1. Calcolare approssimativamente gli integrali seguenti utilizzando il metodo Monte Carlo.

   (a) $\int_1^6 x^4 + 5x^2 + 3\, dx$

   (b) $\int_1^4 \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\, dx$

   (c) $\int_1^4 \frac{\tan^5(\log(x))}{x}\, dx$

   d) ...

   Oltre al risultato, ai comandi R utilizzati (che possono anche essere scritti a mano) si richiede di dire qualche parola di spiegazione sul metodo.

   Suggerimento per (iii): Si consideri il comando “rcauchy” in R che permette di generare un campione iid di una variabili aleatorie di Cauchy, ovvero aventi funzione di densità $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+x^2)}$.

Richiamo: $\int_a^b g(x)\,dx \approx (b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) \qquad X_i \overset{iid}{\sim} \mathrm{Unif}[a,b]$

a) $\int_{1=a}^{6=b} \underbrace{x^4+5x^2+3}_{g(x)}\,dx = (6-1)\cdot\mathbb{E}(X^4+5X^2+3) \approx 5\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^4+5X_i^2+3$

$X_i \sim \mathrm{Unif}(1,6)$

b) $\int_1^4 \underbrace{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}_{g(x)}\,dx = (4-1)\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{X^3}\right) \approx 3\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}-\frac{1}{X_i^3}$

$X_i \sim \mathrm{Unif}(1,4)$

c) $\int_1^4 \frac{\tan^5(\log(x))}{x}\,dx = (4-1)\,\mathbb{E}\left(\frac{\tan^5(\log(X))}{X}\right) =$

$\approx 3\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\tan^5(\log(X_i))}{X_i}$

$X_i \sim \mathrm{Unif}(1,4)$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}}_{f(x)}\;\underbrace{\frac{\sin(7+e^x)}{2+\log(x^2+1)}}_{g(x)}\,dx$

$X_j \sim N(0,1)$

$= \mathbb{E}\left(\frac{\sin(7+e^X)}{2+\log(X^2+1)}\right) \approx \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin(7+\exp(X_j))}{2+\log(X_j^2+1)}$

a) Lista comandi su R.

```
x = runif(10000, min = 1, max = 6)
mean(x^4 + 5*x^2 + 3) · (6-1)
```

b)
```
x = runif(10000, min = 1, max = 4)
mean(1/x - 1/x^3) · (4-1)
```

c)
```
x = runif(10000, min = 1, max = 4)
mean(tan(log(x))^5/x) · (4-1)
```

d)
```
x = rnorm(10000, mean = 0, sd = 1)
y = sin(7 + exp(x))/(2 + log(1 + x^2))
mean(y)
```

2. La forza di compressione di un carto tipo di cemento è modellizzata come una variabile aleatoria Gaussiana con valore atteso μ e varianza σ^2. L'unità di misura è il psi (pound per square inch). Si assume che la viarianza σ^2 è conosciuta e vale 1000 psi. Una media empirica di 3250 psi è stata osservata da un campione di 12 misurazioni.

   (a) Si calcoli l'intervallo di confidenza bilaterale e monolaterale al 95% per μ

   (b) Si calcoli l'intervallo di confidenza bilaterale e monolaterale al 99% per μ. Si confronti questo risultato con quello del punto precedente.

   (c) Che livello di confidenza avrebbe un intervallo di ampiezza totale 30 psi ($\mu \pm 30$ psi)

   (d) Quale è la minor ampiezza del campione necessaria (il numero di elementi nel campione) perché l'intervallo di confidenza bilaterale al 95% sia minore uguale a ± 15 psi.

IC normale z	1	1.6	2	2.3	2.5	3
unilaterale: $\mathbb{P}(Z \le z)$	0.84	—	0.977	—	—	0.999
bilaterale: $\mathbb{P}(\|Z\| \le z)$	0.68	0.9	0.954	0.98	0.99	0.997

a) $95\% = \mathbb{P}(|Z| \le 2) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{\overline{X}_{12} - \mu}{\sigma_{12}}\right| \le 2\right)$

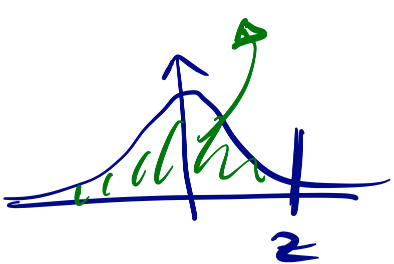
$$\begin{cases} \sigma_{12}^2 = \dfrac{\sigma^2}{12} \\ \overline{X}_{12} = 3250 \end{cases} \Rightarrow \; = \mathbb{P}\left(\left|\frac{3250 - \mu}{\sqrt{\frac{1000}{12}}}\right| \le 2\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(|3250 - \mu| \le 2 \cdot \sqrt{\frac{1000}{12}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\mu \in \left(3250 - 2 \cdot \sqrt{\frac{1000}{12}}, 3250 + 2 \cdot \sqrt{\frac{1000}{12}}\right)\right)$$

$\Rightarrow$ intervallo bilaterale

$95\% = \mathbb{P}(Z < z_{5\%}) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_{12} - \mu}{\sigma_{12}} < 1.65\right)$



$z_{5\%} = 1.65$ dalla tabella

$$= \mathbb{P}\left(\mu \geq \overline{X}_{12} - 1.65 \cdot \sigma_{12}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\mu \geq 3250 - 1.65 \cdot \sqrt{\frac{1000}{12}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\mu \in \underbrace{\left(3250 - 1.65 \cdot \sqrt{\frac{1000}{12}}, \infty\right)}_{\text{intervallo di confidenza unilaterale al } 95\%}\right).$$

b) Stessa cosa con

$z^b_{5\%} \longrightarrow z^b_{1\%} = 2.5$

$z^u_{5\%} \longrightarrow z^u_{1\%} = 2.33$.

$\longrightarrow$ l'intervallo è più grande

c) $\mathbb{P}\left(\mu \in \overline{X}_n - \cancel{15}^{30}, \overline{X}_n + \cancel{15}^{30}\right) =$

$= \mathbb{P}\left(\overline{X}_n - \mu \in \left(-\cancel{15}^{30}, \cancel{15}^{30}\right)\right) = \mathbb{P}\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| \leq \cancel{15}^{30}\right)$

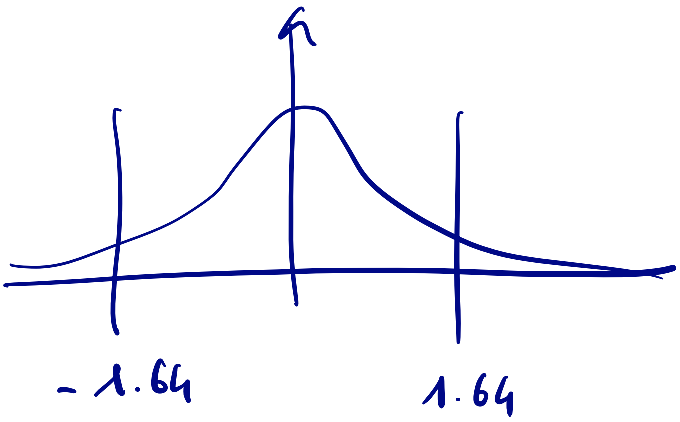
$= \mathbb{P}\left(\left|\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_n}\right| \leq \frac{\cancel{15}^{30}}{\sigma_n}\right) = \mathbb{P}\left(|Z| \leq \frac{\cancel{15}^{30}}{\sqrt{\frac{1000}{12}}}\right) =$

$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1000}{12}$$

$$= \mathbb{P}(|Z| \le \overset{3.28}{\cancel{1.64}})$$

$$= \Phi(\overset{3.28}{\cancel{1.64}}) - \Phi(-\overset{3.28}{\cancel{1.64}})$$

$$= 0.998$$



d) $95\% = \mathbb{P}(|Z| \le 2) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma_n}\right| \le 2\right)$

$z^b_{5\%} = 2$

$$= \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| \le \underline{2\sigma_n})$$

ampiezza interv. di confidenza

$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Vogliamo trovare n tale che

$$2\sigma_n \overset{!}{=} 15$$

$$\Longleftarrow \quad 2\sqrt{\frac{1000}{n}} \le 15 \quad \Longleftarrow \quad \frac{2\cdot\sqrt{1000}}{15} \le \sqrt{n}$$

$$\Longleftarrow \quad n \ge \frac{4\cdot 1000}{15^2} = 17.77$$

$$\Longrightarrow \quad n^* = 18$$

3. Uno studio sulla velocità del flusso sanguineo nelle coronarie risulta nelle seguenti osservazioni in 18 pazienti:

$$75, 77, 78, 77, 77, 72, 72, 72, 70, 71, 69, 69, 68, 66, 64, 66, 62, 61$$

Questi valori sono modellizzati come una variabile aleatoria normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dove μ è sconosciuta e $\sigma^2 = 26$.

(a) Calcolare la media empirica del campione.

(b) Trovare gli intervalli di confidenza bilaterali e monolaterali per μ al livello 0.95, 0.98, and 0.99.

(c) Quale è la minor ampiezza del campione necessaria (il numero di elementi nel campione) perché l'intervallo di confidenza bilaterale al 95% per μ sia minore uguale a 0.5?

a) $\overline{X}_{18} = 70.33$

b) Per σ^2 conosciuto, la media campionaria standardizzata

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_n} \qquad \sigma_n^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{26}{12} = 1.47$$

ha distribuzione normale standard: $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_n} \sim N(0,1)$

Quindi, trovando $z^b_{5\%} = 1.96$ $\quad z^b_{2\%} = 2.33$ $\quad z^b_{1\%} = 2.575$

$z^u_{5\%} = 1.28$ $\quad z^u_{2\%} = 2.06$ $\quad z^u_{1\%} = 2.33$

abbiamo

IC bil. 95% : $(70.33 - 1,96 \cdot 1,47 \,,\, 70,33 + 1,96 \cdot 1,47)$

IC bil 98% $(70,33 - 2,33 \cdot 1,47 \,,\, 70.33 + 2,33 \cdot 1,47)$

IC bil 99% $(70,33 - 2,575 \cdot 1,47 \,,\, 70.33 + 2,575 \cdot 1.47)$

IC unil 95% (inferiore, o di sinistra) $(-\infty \,,\, 70.33 + 1,28 \cdot 1,47)$

IC unil 98% (inferiore, o di sinistra) $(-\infty \,,\, 70.33 + 2,06 \cdot 1,47)$

IC unil 99% (inferiore, o di sinistra) $(-\infty \,,\, 70.33 + 2,33 \cdot 1,47)$

c) dobbiamo trovare n tale che l'ampiezza dell' IC bilaterale al 95% ($z^b_{5\%}\,\sigma_n = 1.96\sqrt{\frac{26}{n}}$) sia minore o uguale a 0.5:

$$1.96\sqrt{\frac{26}{n}} \le 0.5$$

$$\Longleftrightarrow \quad n \ge 26\cdot\left(\frac{1.96}{0.5}\right)^2 = 26\cdot(3.92)^2 = 399{,}5$$

$$\Longrightarrow \quad n \ge 400$$