

Foglio di esercizi 3

Discussione soluzioni: 09.04.2024

1. Consideriamo un esperimento casuale descritto da $S = \{1, 2, 3, 4\}$ con probabilità uniforme e consideriamo gli eventi $E = \{1, 2\}$, $F = \{1, 3\}$ e $G = \{2, 3\}$. Dire, giustificando la risposta, se E, F, G sono indipendenti o meno.
2. Viene lanciato 4 volte un dado. Calcolare la probabilità degli eventi seguenti:
 - A_1 = esce un numero pari nei primi tre lanci.
 - A_2 = esce un numero dispari al terzo lancio.
 - A_3 = la somma dei risultati è uguale a 5.
 - A_4 = il prodotto dei risultati è uguale a 6.
3. Consideriamo un esperimento a prove ripetute indipendenti con probabilità di successo $p = 1/4$ (per esempio, lanciare un dado a quattro facce, dove il successo è fare 4). Determinare la probabilità che
 - (a) il primo successo avvenga alla prova 5;
 - (b) il primo successo avvenga dopo almeno 5 prove;
 - (c) il primo successo avvenga prima della sesta prova;
 - (d) avvengano *esattamente* 4 successi tra le prime 10 prove.
 - (e) avvengano *almeno* 4 successi tra le prime 10 prove.
4. Sia X una variabile aleatoria con insieme delle immagini $\text{range}(X) = \{0, 1\}$ e con $\mathbb{P}(X = 1) = 1/3$ (chiamata variabile di Bernoulli con $p = 1/3$). Si definiscono le variabili aleatorie $Y = (X + 5)/3$, $Z = e^{X/2}$ e $U = 2X - 1$.
 - (a) Calcolare $P(X = 0)$,
 - (b) Trovare l'insieme delle immagini delle variabili aleatorie Y, Z, U ,
 - (c) Calcolare la funzione di massa delle variabili aleatorie Y, Z, U ,
5. Si consideri un mazzo di carte italiane tradizionali composto da 40 carte (4 semi: denari, coppe, spade, bastoni; e 10 numeri: dall'1 al 7, e tre figure: fante (F), cavallo (C), re (R)).
 - (a) Supponiamo di estrarre due carte a caso dal mazzo senza reinserimento. Siano A_1, A_2 l'evento di pescare un R alla prima e alla seconda estrazione, rispettivamente. Questi eventi sono indipendenti?
 - (b) Supponiamo di estrarre due carte a caso dal mazzo senza reinserimento. Qual è la probabilità che la loro somma faccia esattamente 4 (le figure valgono 10)?
 - (c) Supponiamo ora di pescare con reinserimento. Quale è la probabilità di pescare almeno 3 carte di coppe nei primi 4 tentativi?
6. Si consideri poi per ogni $k = 1, 2, 3, 4$ la variabile aleatoria X_k che vale 1 se avviene un esito contenuto in A_k per l'esercizio 2 su questo foglio e 0 altrimenti. Si identifichi l'insieme delle immagini della variabile X_k e si trovi la sua funzione di massa.