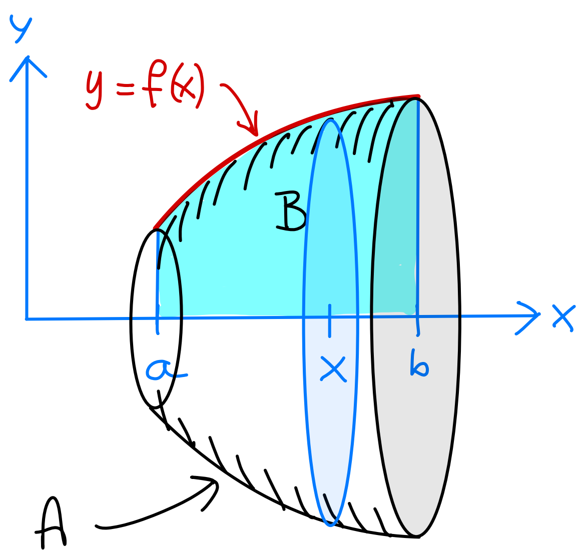
A_x è una copia di B rimpicciolita di un fattore $\frac{x}{h}$. Quindi $\mathrm{area}(A_x) = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \mathrm{area}(B)$.

$$\mathrm{vol}(A) = \int_0^h \mathrm{area}(A_x)\,dx = \int_0^h \mathrm{area}(B)\cdot\frac{x^2}{h^2}\,dx$$

$$= \mathrm{area}(B)\,\frac{1}{h^2}\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^h$$

$$= \frac{1}{3}\,\mathrm{area}(B)\cdot h$$

Solidi di rotazione, I



A è il solido ottenuto ruotando B attorno all'asse delle x.

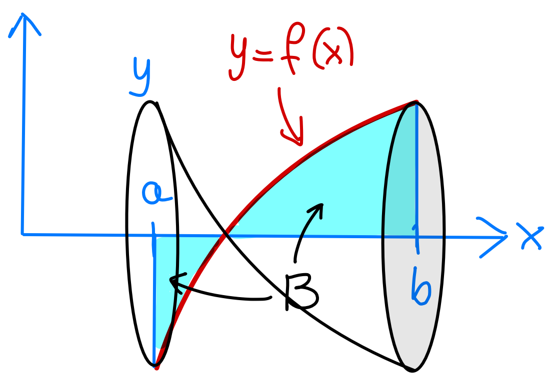
$$\mathrm{Vol}(A) = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

la sezione di A ad altezza x è un cerchio di raggio $f(x)$, quindi $\mathrm{area}(A_x) = \pi (f(x))^2$ e

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_a^b \mathrm{area}(A_x)\,dx = \int_a^b \pi\,(f(x))^2 dx$$

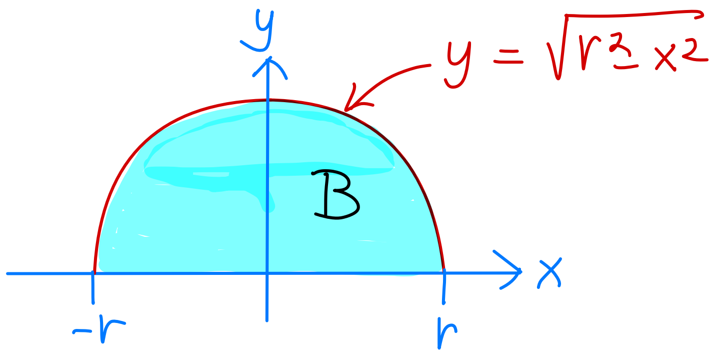
Osservazione

La formula vale per a, b qualunqui con $a<b$ e f anche non positiva.
In tal caso B è come segue:



Esempio 1

A = sfera di raggio r ; $\text{vol}(A) = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx$

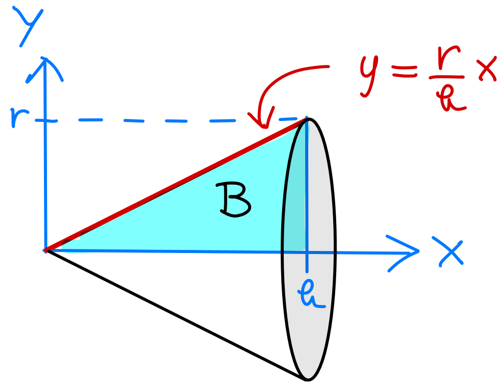


$$= \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \, dx$$

$$= \pi \left| r^2 x - \frac{x^3}{3} \right|_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Esempio 2

A = cono (circolare, retto) di altezza h e raggio di base r ; $\text{vol}(A) = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx$

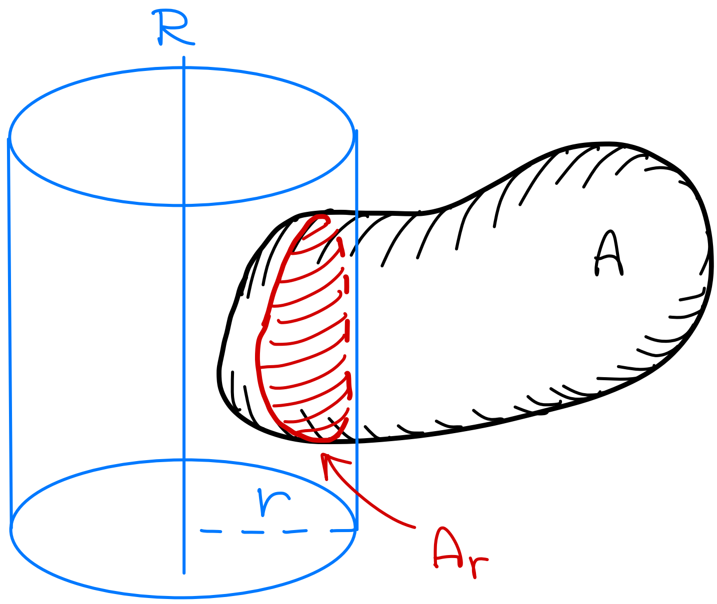


$$= \pi \left| \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right|_0^h$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Calcolo del volume, seconda formula

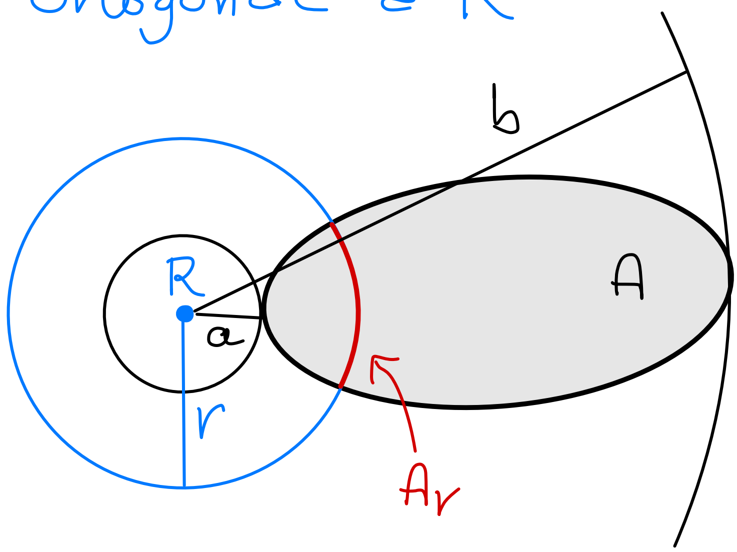
A solido nello spazio. Scelgo un asse R e per ogni $r>0$ indico con A_r la sezione radiale di A di raggio r cioè l'intersezione di A con la superficie del cilindro (illimitato) di asse R e raggio r



Allora

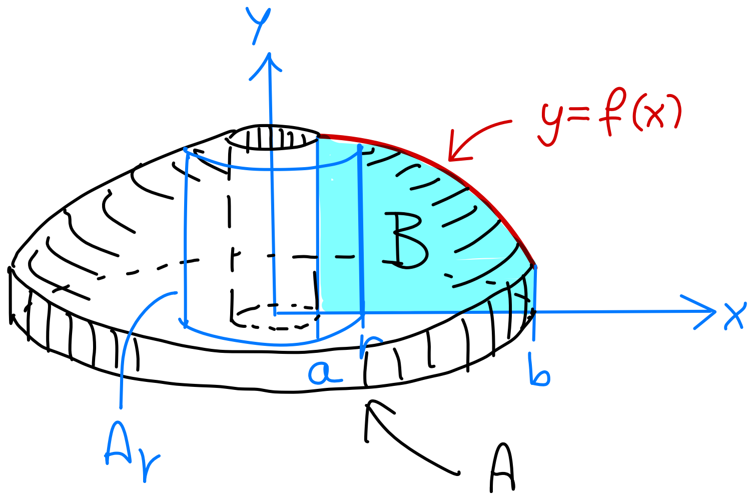
$$\boxed{vol(A) = \int_a^b area(A_r)\, dr}$$

proiezione sul piano ortogonale a R



Non dimostro questa formula.

Solidi di rotazione. II



A solido ottenuto ruotando B attorno all' asse delle y.

Allora

$$\mathrm{vol}(A) = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$$

La sezione radiale A_r è la sup. laterale di un cilindro di altezza $f(r)$ e raggio di base r.

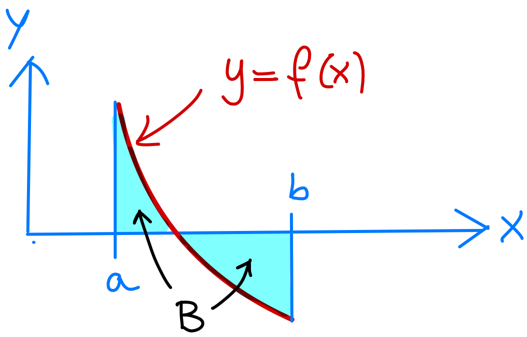
Quindi $\mathrm{area}(A_r) = 2\pi r\, f(r)$.

Quindi $\mathrm{vol}(A) = \int_a^b \mathrm{area}(A_r)\, dr = \int_a^b 2\pi r\, f(r)\, dr$.

Osservazione

In questa formula deve essere $0 \leq a < b$ e $f \geq 0$.

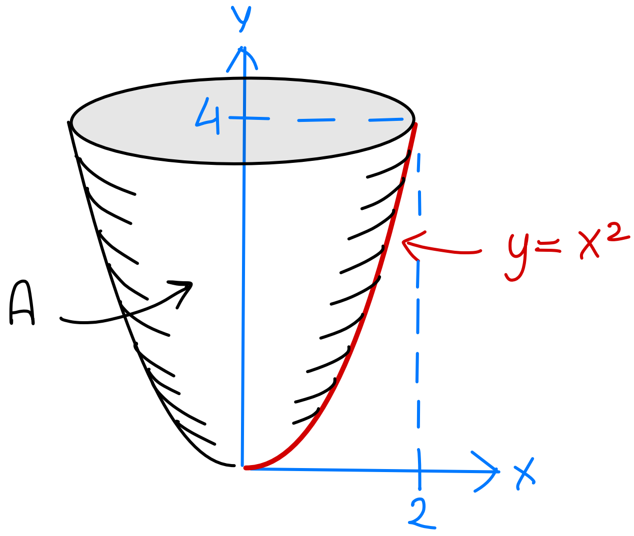
Se f non è positiva, allora prendo B come segue



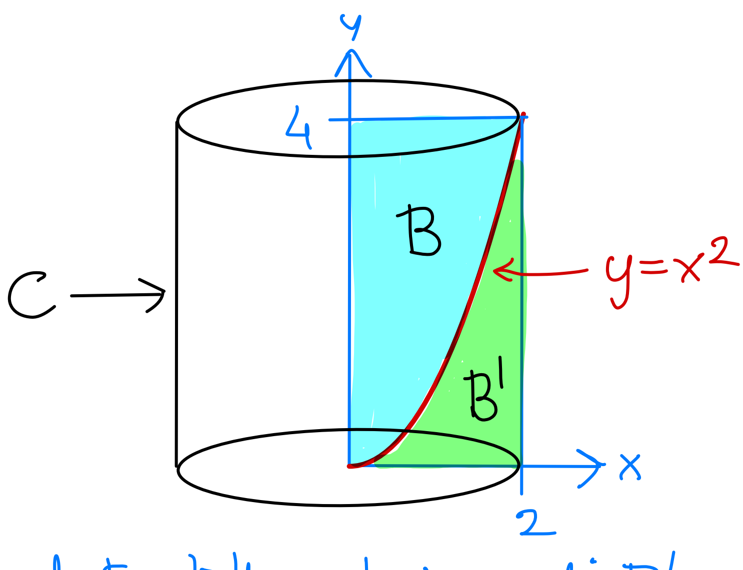
e $\mathrm{vol}(A) = 2\pi \int_a^b x\, |f(x)|\, dx$.

Esempio

Calcolare il volume di A come in figura:



Devo ottenere A come rotazione di una figura piana B attorno ad un asse.
L'asse è quello delle y; mentre B è come in figura:



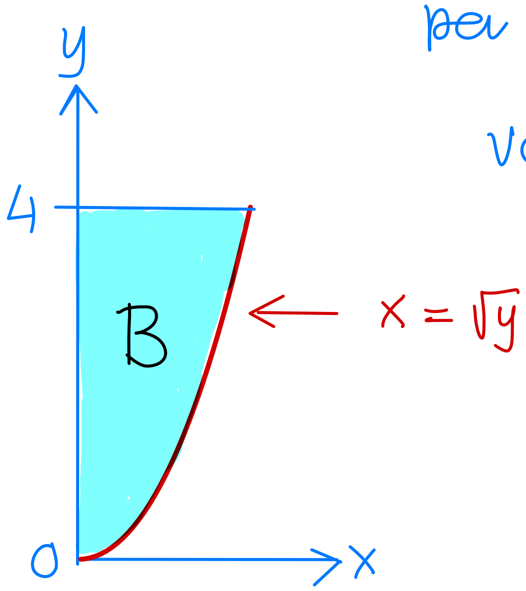
Sia A' dato dalla rotazione di B' attorno all'asse y, allora A = cilindro C meno A'.
Quindi

$$\mathrm{Vol}(A) = \mathrm{Vol}(C) - \mathrm{Vol}(A')$$

$$= (\pi 2^2) \cdot 4 - 2\pi \int_0^2 x \cdot x^2 dx$$

$$= 16\pi - 2\pi \left| \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = 8\pi$$

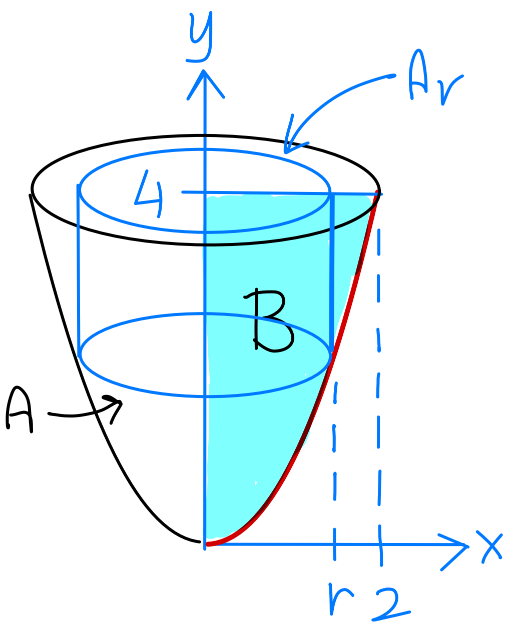
Soluzione 2 : applico la prima formula per i solidi di rotazione:



$$vol(A) = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 dy$$

$$= \pi \left| \frac{y^2}{2} \right|_0^4 = 8\pi$$

Soluzione 3 : calcolo vol(A) integrando l'area delle sezioni radiali A_r :



A_r è la sup. laterale di un cilindro di raggio r e altezza $4-r^2$.

Quindi $area(A_r) = 2\pi r(4-r^2)$

e

$$vol(A) = \int_0^2 2\pi r(4-r^2)\, dr$$

$$= \dots = 8\pi$$

AM1 gest 20/21 lezione 40

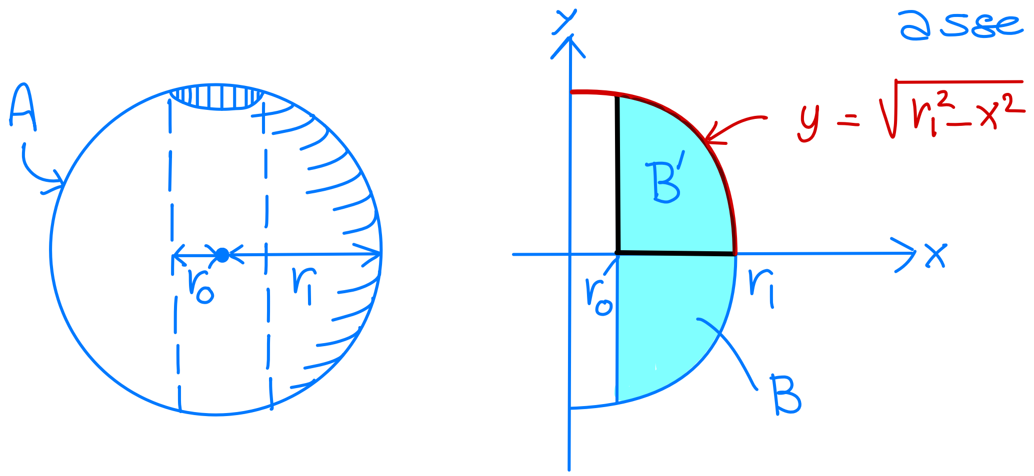
24/11/2020

Esempi di calcolo dei volumi

1| A è il solido ottenuto prendendo una sfera di raggio r_1 e bucandola con il trapano con una punta di diametro $d = 2r_0$, passando per il centro.
Calcolare il volume di A.

Punto 1: disegnare A

A si ottiene ruotando B attorno all'asse delle y



Indicando con B' la metà superiore di B e con A' il solido di rotazione generato da B' ho che

$$\mathrm{vol}(A) = 2\,\mathrm{vol}(A') = 2\left(2\pi\int_{r_0}^{r_1} x\sqrt{r_1^2 - x^2}\,dx\right)$$

$$= 4\pi\int_{r_0}^{r_1} x\sqrt{r_1^2 - x^2}\,dx$$

cambio di var.

$t = r_1^2 - x^2$,

$dt = -2x\,dx$

$\left(-\frac{1}{2}\right) dt = x\,dx$

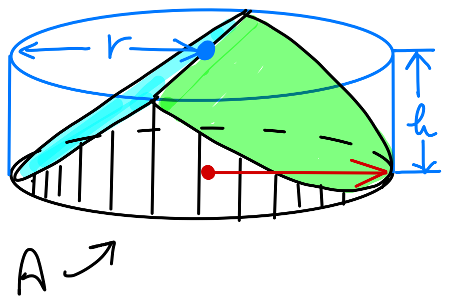
$$= 4\pi \int_{r_1^2 - r_0^2}^{0} \sqrt{t}\left(-\frac{1}{2}\right) dt$$

$$= 2\pi \int_{0}^{r_1^2 - r_0^2} \sqrt{t}\, dt$$

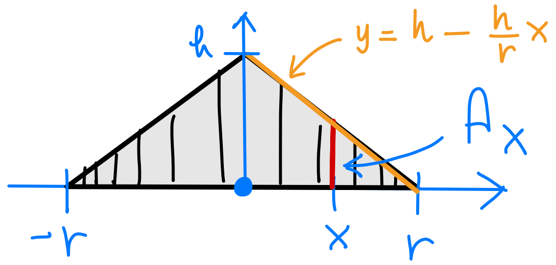
$$= 2\pi \left| \frac{2}{3} t^{3/2} \right|_{0}^{r_1^2 - r_0^2}$$

$$= \frac{4\pi}{3} \left(r_1^2 - r_0^2\right)^{3/2}$$

2| Calcolare il volume di A dato sotto:

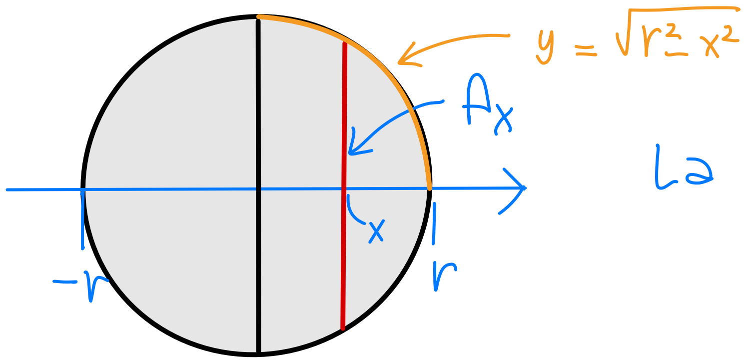


Scelgo un asse e considero le sezioni A_x rispetto a questo asse.
L'asse per cui è facile l'area di A_x è quello dato dalla freccia rossa in fig.



A_x è un rettangolo.

L'altezza è $h - \frac{h}{r}x$ (per $x > 0$).



La base è $2\sqrt{r^2 - x^2}$.

Quindi $\text{area}(A_x) = 2h\left(1-\frac{x}{r}\right)\sqrt{r^2-x^2}$.

Quindi

$$\text{Vol}(A) = \int_{-r}^{r} \text{area}(A_x)\,dx$$

$$= 2\int_0^r \text{area}(A_x)\,dx$$

$$= 4h\int_0^r \left(1-\frac{x}{r}\right)\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$t = \frac{x}{r}$

$dt = \frac{1}{r}dx$

$r\,dt = dx$

$$\longrightarrow = 4hr^2\int_0^1 (1-t)\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$t = \operatorname{sen} u$

$dt = \cos u\,du$

$\longrightarrow = \;.\;.\;.\;.\;.$