

Richiamo: VA X codifica il risultato di un esperimento aleatorio.

$X \in \text{range}(X)$.

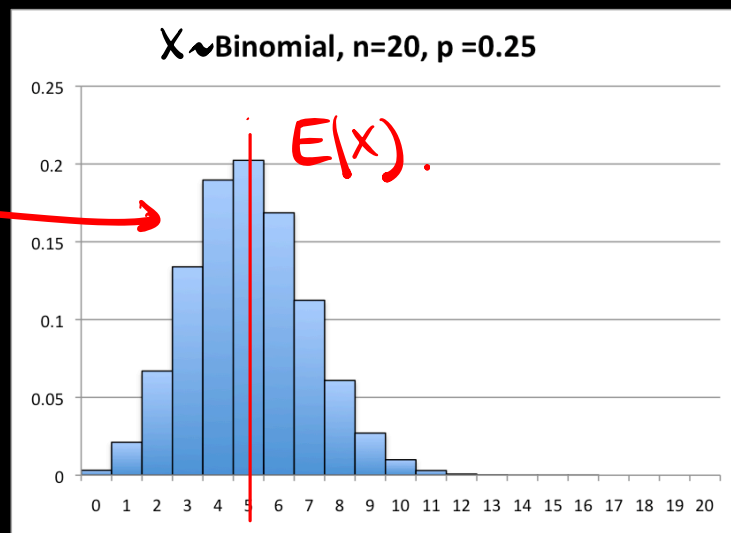
funzione di massa $P(X=k)$ $k \in \text{range}(X)$.

$$P(X \in B) = \sum_{k \in B} P(X=k)$$

Valore atteso

$$E(X) = \sum_{k \in \text{range}(X)} k \cdot P(X=k)$$

$$E(X) = \sum_{x \in \text{range}(X)} x \cdot P(X=x)$$



Valore atteso di funzioni di VA

Per una VA discreta X e una funzione $g(X)$ su $\text{range}(X)$ abbiamo

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in \text{range}(X)} g(x) \cdot \mathbb{P}(X=x)$$

$\hookrightarrow g$ modifica solo il valore di X non le sue P .

Esempi

• X risultato lancio dado, $\mathbb{E}(X) = 3.5$ $g(X) = 2 \cdot X$

$$\mathbb{E}(2 \cdot X) = \sum_{x=1}^6 \underline{2 \cdot x} \cdot \mathbb{P}(X=x) = 2 \cdot \underbrace{\sum_{x=1}^6 x \cdot \mathbb{P}(X=x)}_{\mathbb{E}(X)} = 2 \cdot \mathbb{E}(X) = 2 \cdot 3.5 = 7$$

• Se $g(x) = c \cdot x$ per costante $c \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(c \cdot X) = \sum_{x \in \text{range}(X)} c \cdot x \cdot \mathbb{P}(X=x) = c \cdot \sum_{x \in \text{range}(X)} x \cdot \mathbb{P}(X=x) = c \cdot \mathbb{E}(X)$$

• Se $g(x) = b$ per costante b

$$\mathbb{E}(b) = \sum_{x \in \text{range}(X)} b \cdot \mathbb{P}(X=x) = b \sum_{x \in \text{range}(X)} \mathbb{P}(X=x) = b \cdot 1 = b$$

E₁: $\mathbb{E}(5) = 5$

E₂: X lancio di un dado

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

• $\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{x,y} g(x,y) \cdot \mathbb{P}(X=x, Y=y)$

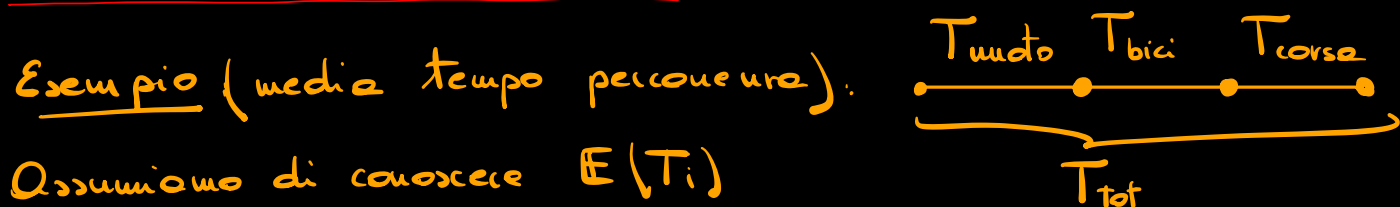
E₂: $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \sum_{x,y} x \cdot y \cdot \mathbb{P}(X=x, Y=y)$

E₃: Peschiamo due biglietti da $\{1, 2, 3\}$ senza reins.

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = 1 \cdot 2 \cdot \mathbb{P}(X=1, Y=2) + 1 \cdot 3 \cdot \mathbb{P}(X=1, Y=3) + \dots = \frac{11}{3}$$

Valore atteso di somme di VA

Esempio (media tempo percorrenza):



Assumiamo di conoscere $E(T_i)$

$$E(T_{tot}) = E(T_{moto} + T_{bici} + T_{corse}) = E(T_{moto}) + E(T_{bici}) + E(T_{corse})$$

Per ogni coppia di VA X, Y (anche dipendenti!)

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

più in generale $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$

E_s: Lancio 10 dadi, quale è il valore atteso della somma totale. $X_i = \#$ lancio i -esimo dado.

$$E(X_1 + \dots + X_{10}) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{10}) = 3,5 \cdot 10 = 35$$

Regola del prodotto per valori attesi

Se X, Y sono indipendenti, allora $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

E_s: Lanciamo due dadi con esiti X_1, X_2

$X_1 \perp X_2$

$$E(X_1 \cdot X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2) = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{4} = 12.25$$

Es: X lancio di un dado

$$\frac{91}{6} = E(X^2) = E(X \cdot X) \neq E(X) \cdot E(X) = \frac{49}{4}$$

perché $X \nparallel X$

Metodo degli indicatori

Es: lancio un dado E = "risultato è pari". $I_E(X) = \begin{cases} 1 & \text{se } X \text{ pari} \\ 0 & \text{se } X \text{ disp.} \end{cases}$

$$E(I_E) = \sum_{x=1}^6 I_E(x) \cdot P(X=x) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = P(E)$$

Def (Indicatore su A) $I_A = \begin{cases} 1 & \text{se succede } A \subseteq S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall A$

allora $E[I_A] = 1 \cdot P[A] + 0 \cdot P[A^c] = P[A]$

Ex: una macchina ha 3 componenti (C_1, C_2, C_3). Ognuno funziona con probabilità rispettive p_1, p_2, p_3

Calcolare $E[\text{\# componenti funzionanti}]$. $I_1 = \begin{cases} 1 & \text{se } C_1 \text{ funziona} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

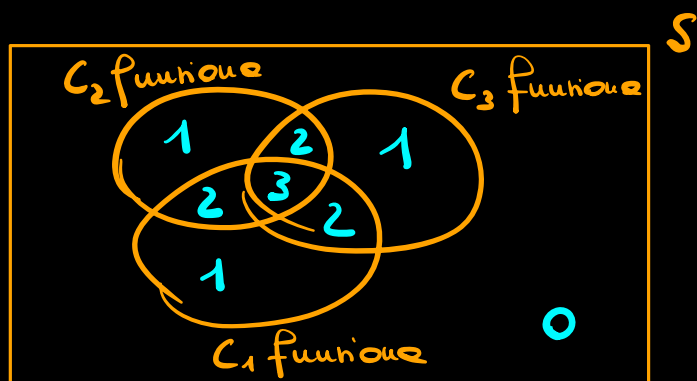
I_j VA indicatrice su $\{C_j \text{ funziona}\}$.

$$X = I_1 + I_2 + I_3$$

$$E(X) = E(I_1 + I_2 + I_3)$$

$$= E(I_1) + E(I_2) + E(I_3)$$

$$= P(C_1 \text{ funziona}) + P(C_2 \text{ funz.}) + P(C_3 \text{ funz.})$$



X conta il # di componenti funzionanti

Metodo degli indicatori: Se VA $X = I_{A_1} + \dots + I_{A_n}$ conta quanti degli eventi avvergono tra $\{A_1, \dots, A_n\}$ e

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_n]$$

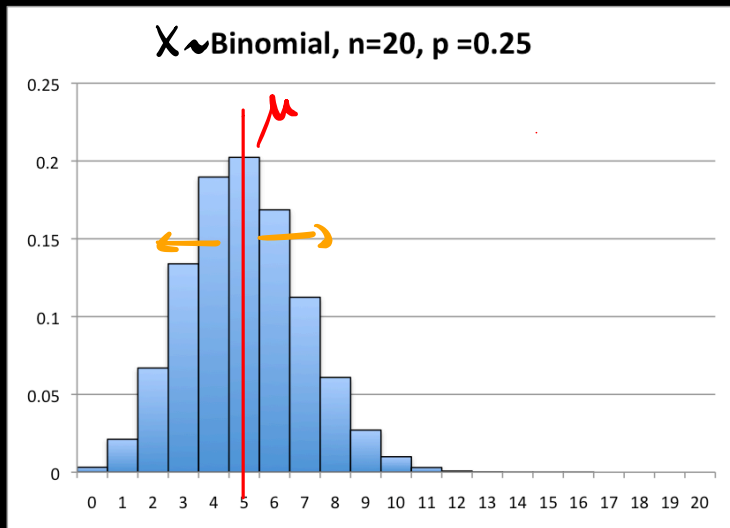
Esempio: Compito in una classe di n persone ridato a caso

$\mathbb{E}(\# \text{ persone che ricevono il proprio compito})$.

$$X = I_1 + I_2 + \dots + I_n \quad I_j = \begin{cases} 1 & \text{se la } j\text{-esima persona riceve} \\ & \text{il proprio compito.} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(I_1 + I_2 + \dots + I_n) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(I_j) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(\textit{j-esima pers. riceve il compito}) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \end{aligned}$$

Varianza e deviazione standard



Quanto è disperso la f.d.m. di X ?

$$\mu = E(X)$$

Consideriamo $(X - \mu)$

$$\begin{aligned} E(X - \mu) &= E(X + (-\mu)) = E(X) + E(-\mu) \\ &= E(X) - \mu = 0 \end{aligned}$$

$$E((X - \mu)^2) = \sum_{x \in \text{range}(X)} (x - \mu)^2 P(X=x) \quad \hookrightarrow \text{varianza}$$

La varianza di X (notazione: $\text{Var}(X)$) è

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in \text{range}(X)} (x - \mu)^2 P(X=x) \quad (\mu = E[X])$$

La deviazione standard è la radice quadrata della varianza

$$\text{SD}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

→ descrive la dispersione di X attorno alla sua media.

Esempio: X il lancio di un dado. $E(X) = \mu = 3.5$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E((X - \mu)^2) = \sum_{x=1}^6 (x - \mu)^2 \cdot P(X=x) \\ &= (1 - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + (6 - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} = 2.91. \end{aligned}$$

Nota: $\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2) = E(\underline{X^2} - \underline{2X\mu} + \underline{\mu^2})$ $\mu = E(X)$

$$= E(X^2) + E(\underline{-2\mu \cdot X}) + E(\mu^2)$$

$$\begin{aligned}
 &= E(X^2) - 2\mu \cdot \underline{\underline{E(X)}} + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 = \\
 &= \underline{\underline{E(X^2) - E(X)^2}} \quad \underline{\underline{x \text{ esclusi}}}
 \end{aligned}$$

Nota: $Var(X) = \sum_x (\mu - x)^2 P(X=x) \geq 0$

Siccome $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$\implies E(X^2) \geq E(X)^2 \implies E(X^2) \neq E(X)^2$$

Esempio: $I_A = \begin{cases} 1 & \text{x vale A} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$E(I_A) = P(A) = p.$$

$$I_A^2 = \begin{cases} 1^2 & \text{se } A \\ 0^2 & \text{se } \neg A \end{cases} = I_A$$

$$E(I_A^2) = E(I_A) = p$$

$$\implies Var(I_A) = E(I_A^2) - E(I_A)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$