

$$1) t_{98,9999}^b = 2.326$$

$$S_u^2 = \frac{S_x^2}{u} = \frac{1.53}{10000}$$

$$2) IC: \left(98.7 - 2.326 \sqrt{\frac{1.53}{10000}}, 98.7 + 2.326 \sqrt{\frac{1.53}{10000}} \right) \\ = (98.677, 98.723)$$

Intervallo di confidenza di differenza di medie $\mu_x - \mu_y$
con σ sconosciuto.

Richiamo: $X_i \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $Y_i \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ conosciuti

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{W}_{nm} = \bar{X}_n - \bar{Y}_m \sim N(\mu_x - \mu_y, \sigma_{nm}^2) \\ \sigma_{nm}^2 = \frac{1}{n} \sigma_x^2 + \frac{1}{m} \sigma_y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow IC: (\bar{W}_{nm} - z_{\beta}^b \sigma_{nm}, \bar{W}_{nm} + z_{\beta}^b \sigma_{nm})$$

Per motivi tecnici assumiamo $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ sconosciute.

Prima (con σ^2 conosciuto) la quantità standardizzata

e.e

$$\frac{\bar{W}_{nm} - (\mu_x - \mu_y)}{\sigma_{nm}} \sim t(\nu)$$

$$\bar{W}_{nm} = \bar{X}_n - \bar{Y}_m$$

~~σ_{nm}~~ S_w

$$\text{con } \begin{cases} \underline{S_w} = \sqrt{\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{m}\right) \left(\frac{(u-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{u+m-2}\right)} \\ \underline{v} = u+m-2 \end{cases} \quad (*)$$

$\Rightarrow$ IC al livello β per $\mu_x - \mu_y$ quando $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ non nota è

(**) bilaterale: $(\bar{W}_{um} - t_{\beta, \underline{v}}^b \underline{S_w}, \bar{W}_{um} + t_{\beta, \underline{v}}^b \underline{S_w})$

unilaterale $(-\infty, \bar{W}_{um} + t_{\beta, \underline{v}}^u \underline{S_w})$ o $(\bar{W}_{um} - t_{\beta, \underline{v}}^u \underline{S_w}, \infty)$

dove S_w, v sono date in (*)

Concretamente: o) trovare $u, m, (v = u+m-2), \bar{X}_u, \bar{Y}_m$

1) trovare $t_{\beta, v}^b, t_{\beta, v}^u$, calcolare S_w S_x^2, S_y^2, β

2) inserire in (**)

Esempio: 2 gruppi di studenti con perf.

Gruppo A = 36,54, ... $u=14, \bar{X}_{14}=42.78, S_x^2=4.12$

Gruppo B = 52,60, ... $u=12, \bar{Y}_{12}=55, S_y^2=4.23$

Calcolare IC bilaterale al 95% per $\mu_x - \mu_y$

o) $u=14, m=12, v=24, \bar{X}_{14}=42.78, \bar{Y}_{12}=55$
 $\beta=95\%, S_x^2=4.12, S_y^2=4.23$

$$1) 95\% = P(|T_{24}| \leq t_{95,24}^b) \Rightarrow t_{95,24}^b = 2.064$$

$$S_w = \sqrt{\left(\frac{1}{14} + \frac{1}{12}\right) \left(\frac{13 \cdot 4.12 + 11 \cdot 4.23}{24}\right)} = 2.03$$

$$w_{uu} = \bar{X}_{14} - \bar{Y}_{12} = -12.22$$

$$2) IC \left(-12.22 - 2.064 \cdot 2.03, -12.22 + 2.064 \cdot 2.03 \right)$$

IC

Intervallo di confidenza per parametro p di distrib. di Bernoulli

Esempio, 100 transistor sono scelti a caso e testati, 80 soddisfanno gli standard.

Trovare l'IC al 95% del parametro p

$p = P(\text{transistor soddisfa gli standard})$.

a) stimatore $\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$ $n=100$

$$A_i = \{ \text{transistor } i \text{ soddisfa} \}.$$

b) CLT: $\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} \stackrel{\text{asint}}{\approx} N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \approx z \sim N(0,1)$$

c) 95%: $P(|z| \leq z_{95\%}^b) = P\left(\left| \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \right| \leq z_{95\%}^b\right)$

approssimiamo
 p con $\hat{p} \approx P\left(\left| \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \right| \leq z_{95\%}^b\right)$

nell'espressione
della varianza

$$= P\left(p \in \left(\hat{p} - z_{\alpha/2}^b \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}^b \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)\right)$$

$$= P\left(p \in \left(0.8 - 2 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{100}}, 0.8 + 2 \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{100}}\right)\right)$$

$$= P(p \in (0.72, 0.88))$$

L'intervallo di confidenza approssimativo
del parametro p al livello α dove
 $X_i \stackrel{iid}{\sim} \text{Ber}(p)$ dato un campione $X_1, \dots, X_n$ è

Bilaterale: $\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}^b \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}^b \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$

Unilaterale $\left(-\infty, \hat{p} + z_{\alpha}^u \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha}^u \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \infty\right)$$

dove $\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$ $A_i = \{\text{successo}\}$
allo prova i

Richiamo: Sia dato un campione $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ iid
da una distribuzione $p_Y(y)/f_Y(y)$ allora

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j$$

è uno stimatore corretto e consistente $E(Y_1) = \mu$

- $E(\bar{Y}_n) = \mu$ (corretto)

- $\bar{Y}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu \quad (P(|\bar{Y}_n - E(Y_1)| > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0)$
(consistente.)

Esempio: Metodo di integrazione di Monte Carlo.

Per una distribuzione continua $X_j \sim f_X(x)$

Consideriamo $Y_j = g(X_j)$ def di $E(X)$.

$$E(Y_1) = E(g(X_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx$$

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(X_j)$$

$\Rightarrow$ prendendo $X_j \stackrel{iid}{\sim} f_X(x)$ abbiamo per la consistenza
di $\bar{Y}_n$ per $E(Y_1)$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(X_j) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Monte Carlo: Se $X_j \stackrel{iid}{\sim} f_x(x)$ per ogni j approssimiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_x(x) dx \stackrel{n \gg 1}{\approx} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(X_j)$$

Esempio: Approssimiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 \mathbb{1}_{(x \in (0,2))}}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 dx = \frac{1}{2} 2 = 1$$

$$\int_0^2 \frac{(x^2 + 4x + 3)}{\log(x + e^x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{2 \frac{(x^2 + 4x + 3)}{\log(x + e^x)}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1 \mathbb{1}_{(x \in (0,2))}}{2}}_{f_x(x)} dx$$

$$X_j \sim \text{Unif}(0,2) \quad \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(X_j)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 2 \frac{(X_j^2 + 4X_j + 3)}{\log(X_j + e^{X_j})}$$

In generale per integrali con intervalli di integrazione limitati $-\infty < a < b < \infty$

$$\int_a^b G(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (b-a) \cdot G(X_j)$$

con $X_j \stackrel{iid}{\sim} \text{Unif}(a,b)$

Quando $a = \infty$ e/o $b = -\infty$

← distribuzione
di P

0) Separare integrale in g, f_x

1) generare $X_j \stackrel{iid}{\sim} f_x$

2) approssimare $\int g(x) \cdot f_x(x) dx \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(x_j)$