

1. Sia S la somma ottenuta lanciando due dadi. Determinare la funzione di massa di S .

$$\text{range}(S) = \{2, 3, \dots, 12\}.$$

$$P(S=2) = P(S=12) = \frac{1}{36}$$

$$P(S=3) = P(S=11) = \frac{2}{36}$$

$\vdots$

$$P(S=2+j) = P(S=12-j) = \frac{j+1}{36} \quad j < 6$$

2. Sia X una variabile aleatoria tale che $P(X=0) = 1/5$, $P(X=-1) = P(X=1) = 2/5$ e sia $Y = X^2$.

(a) Sia inoltre Z il numero della pallina estratta a caso da un contenitore contenente 100 palline numerate da 1 a 100. Calcolare $E(X)$, $E(Y)$ e $E(Z)$.

(b) Calcolare la funzione di massa congiunta delle coppia (X, Y) .

$$a) \quad E(X) = \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5}(-1) + \frac{1}{5} \cdot 0 = 0$$

$$E(Y) = \frac{2}{5}(1)^2 + \frac{2}{5}(-1)^2 + \frac{1}{5} \cdot 0^2 = \frac{4}{5}$$

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{100} j \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{100} \cdot \frac{100 \cdot 99}{2} = \frac{99}{2}$$

$$b) \quad \text{range}(X) = \{-1, 0, 1\}$$

$$\text{range}(Y) = \{0, 1\}$$

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	0	$1/3$	0
1	$1/3$	0	$1/3$

$P(X=x, Y=y)$



3. Viene lanciata due volte una moneta sulle cui due facce si trovano rispettivamente le cifre "1" e "2".

- (a) Determinare la legge congiunta di (X, Y) , con $X =$ "il massimo dei due risultati ottenuti" e $Y =$ "la somma dei due risultati ottenuti".
 (b) Le variabili aleatorie X, Y sono indipendenti?

a)

	1	2
2	$\frac{1}{4}$	0
3	0	$\frac{2}{4}$
4	0	$\frac{1}{4}$

Risultati possibili (ugualmente probabili)
 $(L_1, L_2) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$
 $\downarrow$
 $X, Y = (1, 2), (2, 3), (2, 3), (2, 4)$

$\text{range}(X) = \{1, 2\}$ $\text{range}(Y) = \{2, 3, 4\}$

b) no: $P(X=1, Y=3) = 0 \neq P(X=1) \cdot P(Y=3)$

5. Sia X una variabile aleatorie con la funzione di massa:

x	-2	-1	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

Sia $Y = X^2$, cioè il valore della variabile aleatoria Y è il quadrato della variabile aleatoria X .

- (a) Calcolare la funzione di massa di Y
 (b) Calcolare $E(2Y + 5)$
 (c) Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

a)

$$P(Y=4) = P(X=2) + P(X=-2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=1) = P(X=1) + P(X=-1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(Y=0) = P(X=0) = \frac{1}{6}$$

b)

$$E(2Y + 5) = 2E(Y) + 5 = 2\left(4 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) + 5$$

$$= \frac{11}{3} + 5 = \frac{26}{3}$$

$$c) \text{ No : } P(X=1, Y=0) = 0 \neq P(X=1) \cdot P(Y=0)$$

4. Calcolare la varianza di X nei casi seguenti:

(a) X è il punteggio ottenuto lanciando un dado.

(b) $X = 3Y - Z + 12$ con $Y \sim \text{Bin}(3, 1/3)$ e $Z \sim \text{Unif}(2, 7)$.

$$a) E(X) = \frac{7}{2}$$

$$E(X^2) = 6^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 91 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \approx 2,917$$

b) Se $Y \perp Z$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= E((3Y - Z + 12)^2) - (E(3Y - Z + 12))^2$$

$$= E(9Y^2 - 6YZ + 64Y - 24Z + Z^2 + 12^2) - (3E(Y) - E(Z) + 12)^2$$

$$= 9E(Y^2) - 6E(Y)E(Z) + 64E(Y) - 24E(Z) + E(Z^2) + 12^2$$

$$- (3E(Y) - E(Z) + 12)^2$$