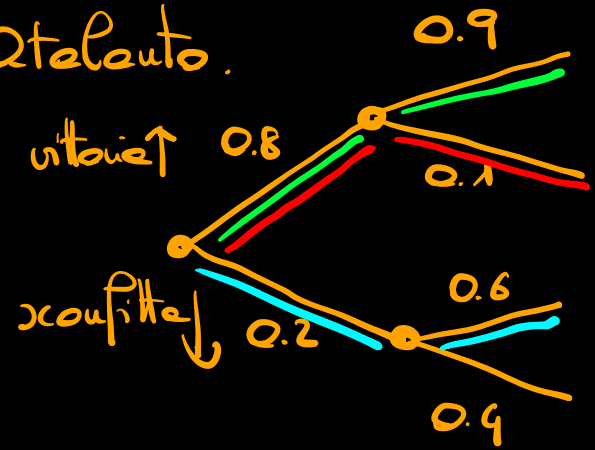


Esempio: 2 partite dell'Qstaleuto.

$$P(2 \text{ vittorie}) = P(\text{vitt}1 \cap \text{vitt}2)$$

$$= P(\text{vitt}1) \cdot P(\text{vitt}2 | \text{vitt}1)$$

$$= 0.9 \cdot 0.8 = 0.72$$



$$P(1 \text{ vittoria}) = P(\text{vitt}1 \cap \text{scouf}2) \cup (\text{scouf}1 \cap \text{vitt}2)$$

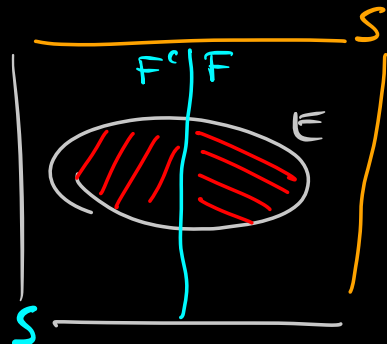
disgiunti $\Rightarrow P(\text{vitt}1 \cap \text{scouf}2) + P(\text{scouf}1 \cap \text{vitt}2)$

$$= P(\text{vitt}1) \cdot P(\text{scouf}2 | \text{vitt}1) + P(\text{scouf}1) \cdot P(\text{vitt}2 | \text{scouf}1)$$

$$= 0.9 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.6$$

Possono calcolare $P(E)$ partizionando S e calcolando una "media pesata"

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c) \quad F \cup F^c = S$$



$$\Rightarrow P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$$

$$= P(E | F) P(F) + P(E | F^c) P(F^c)$$

Esempio: Compagnie di assicurazione

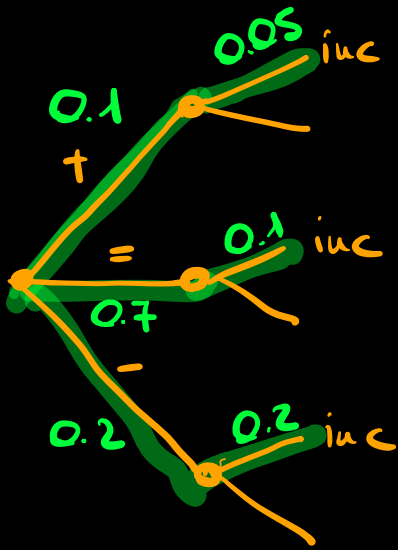
Tre attitudini alle guide

buone (+): $P(\text{inc} | +) = 0.05$

$P(+) = 0.1$

medio (=): $P(\text{inc} | =) = 0.1$ $P(=) = 0.7$

male (-) $P(\text{inc} | -) = 0.2$ $P(-) = 0.2$



$$\begin{aligned} P(\text{inc}) &= \\ &= P(+ \cap \text{inc}) + P(= \cap \text{inc}) + P(- \cap \text{inc}) \\ &= P(+).P(\text{inc} | +) + P(=).P(\text{inc} | =) \\ &\quad + P(-).P(\text{inc} | -) \\ &= 0.1 \cdot 0.05 + 0.7 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.2 \\ &= 0.155 \end{aligned}$$

Più generalmente:

Def: $F_1, \dots, F_n$ sono una partizione di S se

$$\bigcup_{j=1}^n F_j = S \quad F_j \cap F_i = \emptyset \text{ se } i \neq j$$

Per qualsiasi partizione $F_1, \dots, F_n$ di S

$$P(E) = P(E | F_1)P(F_1) + \dots + P(E | F_n)P(F_n)$$

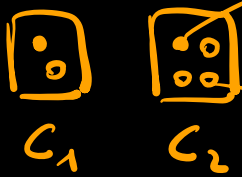
(formula di disintegrazione).

"Procedimento per esercizi"

- scrivere il diagramma ad albero (bocchi = F_j)
- assegnare $P(F_j)$
- identificare i bocci che portano ad E
- sommare P totale di ogni boccia (prodotto per

sul traccio)

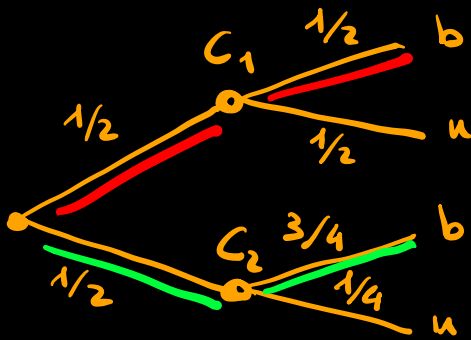
3.6 Formule di Bayes

Esempio:  nere (n)
bianche (b)

Scegliamo contenitore a caso e pesciamo una biglia a caso

$$P(b|C_2) = \frac{3}{4}$$

$$P(C_2|b) = \frac{P(C_2 \cap b)}{P(b)} = \frac{3/8}{5/8} = \frac{3}{5}$$



$$P(C_2 \cap b) = P(C_2) \cdot P(b|C_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$P(b) = P(C_2) \cdot P(b|C_2) + P(C_1) \cdot P(b|C_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

$$P(C_2|b) = \frac{P(C_2 \cap b)}{P(b)} = \frac{P(C_2) \cdot P(b|C_2)}{P(b)}$$

↑ cause ↑ effetto

$$= \frac{P(C_2) \cdot P(b|C_2)}{P(C_1) \cdot P(b|C_1) + P(C_2) \cdot P(b|C_2)}$$

effetto/osservazione causa/stato del sistema

⇒ Abbiamo trasformato $P(b|C_i)$ in $P(C_i|b)$
facile difficile

Per farlo abbiamo usato la relazione seguente:

$$P(F|E) \cdot P(E) = P(F \cap E) = P(E \cap F) = P(E|F) P(F)$$

$$\Rightarrow P(F|E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E)}$$

Formule di Bayes:

$$P(F|E) = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E)}$$

Dove $P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|F')P(F') > 0$

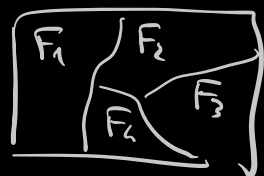
Esempio: test malattie $\begin{cases} P(\text{positivo}(+) | \text{malato}(m)) = 0.95 \\ P(\text{positivo}(+) | \text{non}(s)) = 0.02 \end{cases}$

Se scegliamo una persona a caso $P(\text{malato}(m)) = 0.01$

$$P(m|+) = \frac{P(+|m) \cdot P(m)}{P(+)} = \frac{0.95 \cdot 0.01}{x} = \underline{\underline{0.32}}$$

$$\begin{aligned} P(+) &= P(+|m) \cdot P(m) + P(+|s) \cdot P(s) = \\ &= 0.95 \cdot 0.01 + 0.02 \cdot (1 - 0.01) = x \end{aligned}$$

Più in generale:

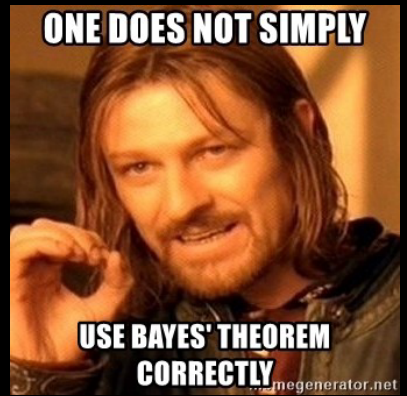


Richiamo: per una partizione $F_1, \dots, F_n$ di S

$$P(E) = P(E|F_1)P(F_1) + \dots + P(E|F_n)P(F_n)$$

Formule di Bayes (Generale)

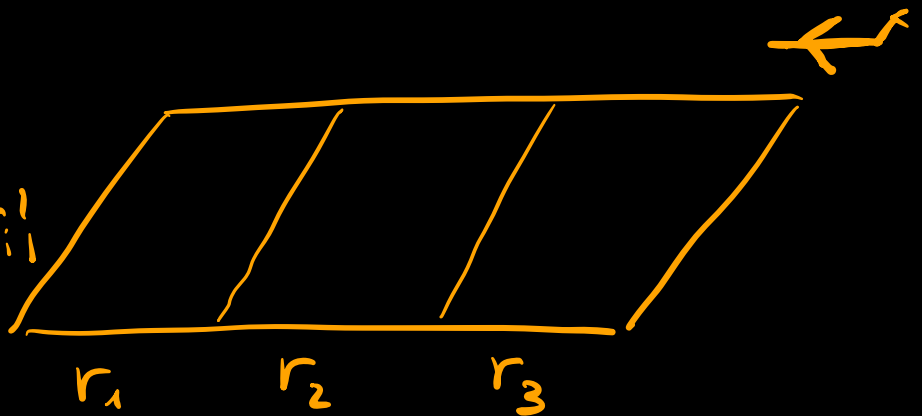
$$P(F_j | E) = \frac{P(E | F_j) P(F_j)}{P(E)}$$



$$\text{Dove } P(E) = P(E | F_1) P(F_1) + \dots + P(E | F_n) P(F_n)$$

Esempio:

$R_i = \{\text{l'aereo è in } r_i\}$



$P(\text{non si trova l'aereo cercando in } r_i | R_i) = \alpha_i$

$E_1 = \{\text{la ricerca nella zona 1 non ha successo}\}$

$$\begin{aligned} P(R_1 | E_1) &= \frac{P(E_1 | R_1) P(R_1)}{P(E_1)} \\ &= \frac{P(E_1 | R_1) \cdot P(R_1)}{P(E_1 | R_1) P(R_1) + P(E_1 | R_2) P(R_2) + P(E_1 | R_3) P(R_3)} \\ &= \frac{\alpha_1 \cdot \frac{1}{3}}{\alpha_1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2} \end{aligned}$$