1. Calcolare valore atteso e varianza delle variabili aleatorie seguenti:

   (a) $X \sim Pois(\mu)$ con parametro $\mu > 0$[1].

   (b) $T \sim Geom(p)$ con parametro $p \in (0,1)$[2]..

a) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu} \sum k \frac{\mu^k}{k!} =$$

$$= \mu e^{-\mu} \cdot e^{\mu} = \mu$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} - \mu^2$$

$$= e^{-\mu} \cdot e^{\mu}\, \mu(1+\mu) - \mu^2 = \mu$$

b) $$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}(T=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} p = \frac{p}{(1-p)} \sum_{k=0}^{\infty} k (1-p)^k$$

$$= \frac{p}{1-p} \frac{1-p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$\mathrm{Var}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} p - \frac{1}{p^2} =$$

$$= \frac{p}{1-p} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-p)^k - \frac{1}{p^2} = \frac{\cancel{p}}{\cancel{1-p}} \frac{\cancel{(1-p)}(1+(1-p))}{p^{\cancel{3}\,2}} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

2. Assumiamo che per una variabile aleatoria X sappiamo che $\mathbb{E}(X) = 2$ e che $\mathrm{Var}(X) = 5$. Quanto vale $\mathbb{E}(X^2)$?

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 5 + 2^2 = 9$$

3. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie IID (Indipendenti e Identicamente Distribuite) con valore atteso 2 e varianza 3.

   (a) Calcolare $\mathrm{Var}(2X_1 + 1)$.

   (b) Calcolare $\mathrm{Var}(n \cdot X_1)$

   (c) Calcolare $\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$. Commentare se e perché questo risultato è diverso da quello del punto precedente.

Richiamo: $\mathrm{Var}(aX+b) = \mathrm{Var}(aX) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$.

a) $\mathrm{Var}(2X_1+1) = \mathrm{Var}(2X_1) = 4\,\mathrm{Var}(X_1) = 4 \cdot 3 = 12$

b) $\mathrm{Var}(n \cdot X_1) = n^2\,\mathrm{Var}(X_1) = n^2 \cdot 3$

c) $\mathrm{Var}(X_1 + \ldots X_n) \overset{\text{indip.}}{=} \mathrm{Var}(X_1) + \ldots \mathrm{Var}(X_n) = n\,\mathrm{Var}(X_1) = n \cdot 3$

Questo è diverso dal risultato precedente perché la somma di n variabili iid è diversa da moltiplicare per n il valore di X_1!

4. Circa il 5% dei passeggeri con dei biglietti perde l'aereo. Su uun volo con 200 posti, assumiamo che una compagnia aerea accetti 212 riservazioni. Assumendo che ogni passeggero arrivi in tempo all'imbarco indipendentemente da tutti gli altri passeggeri, si usi (se possibile) l'approssimazione di Poisson per stimare la probabilità che il volo sia overbooked.

Il numero di persone che cancellano è una variabile aleatoria $X \sim Bin(n, p)$ $n = 212$, $p = 0.05$.

Usiamo approssimazione di Poisson.

Scegliamo $\lambda = n \cdot p = 212 \cdot 0.05 = 10.6$ $\quad Y \sim Pois(n \cdot p)$

$$\mathbb{P}(X \leq 11) \simeq \mathbb{P}(Y \leq 11) = \sum_{j=0}^{11} \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{j=0}^{11} e^{-10.6} \frac{(10.6)^j}{j!}$$

$$\approx \underline{0.6269.}$$

Ci sono 15 impiegati in un ufficio. La direzione permette di organizzare una festa l'ultimo giorno del mese se ci sono stati compleanni tra gli impiegati durante il mese passato. Calcolare il valore atteso del numero di feste in un anno, assumendo per semplicità che, per ogni operaio, ogni mese abbia la stessa probabilità di essere il mese contenente il suo compleanno.

$\mathbb{E}(N)$ $\qquad N = \mathbb{1}_{Gen} + \mathbb{1}_{Feb} + \dots + \mathbb{1}_{Dec}$

$$\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{Gen} + \dots + \mathbb{1}_{Dic}) = \sum_{mesi} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{mese})$$

$$= \sum_{i=1}^{12} \mathbb{P}(\text{c'è almeno un compleanno al mese } i)$$

$$\mathbb{P}(\text{avere almeno un compl. al mese } i) = 1 - \mathbb{P}(\text{nessun compl. } i)$$

$$= 1 - \underbrace{\left(\frac{11}{12}\right) \cdot \left(\frac{11}{12}\right) \cdots \left(\frac{11}{12}\right)}_{15 \text{ volte}}$$

primo impiegato non ha compl. al mese i; secondo impiegato

$$= 1 - \left(\frac{11}{12}\right)^{15}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}(N) = 12 \cdot \left(1 - \left(\frac{11}{12}\right)^{15}\right) = 8.75$$

Si considerino le seguenti variabili aleatorie:

(a) X con legge binomiale di parametri $n = 20$ e $p = 0.2$,

(b) Y con legge di Poisson di parametro $\lambda = 5$.

(c) Z con legge geometrica di parametro $p = 1/3$.

In ciascuno caso determinare la variabile aleatoria standardizzata corrispondente

a) $X \sim Bin(n, p) \Rightarrow E(X) = n \cdot p \quad Var(X) = n \cdot p(1-p)$

$$\Rightarrow \overline{X} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{X - 4}{\sqrt{20 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}$$

b) $Y \sim Pois(\lambda) \Rightarrow E(Y) = \lambda \, , Var(Y) = \lambda$

$$\Rightarrow \overline{Y} = \frac{Y - \lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{Y - 5}{\sqrt{5}}$$

c) $Z \sim Geom\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow E(Z) = \frac{1}{1/3} = 3 \quad Var(Z) = \frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$

$$\Rightarrow \overline{Z} = \frac{Z - 3}{\sqrt{2}}$$