Foglio di esercizi 7

Discussione soluzioni: 04.05.2022

1. Siano $X_1, \dots, X_5$ variabili aleatorie indipendenti con $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$ per ogni $k = 1, \dots, 4$. Determinare la legge delle variabili seguenti:
   (a) $Y_1 = X_1 + 4X_2 - X_3$.
   (b) $Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{5} X_k$
   (c) $Y_3 = -X_1 + X_2 + 3$.
2. Si consideri $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, variabile esponenziale (definita su $\mathbb{R}$) di parametro $\lambda > 0$, quindi con densità
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$
   (a) Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[X]$ e la varianza $\text{Var}(X)$.
   (b) Calcolare la funzione di ripartizione F_X di X.
3. Calcolare il valore atteso di $Y = \log X$, con X una variabile aleatoria continua avente densità
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{per } x \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
4. Sia $X \sim \text{Unif}(4, 10)$.
   (a) Calcolare $\mathbb{P}(X > 6)$.
   (b) Calcolare $\mathbb{P}(|X - 7| > 1)$.
5. Sia X una VA continua con densità
$$f_X(x) = \begin{cases} cx^{-4} & \text{se } x \geq 1; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
   (a) Si trovi il valore di c per il quale la funzione f_x è una di densità.
   (b) Trovare $\mathbb{P}(0.5 \leq X \leq 2)$.
   (c) Trovare $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4)$.
   (d) Trovare $\mathbb{P}(X \leq x)$ per ogni $x \geq 1$.
   (e) Trovare $\mathbb{E}(X)$ e $\text{Var}(X)$.
   (f) Trovare $\mathbb{E}(5X^2 + 3X)$.
6. La procedura di imbottigliamento di una certa bevanda viene fermata e ricon- trollata quando si verifica il quinto caso di imbottigliamento non conforme alle specifiche. Le anomalie nell'imbottigliamento accadono in media una volta su 1000 e la produzione totale è di 10000 bottiglie al giorno.
   (a) Qual è la probabilità che la procedura non venga interrotta per una giornata intera?
   (b) Qual è la probabilità che in un giorno la procedura subisca più di un'interruzione?

   In entrambi i casi è richiesto di indicare un'espressione esatta e un'approssimazione numerica.

1. Siano $X_1, \dots, X_5$ variabili aleatorie indipendenti con $X_k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$ per ogni $k = 1, \dots, 4$. Determinare la legge delle variabili seguenti:

   (a) $Y_1 = X_1 + 4X_2 - X_3$.

   (b) $Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{5} X_k$

   (c) $Y_3 = -X_1 + X_2 + 3$.

a) $4X_2 \sim \mathcal{N}(4\mu_2, 4^2\sigma_2^2)$

$-X_3 \sim \mathcal{N}((-1)\mu_3, (-1)^2\sigma_3^2)$

$\Longrightarrow Y_1 = X_1 + 4X_2 - X_3 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + 4\mu_2 - \mu_3, \sigma_1^2 + 4^2\sigma_2^2 + \sigma_3^2)$

b) $\hat{Y}_2 = \sum_{k=1}^{5} X_k \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2 + \sigma_5^2)$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{5} X_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{Y}_2 \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{5} \mu_k, \frac{1}{\sqrt{2}^2} \sum_{k=1}^{5} \sigma_k^2\right)$

c) $-X_1 \sim \mathcal{N}(-\mu_1, \sigma_1^2)$

$-X_1 + X_2 + 3 \sim \mathcal{N}(-\mu_1 + \mu_2 + 3, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

2. Si consideri $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, variabile esponenziale (definita su $\mathbb{R}$) di parametro $\lambda > 0$, quindi con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

(a) Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}[X]$ e la varianza $\mathrm{Var}(X)$.

(b) Calcolare la funzione di ripartizione F_X di X.

a) $$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

b) $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ e^{-\lambda x} - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

3. Calcolare il valore atteso di $Y = \log X$, con X una variabile aleatoria continua avente densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{per } x \ge 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Richiamo: $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_x(x) \, dx$

$$\mathbb{E}(g(X)) \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x) \, dx$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\log(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x) \, dx$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{1} g(x) \cdot 0 \, dx}_{0} + \int_{1}^{\infty} g(x) \frac{2}{x^3} \, dx$$

$\frac{1}{x} = y$ $\quad$ $\log(x) dx = dy$

$\frac{1}{x^3} = y^3$

$$\begin{cases} \frac{1}{\infty} = 0 \\ \frac{1}{1} = 1 \end{cases}$$

$$= 2 \int_{1}^{\infty} \log(x) \cdot \frac{1}{x^3} \, dx =$$

$$= 2 \int_{1}^{0} y^3 \, dy = -2 \int_{0}^{1} y^3 \, dy = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

4. Sia $X \sim \text{Unif}(4, 10)$.

(a) Calcolare $\mathbb{P}(X > 6)$.

(b) Calcolare $\mathbb{P}(|X - 7| > 1)$.

$$X \sim \text{unif}(4,10) \Rightarrow f_X(x) = \mathbb{1}_{(4,10)}(x) \cdot \frac{1}{6} = \begin{cases} \frac{1}{6} & x \in (4,10) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) $$\mathbb{P}(X > 6) = \int_{-\infty}^{6} f_X(x)\,dx = \int_4^6 \frac{1}{6}\,dx = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

b) $$\mathbb{P}(|X-7| > 1) = 1 - \mathbb{P}(|X-7| \le 1) = 1 - \int_6^8 f_X(x)\,dx = 1 - \int_6^8 \frac{1}{6}\,dx = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

5. Sia X una VA continua con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^{-4} & \text{se } x \geq 1; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Si trovi il valore di c per il quale la funzione f_x è una di densità.

(b) Trovare $\mathbb{P}(0.5 \leq X \leq 2)$.

(c) Trovare $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4)$.

(d) Trovare $\mathbb{P}(X \leq x)$ per ogni $x \geq 1$.

(e) Trovare $\mathbb{E}(X)$ e $\operatorname{Var}(X)$.

(f) Trovare $\mathbb{E}(5X^2 + 3X)$.

a) $$1 \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_1^{\infty} c x^{-4}\,dx = c\int_1^{\infty} x^{-4}\,dx = c\left(-\frac{1}{5}x^{-5}\right)_1^{\infty} = \frac{c}{5}1^5 = \frac{c}{5}$$

$$\Longleftarrow \quad c = 5$$

b) $$\mathbb{P}(X \in (0{,}5, 2)) = \int_{1/2}^{2} f_X(x)\,dx = \int_1^2 5x^{-4}\,dx =$$

$$= \left(-x^{-5}\right)_1^2 = 1 - \frac{1}{2^5} = \frac{2^5 - 1}{2^5}$$

c) $$\mathbb{P}(X \in (2,4)) = \int_2^4 5x^{-4}\,dx = \left(-x^{-5}\right)_2^4 = 2^{-5} - (2^2)^{-5}$$

$$= 2^{-5}(1 - 2^{-5})$$

d) $$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 1 \\ \int_1^x 5y^{-4}\,dy = 1 - x^{-5} & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

e) $$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dy = \int_1^{\infty} x\, 5x^{-4}\,dx = 5\int_1^{\infty} x^{-3}\,dx = \frac{5}{4}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_1^\infty x^2 5 x^{-4} dx - \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{3} - \frac{25}{16} = \frac{80 - 75}{48} = \frac{5}{48}$$

f) $\mathbb{E}(5X^2 + 3X) = 5\mathbb{E}(X^2) + 3\mathbb{E}(X) = 5 \cdot \frac{5}{3} + 3\,\frac{5}{4}$

$$= \frac{100 + 45}{12} = \frac{145}{12}$$

6. La procedura di imbottigliamento di una certa bevanda viene fermata e ricon- trollata quando si verifica il quinto caso di imbottigliamento non conforme alle specifiche. Le anomalie nell'imbottigliamento accadono in media una volta su 1000 e la produzione totale è di 10000 bottiglie al giorno.

   (a) Qual è la probabilità che la procedura non venga interrotta per una giornata intera?

   (b) Qual è la probabilità che in un giorno la procedura subisca più di un'interruzione?

   In entrambi i casi è richiesto di indicare un'espressione esatta e un'approssimazione numerica.

$p = \frac{1}{1000} = \mathbb{P}(\text{anomalia}) \qquad n = 10000$

$K = \#$ anomalie

a) $\mathbb{P}(\text{procedura non fermata}) =$

$= \mathbb{P}(K \leq 4) = \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$= \sum_{k=0}^{4} \binom{10000}{k} \left(\frac{1}{1000}\right)^k \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{10000-k}$

Per approssimare usiamo CLT

$K \approx N(n \cdot p, \, np(1-p)) = N(\underbrace{10}_{\mu}, \, \underbrace{10 \cdot \tfrac{999}{1000}}_{\sigma^2})$

$\Rightarrow \mathbb{P}(K \leq 4) = \int f_{\mu,\sigma}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\frac{4-\mu+\frac{1}{2}}{\sigma}} f_{0,1}(t)\,dz$

$= \Phi\left(\frac{4-10+\frac{1}{2}}{\sqrt{10 \cdot \frac{999}{1000}}}\right) \approx \Phi(-1{,}74) \approx 0{,}0409 = 4{,}09\%$

b) $\mathbb{P}(\text{procedura fermata 10 o più volte}) =$

$$= \mathbb{P}(K \geq 10) = 1 - \mathbb{P}(K < 10) = 1 - \sum_{k=0}^{9} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{9} \binom{10000}{k} \left(\frac{1}{1000}\right)^k \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{10000-k}$$

Per approssimare usiamo CLT

$$K \approx \mathcal{N}(n \cdot p, np(1-p)) = \mathcal{N}(\underbrace{10}_{\mu}, \underbrace{10 \cdot \tfrac{999}{1000}}_{\sigma^2})$$

$$\frac{9 - \mu + \frac{1}{2}}{\sigma}$$

$$= 1 - \mathbb{P}(K \leq 9) \approx 1 - \int f_{\mu,\sigma}(x)\,dx = 1 - \int_{-\infty} f_{0,1}(t)\,dz$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{9 - 10 + \frac{1}{2}}{\sqrt{10 \cdot \frac{999}{1000}}}\right) \approx 1 - \Phi(-0.16) = \Phi(0.16)$$

$$\approx 0.5636 = 56.36\%$$