

fdm $\text{Bin}(n, p) \approx f_{\mu, \sigma^2}(x)$
 per un certo μ, σ^2 dove

$$X \sim \text{Bin}(n, p) \quad E(X) = n \cdot p$$

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

$$f_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$\mu \rightarrow$ media (centro)

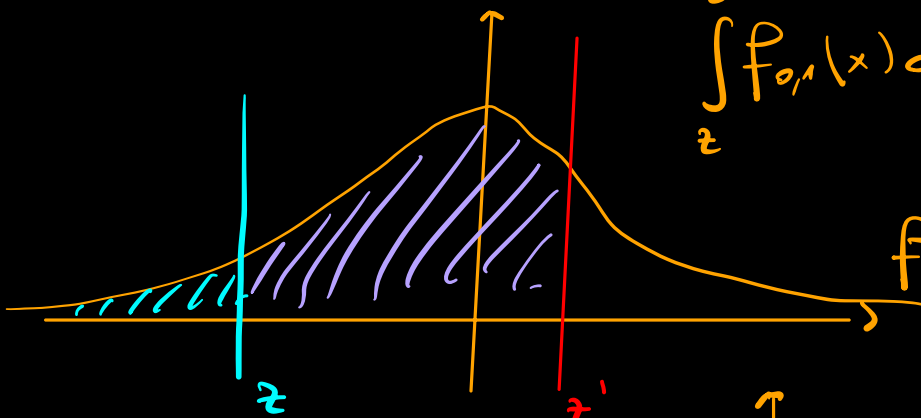
$\sigma^2 \rightarrow$ varianza (dispersione)

Ci interessa calcolare $\int_a^b f_{\mu, \sigma^2}(x) dx$ ($\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu, \sigma^2}(x) dx = 1$)

Cominciamo definendo $\int_{-\infty}^z f_{0,1}(x) dx = \Phi(z)$

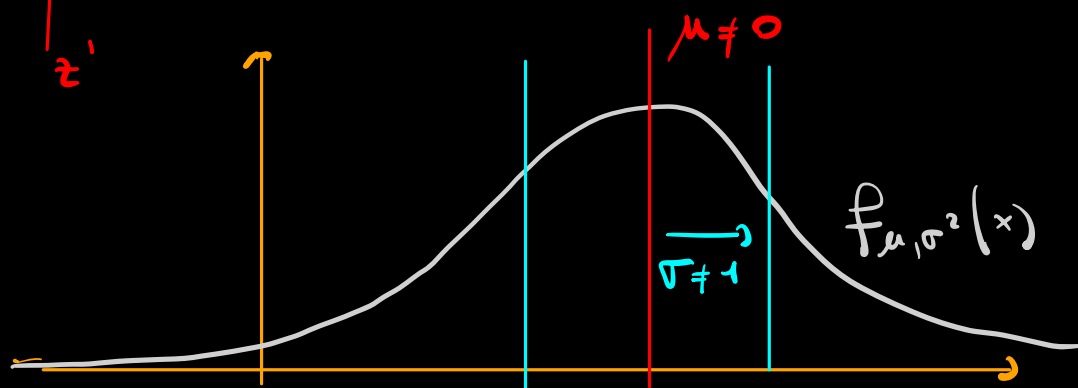
Con questo possiamo calcolare ogni integrale definito di $f_{0,1}$

$$\int_z^{z'} f_{0,1}(x) dx = \underline{\Phi(z')} - \underline{\Phi(z)}$$



Per $\mu \neq 0 \quad \sigma^2 \neq 1$

$$f_{0,1} \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$



$$\int_{-\infty}^z f_{\mu, \sigma^2}(x) dx = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dx$$

$$\underline{z' = \frac{z-\mu}{\sigma}} \quad \underline{y = \frac{x-\mu}{\sigma}} \quad \underline{dy = \frac{1}{\sigma} dx} \quad \int_{-\infty}^{z'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \Phi(z') = \Phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)$$

$f_{0,1}(y)$

Esempio: $\mu = 2$, $\sigma = 10$

$$\int_{-3}^7 f_{2,10^2}(x) dx = \int_{-\infty}^7 f_{2,10^2}(x) dx - \int_{-\infty}^{-3} f_{2,10^2}(x) dx = \Phi\left(\frac{7-2}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-3-2}{10}\right)$$

$$\text{Conversione con Binomiale:} \quad = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

Teorema (Teorema del Limite Centrale, CLT per somme)

Per una $\text{Bin}(n, p)$ è approssimato da $N(\mu_{\#}, \sigma_{\#}^2)$

con

$$\mu_{\#} = n \cdot p$$

$$\sigma_{\#} = \sqrt{n p (1-p)}$$

Esempio: Lancio 400 volte una moneta $n = 400$, $p = \frac{1}{2}$.

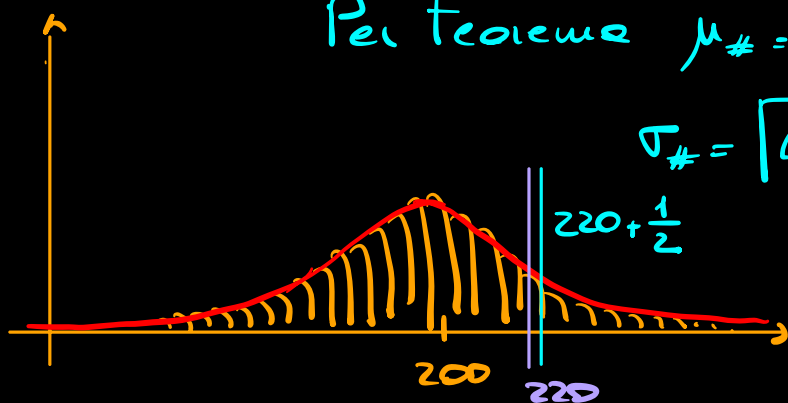
$$P(\# \text{ successi} \leq 220) = \int_{-\infty}^{220} f_{\mu_{\#}, \sigma_{\#}^2}(x) dx = \Phi\left(\frac{220 - \mu_{\#}}{\sigma_{\#}}\right)$$

Per teorema $\mu_{\#} = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200$

$$\sigma_{\#} = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 10$$

$$= \Phi\left(\frac{220 - 200}{10}\right)$$

$$= \Phi(2) = 0.977$$



Per essere più precisi dovrai contare metà colonna in più (se integro fino a 220.0 contando solo metà colonna).

$$\Rightarrow P(\# \text{ successi} \leq 220) = \int_{-\infty}^{220 + \frac{1}{2}} f_{\mu_{\#}, \sigma_{\#}}(x) dx = \Phi\left(\frac{220 + \frac{1}{2} - 200}{10}\right)$$

convezione di continuità $\rightarrow$ $= 0.980$

Ricapitolazione: quando usiamo il CLT per # successi

1) $\mu_{\#} = n \cdot p$, $\sigma_{\#} = \sqrt{n p (1-p)}$ per il problema

2) scrivere l'integrale

$$P(\# \text{ successi} \in [a, b]) = \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - \mu_{\#}}{\sigma_{\#}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - \mu_{\#}}{\sigma_{\#}}\right)$$

convezione di continuità $\rightarrow$

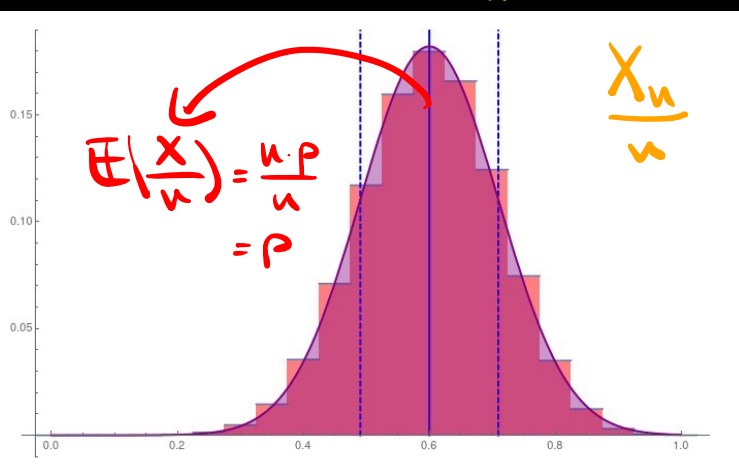
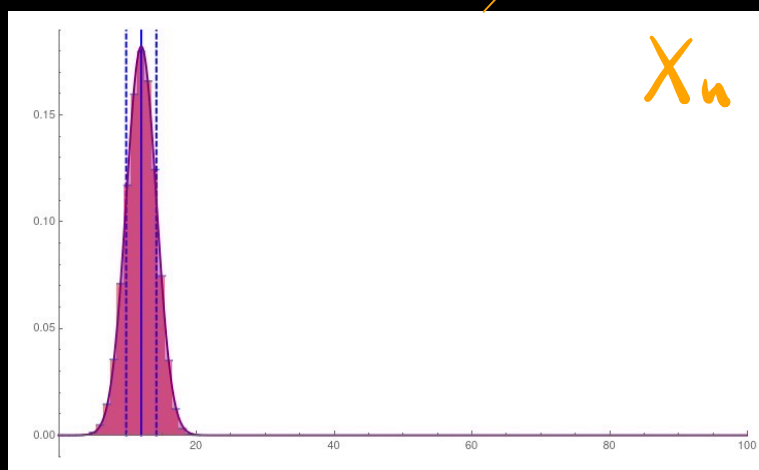
Formulazione simile per proporzione di successi

Richiamo: $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$ $Var(a \cdot X) = a^2 Var(X)$

$$\Rightarrow E\left(\frac{1}{n} X\right) = \frac{1}{n} E(X) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot p = p$$

Bin(n, p) $\rightarrow$

$$Var\left(\frac{1}{n} X\right) = \frac{1}{n^2} \cdot Var(X) = \frac{n p (1-p)}{n^2} = \frac{1}{n} p (1-p)$$



Come prima approssimazione la distribuzione di $\frac{X}{n}$ (proporzione o freq. relativa di successi) con $N(\mu_p, \sigma_p^2)$

Thm (CLT per proporzioni) Se $X_n \sim \text{Bin}(n, p)$ allora

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{n \gg 1} N(\mu_p, \sigma_p^2) \quad \text{per} \quad \begin{cases} \mu_p = p \\ \sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \end{cases}$$

Coerente con legge dei grandi numeri: proporzione di successi è vicina a p per $n \gg 1$.

Esempio: Lanciamo 400 volte una moneta $n=400, p=\frac{1}{2}$ $X_n \sim \text{Bin}(n, p)$

$$P(\text{proporzione di "teste"} \in [0.45, 0.55]) = P\left(\frac{X_n}{n} \in [0.45, 0.55]\right)$$

$$\approx \int_{0.45}^{0.55} f_{\mu_p, \sigma_p^2}(x) dx = \int_{-\infty}^{0.55} f_{\mu_p, \sigma_p^2}(x) dx - \int_{-\infty}^{0.45} f_{\mu_p, \sigma_p^2}(x) dx$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mu_p = p = \frac{1}{2} \\ \sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \frac{1}{40} \end{cases} &= \Phi\left(\frac{0.55 - \frac{1}{2}}{1/40}\right) - \Phi\left(\frac{0.45 - \frac{1}{2}}{1/40}\right) \\ &= \Phi(2) - \Phi(-2) \approx 0.95 \end{aligned}$$

Ricapitolazione: CLT per proporzioni

- calcoliamo $\mu_p = p$ $\sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ per il problema
- scriviamo $P\left(\frac{X_n}{n} \in (\alpha, \beta)\right) \approx \Phi\left(\frac{\beta - \mu_p}{\sigma_p}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \mu_p}{\sigma_p}\right)$

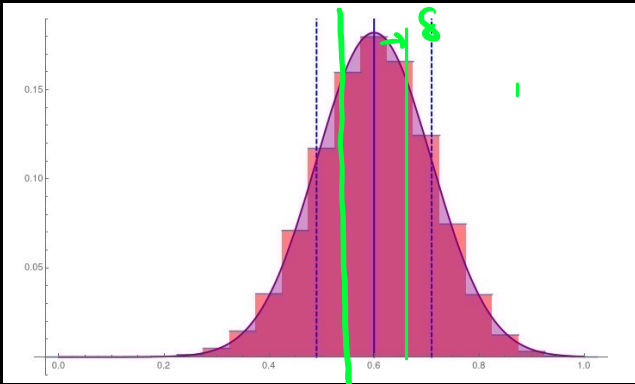
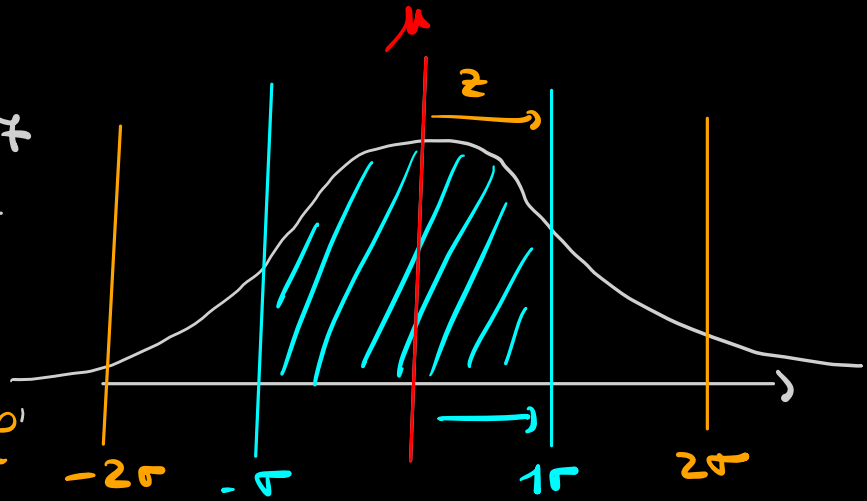
Intervalli di confidenza

Domanda: dato p , per quale n so che

$$P(\text{prop. di successi} \in (p - \delta, p + \delta)) = 0.95$$

z	1	1.64	1.96	2.57
$\int_{-z}^z f_{0,1}(x) dx$	0.68	0.90	0.95	0.99

intervalli di confidenza dell'
 $\alpha\%$ è $z \cdot \sigma$



Voglio sapere per quale n
ho il 95% di P di essere
nell'intervallo di ampiezza δ

$$\delta = 1.96 \sigma(\mu)$$

Per quale n l'intervallo di confidenza al 95%
(che corrisponde a 1.96σ per la tabella) è di
ampiezza δ .

Esempio: lancio moneta n volte. Per quale n

$$P(\text{proportione di teste} \in (\frac{1}{2} - \frac{0.05}{\delta}, \frac{1}{2} + \frac{0.05}{\delta})) = 0.99$$