Foglio di esercizi 5

Discussione soluzioni: 23.04.2024

1. Definiamo una variabile aleatoria X con distribuzione di *Poisson* con parametro $\mu > 0$ ($X \sim Pois(\mu)$) se ha la funzione di massa data da

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!} \qquad \text{per } k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

(cioè $\mathrm{range}(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$. La variabile aleatoria di Poisson può rappresentare per esempio il numero di clienti giornalieri in un negozio, oppure il numero di chiamate ricevute all'ora (o al giorno) da un call center. Ci ricordiamo anche che una variabile aleatoria $Y \sim Geom(p)$ con parametro $p \in (0, 1)$ se ha funzione di massa

$$\mathbb{P}(Y = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

Calcolare valore atteso e varianza delle variabili aleatorie seguenti:

   (a) $X \sim Pois(\mu)$ con parametro $\mu > 0$[1].
   (b) $T \sim Geom(p)$ con parametro $p \in (0, 1)$[2]..

2. Assumiamo che per una variabile aleatoria X sappiamo che $\mathbb{E}(X) = 2$ e che $\mathrm{Var}(X) = 5$. Quanto vale $\mathbb{E}(X^2)$?

3. Siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabili aleatorie IID (Indipendenti e Identicamente Distribuite) con valore atteso 2 e varianza 3.

   (a) Calcolare $\mathrm{Var}(2X_1 + 1)$.
   (b) Calcolare $\mathrm{Var}(n \cdot X_1)$
   (c) Calcolare $\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$. Commentare se e perché questo risultato è diverso da quello del punto precedente.

4. Ci sono 15 impiegati in un ufficio. La direzione permette di organizzare una festa l'ultimo giorno del mese se ci sono stati compleanni tra gli impiegati durante il mese passato. Calcolare il valore atteso del numero di feste in un anno, assumendo per semplicità che, per ogni operaio, ogni mese abbia la stessa probabilità di essere il mese contenente il suo compleanno.

5. Si considerino le seguenti variabili aleatorie:

   (a) X con legge binomiale di parametri $n = 20$ e $p = 0.2$,
   (b) Y con legge di Poisson di parametro $\lambda = 5$.
   (c) Z con legge geometrica di parametro $p = 1/3$.

   In ciascuno caso definire, la variabile aleatoria standardizzata corrispondente in funzione della variabile originale e dei suoi parametri.

[1] Si possono usare le formule $\sum_{k=0}^{\infty} k\mu^k/k! = \mu e^{\mu}$ e $\sum_{k=0}^{\infty} k^2\mu^k/k! = \mu(1+\mu)e^{\mu}$

[2] Si possono usare le formule $\sum_{k=0}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$ e $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 q^k == \frac{q^2+q}{(1-q)^3}$