3 Elementi di probabilità.

Esempio 1: Lanciamo una moneta $S = \{H, T\}$

la probabilità di ottenere "testa" è $1/2$

$E = \{H\}$ $\mathbb{P}[E] = \frac{1}{2} = \frac{|E|}{|S|}$

Esempio 2: Lanciamo un dado a 6 facce $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

la probabilità di ottenere un numero pari è $\frac{1}{2}$

$E = \{2, 4, 6\}$ $\mathbb{P}(E) = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{|E|}{|S|}$

Esempio 3: Peschiamo una carta da un mazzo $S = \{1\heartsuit, 2\heartsuit, \dots, K\spadesuit\}$

la probabilità di pescare una carta di cuori è $\frac{1}{4}$

$E = \{1\heartsuit, \dots K\heartsuit\}$ $\mathbb{P}(E) = \frac{1}{4} = \frac{13}{52} = \frac{|E|}{|S|}$

Negli esempi sopra troviamo:

- Un esperimento: una procedura ben definita
- Uno spazio degli esiti S: l'insieme degli esiti dell'esperimento

  Nota: rappresentato in parentesi graffe

  $|S| = \#$ elementi in S.
- Un evento E: un sottoinsieme degli esiti possibili

- Una probabilità $\mathbb{P}(E)$ dell'evento che ci interessa.

Nei casi di cui sopra, per esiti ugualmente probabili

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\#(E)}{\#(S)} = \frac{|E|}{|S|}$$

⚠ questo è vero solo se gli esiti sono ugualmente probabili.

Esempio 4: Lancio una moneta 2 volte. Qual'è la probabilità di ottenere almeno una volta testa?

$$S = \{TT, CT, TC, CC\}, \quad E = \{TT, TC, CT\}$$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{3}{4}$$

2.1 Interpretazioni

Domanda: Cosa intendiamo con $\mathbb{P}(E) = 1/2$?

1) Interpretazione frequentistica

"se lancio la moneta, a lungo andare otterrò croce circa 1/2 delle volte."

Def: la frequenza relativa di un evento E in n osservaz.

$$\mathbb{P}_n(E) = \frac{\#\text{ volte osservo un esito in } E}{n}$$

$\Rightarrow$ in questa interpretazione definiamo

$$\text{"}\mathbb{P}(E) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_n(E)\text{"}.$$ (legge dei grandi numeri)

2) Interpretazione soggettivistica

A volte non possiamo ripetere un esperimento ∞-volte

- Atalanta vince scudetto nel 2022.
- Un paziente si riprende da una malattia
- Previsioni del tempo.
- Elezioni

$\Rightarrow$ Probabilità rappresenta il grado di convinzione di un "esperto".

Ricapitolando: Vogliamo studiare espressioni del tipo

$$\boxed{\mathbb{P}(E) = 1/3 \qquad E \subseteq S}$$

$E \to$ evento

$S \to$ spazio esiti

Sviluppiamo notazione, regole di calcolo. Per farlo discutiamo gli elementi dell'espressione più in dettaglio. Cominciamo con E, S.

3.2-3 Spazio degli esiti / eventi

Esempio Lanciamo un dado a 6 facce.

Definiamo gli eventi

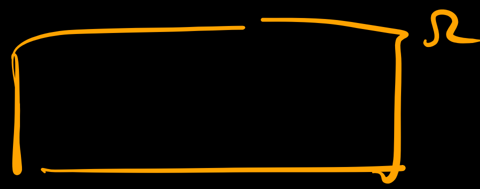
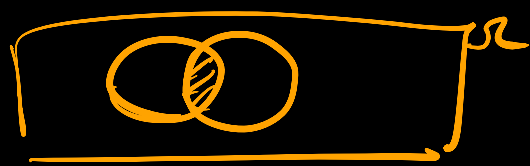
$S = \{1,2,3,4,5,6\}$ = spazio degli esiti = insieme universale

$E = \{2,4,6\}$ = evento = sottoinsieme

$F = \{1\}$, $G = \{4,6\}$

Possiamo anche usare questi eventi per definire altri:

- $E \cup F = \{2,4,6,1\}$ = (elementi di) E oppure F = unione di E,F
- $E \cap G = \{4,6\}$ = elementi di E e G = intersezione di E,G
- $E^c = \{1,3,5\}$ = elementi non in E = complemento di E

Linguaggio degli eventi	Esempio	Notazione degli insiemi	Diagramma di Venn
Spazio degli esiti	$\{1,2,3,4,5,6\}$	S (insieme universale)	
Evento E	$\{2,4,6\}$	$E \subseteq \Omega$ (sottoinsieme)	
Evento impossibile	$\{10\}$	$\{\ \}$, $\emptyset$	
non E	$\{1,3,5\}$	E^c	
E oppure F (o entrambi)	$\{1,2,4,6\}$	$E \cup F$	
(elementi di) sia E che F	$\{4,6\}$	$E \cap G$	
mutuamente esclusivi	$\{1\}$ $\{4,6\}$	$F \cap G = \emptyset$	
se G allora E	$\{4,6\}$ $\{2,4,6\}$	$G \subseteq E$