

Richiamo:

$$P(E) = 0.7 \quad E \subseteq S$$

A1) (...)

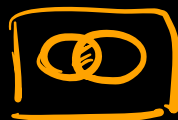
A2) (...)

A3) $E_1 \cap E_2 = \emptyset \implies P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

$$\implies P(E^c) = 1 - P(E)$$



$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$



anche se $E \cap F \neq \emptyset$

Mel caso di esiti ugualmente probabili: $P(E) = \frac{|E|}{|S|}$

Esperimenti ripetuti (modto) # esiti primo esp

numero di esiti = $n_1 \cdot n_2 \dots \cdot n_m$ # esiti m-esimo esp.

Esempio: pesca in una scatola con 6 palline numerate
con 4 palline nere e 2 bianche

- Se pesca 3 volte con reinserimento:

$$|S| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$$

$$|E| = |\{\text{pesca tre palline } \textcolor{red}{\text{nere}}\}| = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$

$$\implies P(\{\text{pesca 3 palline } \textcolor{red}{\text{nere}}\}) = \frac{4^3}{6^3}$$

- Se pesca senza reinserimento

$$|S| = 6 \cdot 5 \cdot 4$$

$$|E| = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4}$$

Coefficiente binomiale

$$(1, 2, 3) \neq (3, 2, 1)$$

Prima: quante liste di 3 libri si possono fare da una scatola da 5? $\rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 = \frac{5!}{(5-3)!}$

Ora: Se non ci interessa l'ordine, quanti gruppi di 3 libri posso fare?

$\rightarrow$ dobbiamo dividere il numero di liste per il numero di liste che corrispondono allo stesso gruppo

$$(\# \text{ liste}) = (\# \text{ gruppi}) \cdot (\# \text{ liste per ogni gruppo})$$

$$\Rightarrow (\# \text{ gruppi}) = \frac{(\# \text{ liste})}{(\# \text{ liste per gruppo})}$$

$$\Rightarrow \# \text{ gruppi} = \frac{60}{3!} = 10 = \frac{5!}{(5-3)!} \cdot \frac{1}{3!}$$

In generale: Il # di modi di scegliere r elementi tra n possibili scelte (senza contare ordine)

$$\left(\begin{array}{l} \# \text{ liste ordinate di } r \\ \text{elementi scelti tra } n \end{array} \right) / \left(\begin{array}{l} \# \text{ liste equivalenti} \\ \text{che contengono} \\ \text{gli stessi el. in} \\ \text{ordine diverso} \end{array} \right)$$

$$= u \cdot (u-1) \cdot (u-2) \dots (u-r+1) \cdot \frac{1}{r!}$$

$$= \frac{u(u-1) \dots (u-r+1)(u-r)(u-r-1) \dots 2 \cdot 1}{(u-r)(u-r-1) \dots 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{r!}$$

$$= \frac{u!}{(u-r)! r!} = \binom{u}{r} \rightarrow \text{coefficiente binomiale}$$

Def. per $u \in \mathbb{N}$, $r \leq u$, $r \in \mathbb{N}$ definiamo

$$\binom{u}{r} = \frac{u!}{(u-r)! r!}$$

→ conta i modi di scegliere gruppi non ordinati di r elementi tra u elementi

$$\Delta r=0 \Rightarrow \binom{u}{0} = 1 = \binom{u}{u}$$

Esempio: $\binom{8}{5} = \# \text{gruppi di 5 persone in insieme di 8 persone.}$

Esempio: Comitato di 5 persone in un gruppo di 6 uomini e 9 donne (= 15 pers).

$$|S| = \binom{15}{5} = \# \text{comitati possibili}$$

$E = \{ \text{comitato contiene 3 uomini e 2 donne} \}$.

$$P(E) = |E| / |S|$$

$$|E| = (\# \text{ modi di scegliere le 2 donne}) \cdot (\# \text{ modi 3 uomini})$$

$$= \binom{9}{2} \cdot \binom{6}{3}$$

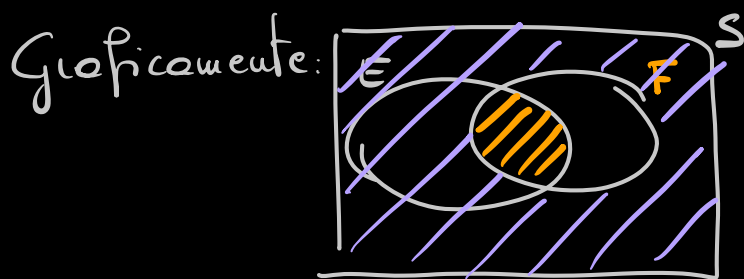
$$\Rightarrow P(E) = \frac{\binom{9}{2} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001} \approx 23\%$$

3.6 Probabilità condizionale

Esempio: Peschiamo due palline da una scatola che ne contiene 3 (di cui una nera e due bianche)
 $P(\text{seconda pallina estratta sia nero})$ dipende dal colore della prima

- se la prima è bianca $P(\text{seconda nero} \mid \text{prima bianca}) = \frac{1}{2}$
- se la prima è nera $P(\underbrace{\text{seconda nero}}_E \mid \underbrace{\text{prima nera}}_F) = 0$

Def: La probabilità condizionale di E dato F è la probabilità dell'evento E dato che succede F .



$$P(E|F) = \frac{\text{"peso"}(E \cap F)}{\text{"peso"}(F)} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

→ F gioca il ruolo di S .

• Se tutti gli esiti in S sono ugualmente probabili

$$P(E|F) = \frac{\#(E \cap F) / \cancel{\#(S)}}{\#(F) / \cancel{\#(S)}} = \frac{|E \cap F|}{|F|}$$

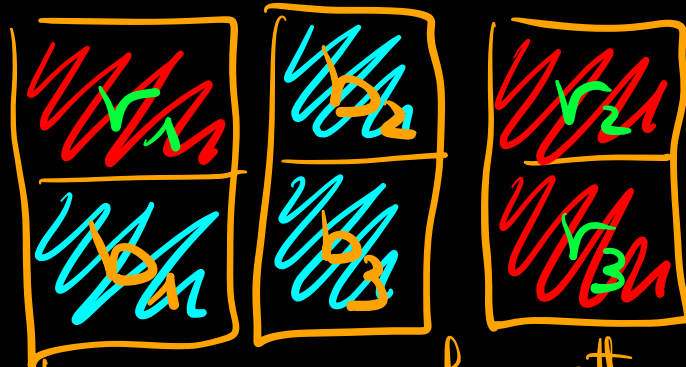
Esempio: $P(\text{seconda nera} \mid \text{prima nera}) =$

$$= \frac{|\text{seconda nera e prima nera}|}{|\text{prima nera}|} = \frac{0}{2} = 0$$

Formula generale per la probabilità condizionata:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \quad \text{se } P(F) > 0$$

Esempio: Un cappello contiene 3 carte colorate:



pesco una carta a caso e la metto sul tavolo:

$$\begin{aligned} P(\text{rosso sulle facce nascoste} \mid \text{blu sulle visibili}) &= \\ &= \frac{P(\text{rosso nascosto} \cap \text{blu visibile})}{P(\text{blu visibile})} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Invertendo la formula per la probabilità condizionata

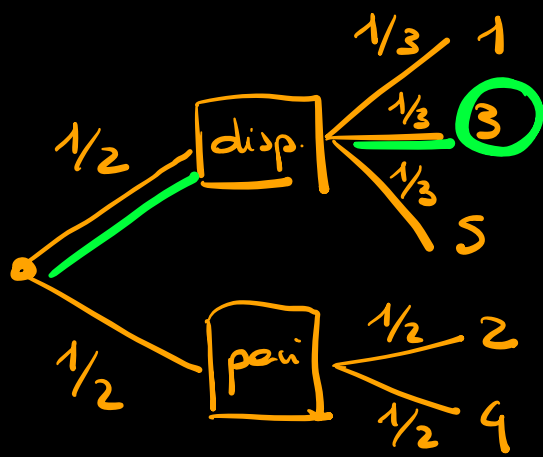
$$P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F)$$



Fun statistical fact: Cows are about 300 times more likely to kill you than coyotes.

Minor sidenote to statistical fact: If it was common for people to keep several hundred coyotes on their property and routinely chase them into a corral and handle them, this statistic would be different.

Esempio: 2 contenitori (pari e dispari) contengono $\{2, 4\}$ e $\{1, 3, 5\}$ lanciamo una moneta. $\begin{cases} T \rightarrow \text{dispari} \\ C \rightarrow \text{pari} \end{cases}$



$$\begin{aligned}
 P(3) &= P(3 \text{ e pescare disp.}) \\
 &= P(\text{pesc. disp.}) \cdot P(3 | \text{pesc. disp.}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

In un diagramma ad albero gli esiti totali sono rappresentati sui nodi e le probabilità condizionali sono indicate su ogni arco:

$P[\text{esito} / \text{evento}]$ = prodotto delle probabilità condizionali sugli archi.

Example (tree diagrams)

Possiamo calcolare $P(E)$ partizionando S e collocando una "media pesata

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap F')$$

