

Indipendenza

Due eventi sono indipendenti se uno non influenza l'altro.

Esempio: Lanciamo una moneta 2 volte.

$E = \{1^{\circ} \text{ lancio è T}\}$, $F = \{2^{\circ} \text{ lancio è C}\}$, $G = \{\text{ottengo TT}\}$.

E è indipendente da F ($E \perp F$) $P(F|E) = P(F)$

G è dipendente da F ($G \not\perp F$) $P(G|F) = 0 \neq \frac{1}{4} = P(G)$

Def: Due eventi $E, F \subseteq S$ sono indipendenti ($E \perp F$) se

$$P(E|F) = P(E|F^c) = P(E)$$

o, equivalentemente, se

F non dà informazione sul fatto che E succeda

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$$

⚠ questo vale solo se $E \perp F$

In generale

$$P(E \cap F) = P(E|F)P(F) \xrightarrow[\substack{\text{se } E \perp F \\ P(E|F) = P(E)}}{P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)}$$

Esempio: Lanciamo un dado due volte.

$E = \{1^{\circ} \text{ lancio è pari}\}$, $F = \{\text{somma è } 7\}$, $G = \{\text{entrambi pari}\}$

$$\begin{aligned}
 & \bigcup P(E \cap F) = P(\{(2,5), (4,3), (6,1)\}) = \frac{|E \cap F|}{|S|} = \frac{3}{6 \cdot 6} = \frac{1}{12} \\
 & \bigcup P(E) \cdot P(F) = \frac{1}{2} \cdot P(\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{12} \\
 & \Rightarrow E \perp F
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bigcup P(E \cap G) = P(G) = \frac{|G|}{|S|} = \frac{3 \cdot 3}{6 \cdot 6} = \frac{1}{4} \\
 & \bigcup P(E) \cdot P(G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} \Rightarrow E \not\perp G
 \end{aligned}$$

Questa definizione si può estendere ad eventi E, F, G

$$P(G|F), P(G|E, F) = P(G|E, F^c) = P(G|E^c, F) = P(G|E^c, F^c) = P(G|E) = P(G)$$

Def (Indipendenza di più di due eventi)

Gli eventi $E_1, E_2, \dots, E_n$ sono mutualmente indipendenti se per ogni sottoinsieme $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$

$$P\left(\bigcap_{j \in J} E_j\right) = \prod_{j \in J} P(E_j)$$

Esempio: Lanciamo un dado 3 volte. $E_j = \{6 \text{ al } j\text{-esimo lancio}\}$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{|E_1 \cap E_2 \cap E_3|}{|S|} = \frac{1}{6^3}$$

$$P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6^3}$$

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1 \cdot 1 \cdot 6}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{6^2} = P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6^2}$$

$\Rightarrow E_1, E_2, E_3$ sono mutualmente indipendenti.

Teorema: Se E, F, G sono mutualmente indipendenti e H è un evento definito usando solo F e G allora

$$E \perp H$$

↑
operazioni
 $\cup, \cap, c$

Esempio: Lancio 3 dadi

$$\begin{aligned} P(\text{fare 6 solo al primo lancio}) &= P(E_1 \cap \underbrace{(E_2^c \cap E_3^c)}) \\ &= P(E_1) \cdot P(E_2^c \cap E_3^c) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 6}\right) = \frac{25}{216} \stackrel{H}{\approx} 12\% \end{aligned}$$

⚠️ eventi possono essere indipendenti a coppie ma non mutualmente indipendenti

Esempio: lanciamo due dadi

{	$E = \{\text{somma è 7}\}$
	$F = \{\text{il primo è pari}\}$
	$G = \{\text{il secondo è pari}\}$

Sappiamo $E \perp F$, $E \perp G$, $F \perp G$

ma. $P(E \cap F \cap G) = P(\emptyset) = 0$

$$P(E) \cdot P(F) \cdot P(G) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \neq 0$$

$\Rightarrow E, F, G$ non
sono 'mutualm.
indipendenti'.

Esempio: Lancio un dado fino a che ottengo 6.

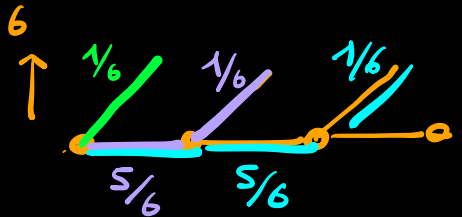
$$\underline{P(1 tentativo)} = \frac{1}{6}$$

$$\underline{P(2 tentativo)} = P(\text{non 6 al primo} \cap \text{fare 6 al secondo})$$

$$= P(\text{non 6 al primo}) \cdot P(\text{fare 6 al secondo})$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

$$\underline{P(3 \text{ tentativo})} = P(\text{non 6 al primo}) \cdot P(\text{non 6 al secondo}) \cdot P(6 \text{ al terzo})$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$$


$$P(n\text{-esimo tentativo}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$$

Se la probabilità di successo a ogni tentativo è p

$$P(\text{primo successo all}'n\text{-esimo tentativo}) = (1-p)^{n-1} \cdot p$$

Def: per una sequenza di prove indipendenti con proba di successo p

$$P(\text{primo successo avviene alla } k\text{-esima prova}) = p(1-p)^{k-1}$$

(distribuzione geometrica)

Esempio: n prove indipendenti e ripetute con

probabilità di successo $p = \frac{1}{6}$

(0 = fallimento, 1 = successo)

$$S = \{0, 1\}^n = \{(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n), (0, 0, \dots, 1), \dots, (1, 1, 1, \dots, 1)\}$$

$$\begin{aligned}
 P(0 \text{ successi}) &= P(\text{non 6 al primo} \wedge \dots \wedge \text{non 6 all' } n\text{-esimo}) \\
 &= P(\text{non 6 al primo}) \cdot P(\text{non 6 secondo}) \dots P(\text{non 6 all' } n\text{-esimo}) \\
 &= \underbrace{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{5}{6}}_{n \text{ volte}} = \left(\frac{5}{6}\right)^n = \underbrace{(1-p)}_{P \text{ fallimento}}^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(1 \text{ successo su } n \text{ prove}) &= P((1, 0, 0, \dots, 0)) + P((0, 1, 0, \dots, 0)) \\
 &\quad + \dots + P((0, \dots, 0, 1))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{p(1-p) \dots (1-p)}_{p(1-p)^{n-1}} + (1-p) \cdot p(1-p) \dots (1-p) \\
 &\quad p(1-p)^{n-1} \dots + (1-p) \dots (1-p)p = n p(1-p)^{n-1}
 \end{aligned}$$

Δ osserviamo che la P di ogni esito con 1 successo e $n-1$ fallimenti è la stessa $\rightarrow p(1-p)^{n-1}$

$$\begin{aligned}
 k=2 \quad p_2 &= P((1, 1, 0, \dots, 0)) = p \cdot p \cdot (1-p) \dots (1-p) = p^2(1-p)^{n-2} \\
 &= P((0, \dots, 0, 1, 1))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(2 \text{ successi}) &= \sum_{\substack{\text{configurazioni} \\ \text{di 2 successi}}} p_2 = (\# \text{ conf. di 2 successi in } n \text{ tent.}) \cdot p_2 \\
 &= \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2}
 \end{aligned}$$

$$k \text{ successi generico: } p_k = P(\underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_k, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-k}) = p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(k \text{ successi}) = \sum_{\substack{\text{conf di } k \\ \text{successi su} \\ n \text{ tentativi}}} P_k = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

Def: per una sequenza di n prove indipendenti con proba di successo p

$$P(k \text{ successi}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

(distribuzione binomiale)

Esempio: $p = \frac{1}{6}$ $n = 10$ lancio un dado 10 volte

$$P(k=2 \text{ volte 6 su 10 tentativi}) = \binom{10}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{10-2}$$

$k=2$

$= 29\%$

$P(\text{fare 6 per la prima volta al 10° lancio})$

$$= \left(1 - \frac{1}{6}\right)^9 \cdot \frac{1}{6} = 0.032 = 3.2\%$$