

Richiamo: una domanda sulla probabilità deve contenere

- un esperimento.
- uno spazio degli esiti S
- un evento di interesse $E \subseteq S$
- una funzione di probabilità (distribuzione)

$$P(E) = 0.7 \quad E \subseteq S$$

Esempio: lancio di un dado $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$E = \{\text{"essere pari"}\} = \{2, 4, 6\} \quad P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{1}{2}$$

Operazioni su insiemi/eventi $E, F \subseteq S$

- Elementi sia in E sia in F (AND)

$E \cap F$ (intersezione)



- Elementi in E oppure in F (OR)

$E \cup F$ (unione)



- Elementi non in E (NOT)

E^c (complemento)



Esempio

$$E = \{2, 4, 6\}$$

$$F = \{5, 6\}$$

$$E \cap F = \{6\}$$

$$E \cup F = \{2, 4, 5, 6\}$$

$$E^c = \{1, 3, 5\}$$

Per una lista di insiemi $E_1, E_2, \dots, E_n$

$$\bullet E_1 \cup E_2 \cup E_3 \dots \cup E_n = \bigcup_{j=1}^n E_j$$

$$\bullet E_1 \cap E_2 \cap E_3 \dots \cap E_n = \bigcap_{j=1}^n E_j$$

Assiomi di Probabilità (definizione di P)

$$P(E) = 0.7 \quad E \subseteq S$$

P è il "peso" (livello di sicurezza) dell'evento/insieme E

Condizioni (assiomi) su P .

A1) $0 \leq P(E) \leq 1$ per qualsiasi evento $E \subseteq S$

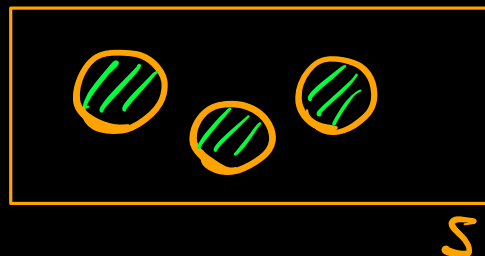
Esempio: $P(\{3\}) = \frac{1}{6}$

A2) $P(S) = 1$ dove S è l'insieme/spazio degli esiti.

Esempio: $P(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 1$

A3) Se $E \cap F = \emptyset$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$



Esempio: $P(\{2\} \cup \{4\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Più generalmente

Esempio: $P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

A3') per ogni lista $E_1, \dots, E_n$ di insiemi disgiunti (cioè tali che $E_j \cap E_k = \emptyset$ per ogni $j \neq k$)

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n E_j\right) = \sum_{j=1}^n P(E_j)$$

Def: Una distribuzione o funzione di probabilità trasforma eventi (E) in un numero tra 0 e 1 soddisfacendo A1), A2), A3')

Esempio lancio di una moneta. $P(\{T\}) = P(\{C\}) = \frac{1}{2}$

$$S = \{T, C\}$$

A1) $P(\{T\}) = \frac{1}{2}$, $P(\{C\}) = \frac{1}{2} \in [0, 1]$ ✓

A2) $P(\{T\} \cup \{C\}) \stackrel{A3')}{=} P(\{T\}) + P(\{C\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

consistente con gli assiomi

Esempio (eventi ugualmente probabili)

$$S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

$$P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \dots = P(\{e_n\}) = p = \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} 1 \stackrel{A2)}{=} P(S) &= P(\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \dots \cup \{e_n\}) \stackrel{A3')}{=} \sum_{j=1}^n P(\{e_j\}) \\ &= n \cdot p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{per qualsiasi } E = \bigcup_{e \in E} \{e\}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{A3')}{\Rightarrow} P(E) &= P\left(\bigcup_{e \in E} \{e\}\right) = \sum_{e \in E} P(\{e\}) = \sum_{e \in E} \frac{1}{n} \\ &= \frac{|E|}{n} = \frac{|E|}{|S|} \in [0, 1] \end{aligned}$$

Tutti, conseguenze degli assiomi

Regole del complemento.

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

Esempio: $P(\{2, 3, 4, 5, 6\}) = P(\{1\}^c) = 1 - P(\{1\}) = \frac{5}{6}$

Esempio: lancio un dado 3 volte

$P(\text{almeno un risultato sia pari})$

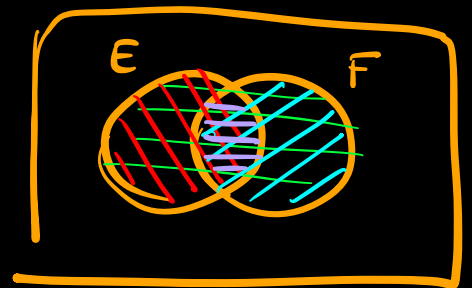
$$= P(\{\text{tutti i risultati sono dispari}\}^c)$$

$$= 1 - P(\{\text{tutti i risultati sono dispari}\}) = \dots$$

$$= \frac{7}{8}$$

Regola di inclusione-esclusione

$$\underline{P(E \cup F)} = \underline{P(E)} + \underline{P(F)} - \underline{P(E \cap F)}$$



Esempio $P(\{\text{pari}\} \cup \{\geq 3\}) = P(\{\text{pari}\}) + P(\{\geq 3\})$
 $- P(\{\text{pari}\} \cap \{\geq 3\})$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Esempio: in una città - 28% ha un gatto = G
- 7% ha un cane = C
- 5% ha un gatto e un cane = $G \cap C$

$$\begin{aligned}
 P(\text{ne un gatto ne un cane}) &= P((G \cup C)^c) \\
 &= 1 - P(G \cup C) \\
 &= 1 - (P(G) + P(C) - P(G \cap C)) \\
 &= 1 - (0.28 + 0.07 - 0.05) \\
 &= 0.7
 \end{aligned}$$

Esiti ugualmente probabili:

Richiamo: $S = \{e_1, \dots, e_n\} \rightarrow P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{|E|}{n}$

Nota: Se eseguo due esperimenti di fila, uno con n esiti possibili e il secondo con m esiti possibili allora il # totale di risultati totali è $n \cdot m$

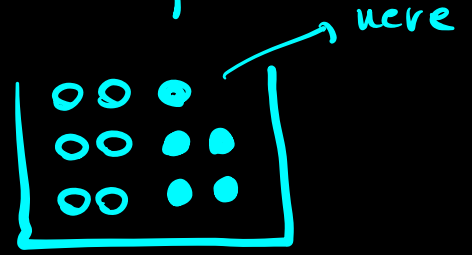
perché listiamo i risultati come (i, j) ← secondo exp.

$(1,1) (1,2) \dots (1,m)$
 $(2,1) (2,2) \dots (2,m)$
 $\vdots$
 $(n,1) (n,2) \dots (n,m)$

$\uparrow$ primo exp
 $\rightarrow n \cdot m$ risultati

Esempio: Peschiamo due palline da qui
senza reinserimento

$$\# \text{ esiti totali} = |S| = 11 \cdot 10 = 110$$



$$|E| = |\{\text{una bianca e una nera}\}| =$$

$$= |\{\text{prima bianca, poi nera}\} \cup \{\text{prima nera, poi bianca}\}| =$$

$$= |\{\text{nera, bianca}\}| + |\{\text{bianca, nera}\}| =$$

$$= 5 \cdot 6 + 6 \cdot 5 = 60$$

$$\Rightarrow P(\text{una bianca e una nera}) = \frac{60}{110} = \frac{6}{11}$$

$$|F| = |\{\text{due nere}\}| = 5 \cdot 4$$

$$\Rightarrow P(\{\text{due nere}\}) = \frac{5 \cdot 4}{110} = \frac{2}{11}$$

In generale, per una serie di ℓ esperimenti
dove

- il primo esp. può avere n_1 risultati

- per ogni risultato del primo, il secondo può avere u_2 risultati
- per ogni risultato dei primi due ci sono u_3 risultati possibili del terzo
- $\vdots$
- per ogni risultato dei primi $(m-1)$ esp. ci sono u_m risultati dell'ultima

$\Rightarrow$ numero totale di risultati possibili è

$$u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \dots u_m$$

Esempio: In quanti modi possiamo organizzare

le lettere

$$\{E, R, M, A, D\}$$

$$u_1 = 5, u_2 = 4, u_3 = 3, u_4 = 2, u_5 = 1$$

$$\Rightarrow \# \text{ esiti totali } u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 5! \\ = 120$$

$$P(\{MERAB\}) = \frac{1}{120} = \frac{|E|}{|S|}$$

⚠ In generale i modi di ordinare un insieme di n elementi diversi sono

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (1) = n!$$

Esempio (paradosso dei compleanni).

In un gruppo di n persone, calcolare

$$P(\{\text{almeno due persone abbiano lo stesso compleanno}\})$$

$$= 1 - P(\{\text{nessuno abbia lo stesso compleanno}\})$$

$$\# \text{ esiti possibili} = |S| = (365)^n$$

$$\# \text{ esiti tali che nessuno abbia lo stesso compleanno} =$$

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdots (365 - n + 1)$$

$$= \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - u + 1) (365 - u) \dots 1}{(365 - u) (365 - u - 1) \dots 1}$$

$$= \frac{365!}{(365 - u)!}$$

$$\Rightarrow P(\text{nessuno ha lo stesso compl.}) =$$

$$= \frac{|E|}{|S|} = \frac{365! / (365 - u)!}{(365)^u}$$

$$\Rightarrow P(\text{almeno due compl.}) =$$

$$= 1 - P(\text{nessuno})$$

$$= 1 - \frac{365! / (365 - u)!}{(365)^u}$$

11.

