

Richiamo

variabile aleatoria

$$P(X \in B) = 0.7$$

$$B \subseteq \text{range}(X)$$

insieme delle immagini

funzione di massa

funzione di massa

$$P(X \in B) = \sum_{x \in B} P(X = x) = \sum_{x \in B} p_X(x)$$

Es. (Bernoulli): $I \sim \text{Ber}(p)$: $\text{range}(I) = \{0, 1\}$

$$P(I = 1) = p$$

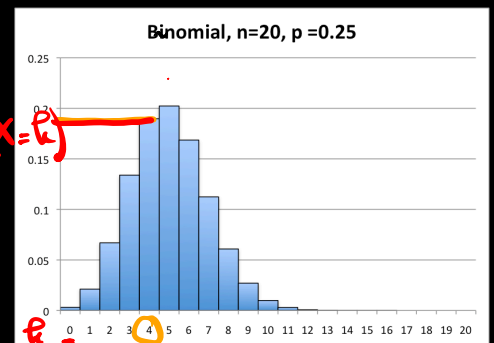
Es. (Binomiale) $X \sim \text{Bin}(n, p)$ $\text{range}(X) = \{0, \dots, n\}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Es. (Geometrico): $X \sim \text{Geom}(p)$

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$$

$$\text{range}(X) = \{1, 2, \dots\}$$



Copie di variabili aleatorie

Esempio*: peschiamo senza reinserimento da una scatola
con biglietti $\{1, 2, 3\}$ Definiamo $\begin{cases} X & \text{numero sul primo} \\ & \text{bigliettino} \\ Y & \text{il numero sul secondo} \end{cases}$

$X \backslash Y$	1	2	3	$P(Y)$
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
$P(X)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

$$P(X=1, Y=1) = 0$$

$$P(X=1, Y=2) = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

$$P(Y=1) = 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

In generale: la f.d.m. congiunta di due VA X, Y è definita da

$$\begin{aligned} P_{XY}(x, y) &= P[X=x, Y=y] \\ &= P[(X, Y) = (x, y)] \end{aligned}$$

$$\text{per } \begin{cases} x \in \text{range}(X) \\ y \in \text{range}(Y) \end{cases}$$

Si calcola la f.d.m. di X come segue

sommiamo sui
valori di X

$$\underbrace{P[Y=y]}_{\text{marginale}} = \sum_{x \in \text{range}(X)} P[X=x, Y=y]$$

$\Rightarrow$ f.d.m. congiunta di
informazione su X, Y
e come X, Y sono correlate

Esempio*: Calcolo con ricollocamento.

$$\begin{aligned} P(X=1, Y=1) &= P(X=1) \cdot P(Y=1) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= P(Y=1, X=1) + P(Y=1, X=2) \\ &\quad + P(Y=1, X=3) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Applicazioni

- $P(X=Y) = \sum_{x \in \text{range}(X)} P(X=x, Y=x)$

Esempio*: $P(X=Y) = P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=3) = 0$

- $P(X > Y) = \sum_{(x,y): x > y} P(X=x, Y=y)$

Esempio*: $P(X > Y) = P(X=2, Y=1) + P(X=3, Y=1) + P(X=3, Y=2) = \frac{1}{2}$

- $P(g(X, Y) = z) = \sum_{(x,y): g(x,y)=z} P(X=x, Y=y)$

Esempio*: $P(X+Y=5) = P(X=3, Y=2) + P(X=2, Y=3) = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

⚠ due VA con la stessa legge (fdm) non sono la stessa VA

Esempio*: $P(X=1) = \frac{1}{3} = P(Y=1)$ ma $P(X=Y) = 0$

Def: X, Y sono la stessa VA se $P(X=Y) = 1$

Indipendenza di VA

Richiamo: (Eventi): $E \perp F$ se $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$

$$E = \{X=x\} \quad F = \{Y=y\}$$

Def: Due VA sono indipendenti ($X \perp Y$) se

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y) \quad \text{per ogni } \begin{matrix} x \in \text{range } X \\ y \in \text{range } Y \end{matrix}$$

Esempio*: • (senza ricollocaimento).

$$P(X=1, Y=1) = 0 \quad P(X=1) \cdot P(Y=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$\Rightarrow$ non sono indipendenti

• (con ricollocaimento)

$$P(X=1, Y=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \quad P(X=1) \cdot P(Y=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

(... verificando per tutte le coppie (x, y))

$\Rightarrow$ sono indipendenti

Più di due VA

Si consideri un insieme di n VA (discrete) $\{X_1, \dots, X_n\}$

Def: La funzione congiunta di $X_1, \dots, X_n$ si scrive

$$P(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \quad \text{per } x_i \in \text{range}(X_i)$$

Esempio: Peschiamo 3 biglietti da una scatola con $\{1, 2, \dots, 10\}$ con ricollocaimento.

(**)

$$P(X_1 = 7, X_2 = 4, X_3 = 3) = P(X_1 = 7) \cdot P(X_2 = 4) \cdot P(X_3 = 3) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} =$$

Def: Le VA $X_1, \dots, X_n$ sono (mutualmente) indipendenti se $= \frac{1}{10^3}$

$$P\left(\bigcap_{j \in J} \{X_j = x_j\}\right) = \prod_{j \in J} P(X_j = x_j) \quad \begin{array}{l} \text{per ogni } J \subseteq \{1, \dots, n\} \\ \text{ed ogni } x_j \in \text{range}(X_j) \end{array}$$

Esempio: in (**) $\{X_j\}_{j=1}^3$ sono VA indep.

Conseguenze dell'indipendenza mutuale

- ogni sottoinsieme di VA mut. indipendenti sono mut. indipendenti

$$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, \dots, X_n = x_n] = P[X_1 = x_1, X_2 = x_2] \cdot P[X_3 = x_3, \dots, X_n = x_n]$$

- ogni funzione di VA indipendenti è indipendente dalle altre VA

$$P[f_1(X_1) = z_1, \dots, f_n(X_n) = z_n] = \prod_{i=1}^n P[f_i(X_i) = z_i]$$

$$\Rightarrow P[f_1(X_1, X_2) = z_1, f_2(X_3, X_4) = z_2, \dots] = P[f_1(X_1, X_2) = z_1] \cdot P[f_2(X_3, X_4) = z_2] \dots$$

$$\underline{Es^*}: P(X_1 + X_2 = 10, X_3 = 5) = P(X_1 + X_2 = 10) \cdot P(X_3 = 5)$$

4.4 Valore Atteso

Esempio: lancio una moneta, se ottengo T vinco 1€ se ottengo croce perdo 1€. Quanti soldi mi aspetto di guadagnare?

$$X = \{-1, 1\} \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot (+1) = 0$$

Def: il Valore Atteso di una VA X è la media della sua f.d.m.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \text{range}(X)} x \cdot P(X=x)$$

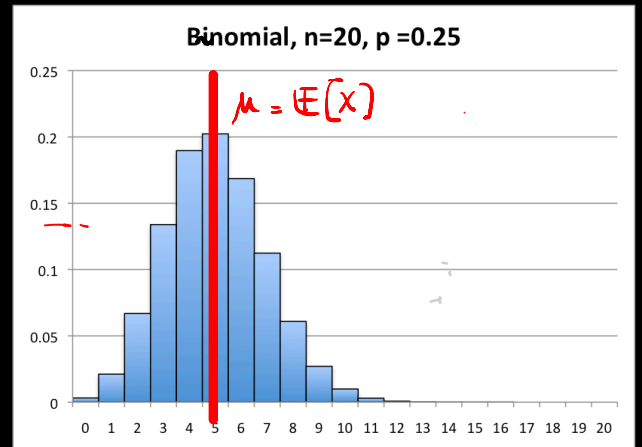
Interpretazione $\mathbb{E}(X)$ è la media sul lungo termine del valore di X ripetendo l'esperimento che "genera" X tante volte

E₂: X = risultato lancio di un dado

$$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

E₃: $Y \sim \text{Ber}(p)$ $Y \in \{0, 1\}$ $P(Y=1) = p$

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$



E₄: $Z \sim \text{Bin}(3, \frac{1}{3})$ $\text{range}(Z) = \{0, 1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= 0 \cdot \binom{3}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 + 1 \cdot \binom{3}{1} \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \binom{3}{2} \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^1 \\ &\quad + 3 \cdot \binom{3}{3} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^0 = 1 = n \cdot p \end{aligned}$$