

Riassumiamo: Dato un campione $X_1 \dots X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$
con σ^2 dato. il test al livello di significatività α
per le ipotesi

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

accetto H_0 se $\left| \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma_n} \right| \leq z_{100-\alpha}^b$ dove $\sigma_n^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

rigetto H_0 se $\left| \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma_n} \right| > z_{100-\alpha}^b$

qui $\alpha = P(\text{rigettare } H_0 \mid H_0 \text{ è vera})$.

Test per differenze di medie in pop normali con σ_x, σ_y date

Dati due campioni $\{X_1 \dots X_n\}, \{Y_1, \dots, Y_m\}$.

$$X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu_x, \sigma_x^2)$$

$$Y_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

allora

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum X_j$$

$$\bar{Y}_m = \frac{1}{m} \sum Y_j$$

$$\bar{W}_{nm} = \bar{X}_n - \bar{Y}_m \sim N\left(\underbrace{\mu_x - \mu_y}_{\mu_w}, \underbrace{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}_{\sigma_{nm}^2}\right)$$

(stimatore di $\mu_x - \mu_y$)

Siamo nella stessa situazione di prima con $\bar{X}_n \rightarrow \bar{W}_{nm}$

In generale: (test z per due popolazioni) $\rightarrow \sigma^2$ conosciuto

dati $\{X_1, \dots, X_n\}$, $\{Y_1, \dots, Y_m\}$, σ_x, σ_y

• Test bilatero al livello α per

$$H_0: \mu_x - \mu_y = \mu_0 \quad H_1: \mu_x - \mu_y \neq \mu_0$$

rigetto H_0 se $\left| \frac{\bar{W}_{nm} - \mu_0}{\sigma_{nm}} \right| > z_{100-\alpha}^b$ (**)

altrimenti accetto H_0 .

• Test unilatero al livello α per

$$H_0: \mu_x - \mu_y \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \mu_0 \quad H_1: \mu_x - \mu_y \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \mu_0$$

rigetto H_0 se $\frac{\bar{W}_{nm} - \mu_0}{\sigma_{nm}} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{matrix} z_{100-\alpha}^u \\ z_{100-\alpha}^u \end{matrix}$ (**)

altrimenti accetto.

Procedura: 0) trovare $n, m, \sigma_x, \sigma_y, \mu_0, H_0, H_1, \alpha$

1) trovare $z_{100-\alpha}^u, z_{100-\alpha}^b, \sigma_{nm}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}, \bar{W}_{nm}$

2) calcolare $\frac{\bar{W}_{nm} - \mu_0}{\sigma_{nm}}$ e verificare (**)

Esempio: $X: n = 14 \quad \bar{X}_{14} = 42.78 \quad \sigma_x^2 = 41$
 $Y: m = 12 \quad \bar{Y}_{12} = 49 \quad \sigma_y^2 = 41$

test al 1% che ha come obiettivo di dimostrare che

$\mu_x < \mu_y$ ($\mu_x - \mu_y < 0$)

o) $n = 14, m = 12, \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 41, \mu_0 = 0, \bar{X}_{14} = 42.78, \bar{Y}_{12} = 49$

$H_0: \mu_x - \mu_y \geq 0$

$H_1: \mu_x - \mu_y < 0$

$\alpha = 1\%$

1) $z_{99\%}^* = 2.33$ (tabella)

$\bar{W}_{nm} = \bar{X}_n - \bar{Y}_m = -6.22$

$\sigma_{nm}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}$
 $= \frac{41}{12} + \frac{41}{14}$

2) $\frac{\bar{W}_{nm} - \mu_0}{\sigma_{nm}} = \frac{-6.22 - 0}{\sqrt{\frac{41}{12} + \frac{41}{14}}} = -2.46$

$\frac{\bar{W}_{nm} - \mu_0}{\sigma_{nm}} = -2.46 < -2.33 = -z_{100-\alpha}^*$

$\Rightarrow$ rigettiamo H_0 al livello 1%.

Test per la media di campione singolo con $N(\mu, \sigma^2)$

σ^2 non dato

Sia $X_1, \dots, X_n$ dato con $X_j \sim N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 non dato

$\Rightarrow$ stimare σ^2 con $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2$

$\Rightarrow$ statistiche standardizzate (misura di discrepanza)

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n} \quad \text{per} \quad S_n^2 = \frac{1}{n} S^2$$

dove T ha distribuzione t di student con $\nu = n-1$ gradi di libertà.

In generale (test t per media pop. singolo)

dati $\{X_1, \dots, X_n\}$ $X_j \sim N(\mu, \sigma^2)$ σ sconosciuto.

calcolare $\bar{X}_n, S^2, \nu = n-1$

• Test bilatero al livello α

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

rigetto H_0 se

$$\left| \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n} \right| > t_{100-\alpha, n-1}^b \quad (**)$$

altrimenti accetto

• Test unilatero al livello α per

$$H_0: \mu \stackrel{\geq}{\leq} \mu_0$$

$$H_1: \mu \stackrel{<}{>} \mu_0$$

rigetto H_0 se

$$\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n} \begin{matrix} > t_{100-\alpha, n-1}^v \\ < - t_{100-\alpha, n-1}^v \end{matrix} \quad (**)$$

Procedimento: 0) trovare $n, \bar{X}_n, S^2, \mu_0, H_0, H_1, \alpha$

1) trovare $t_{100-\alpha, n-1}^v, t_{100-\alpha, n-1}^b, S_n$

2) $T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n}$ e verificare (**)

Esempio: Deubificio prodotto. $n=25$ bambini

X_j = # caie per bambino j che usa dent.

$$\bar{X}_{25} = 2.5 \quad \mu_0 = 3, \quad S^2 = 1.322$$

test al 2.5%.

vogliamo dimostrare che dent. induce # caie

$$o) \quad n = 25, \quad \bar{X}_n = 2.5, \quad S^2 = 1.32 \quad \alpha = 2.5$$

$$H_0: \mu \geq \mu_0$$

$$H_1: \mu < \mu_0$$

$$\mu_0 = 3 \quad \nu = n - 1 = 24$$

$$1) \quad t_{97.5, 25-1}^0 = 2.06$$

$$S_n = \sqrt{\frac{1.32}{25}} = \frac{1.15}{5}$$

$$2) \quad T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n} = \frac{2.5 - 3}{\frac{1.15}{5}} = \frac{-2.5}{1.15} = -2.17$$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n} = -2.17 < -2.06 = t_{97.5, 24}^0$$

$\Rightarrow$ rigetto H_0

Test per differenza di medie di pop. normali

con σ_x, σ_y non dati

Dati $\{X_1, \dots, X_n\}$

$$X_j \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$$

assumiamo

$\{Y_1, \dots, Y_m\}$

$$Y_j \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma$$

sconosciuto

allora

$$\bar{W}_{nm} = \bar{X}_n - \bar{Y}_m \sim N(\mu_x - \mu_y, \underbrace{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}}_{\sigma_{nm}^2})$$

definiamo

$$S_{nm}^2 = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) \frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2} \quad (\approx \sigma_{nm}^2)$$

$$\text{dove } S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2, \quad S_y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y}_m)^2$$

la statistica del test (misura di discrepanza)

$$T = \frac{\bar{W}_{nm} - (\mu_x - \mu_y)}{S_{nm}} \sim t(\underbrace{n+m-2}_{\text{gradi di libertà}})$$

gradi di libertà.

In generale (diff. di medie o non data).

dati $\{X_1, \dots, X_n\}$ $\{Y_1, \dots, Y_m\}$ calcoliamo $\bar{X}_n, \bar{Y}_m, S_x^2, S_y^2$

$$\Rightarrow \bar{W}_{nm}, S_{nm}, \nu = n+m-2$$

• Test bilatero al livello α per

spesso
 $\mu_0 = 0$
↑

$$H_0: \mu_x - \mu_y = \mu_0$$

$$H_1: \mu_x - \mu_y \neq \mu_0$$

rigetta H_0 se

$$\left| \frac{\bar{W}_{nm} - \mu_0}{S_{nm}} \right| > t_{100-\alpha, n+m-2}^b \quad (**)$$

altrimenti accetto H_0 .

• Test unilatero al livello α

$$H_0: \mu_x - \mu_y \leq \mu_0$$

$$H_1: \mu_x - \mu_y > \mu_0$$

rigettiamo H_0 se

$$\frac{\bar{W}_{nm} - \mu_0}{S_{nm}} > t_{100-\alpha, n+m-2}^u$$
$$< -t_{100-\alpha, n+m-2}^u \quad (**)$$

altimenu accettiamo H_0 .

Procedimento: 0) trovare $n, m, \bar{X}_n, \bar{Y}_m, S_x^2, S_y^2, \alpha, \nu$

$$H_0, H_1, \mu_0$$

1) trovare $t_{100-\alpha, n+m-2}^u, t_{100-\alpha, n+m-2}^b$

$$S_{nm}, \bar{W}_{nm}$$

2) calcolare $T = \frac{\bar{W}_{nm} - \mu_0}{S_{nm}}$ e

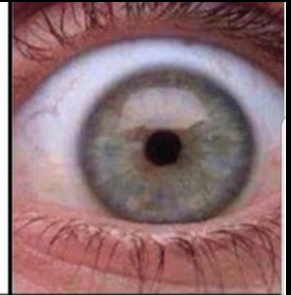
verificare. (**)

Note: Se α diminuisce, il test è più "severo"
e quindi l'intervallo (**) si restringe.
⇒ possiamo calcolare quale è il livello
di significatività α minimo (più basso)
che rigetta H_0 per un campione dato.
(quale è α del test più severo che rigetta
 H_0 con il campione dato).

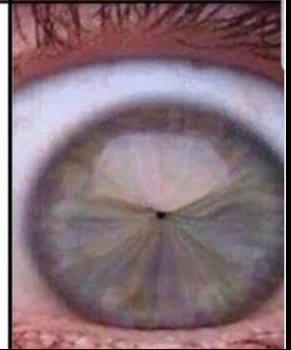
Def Il valore p di un campione per un test dato è il valore di α più piccolo per il quale il test rigetta H_0 .



The pupil of your eye can expand as much as 55% while looking at something you love



$p > .05$



test al livello $\alpha = 10\%$