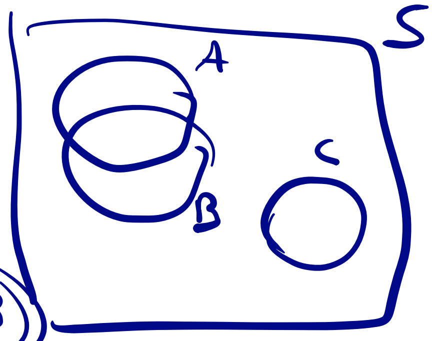
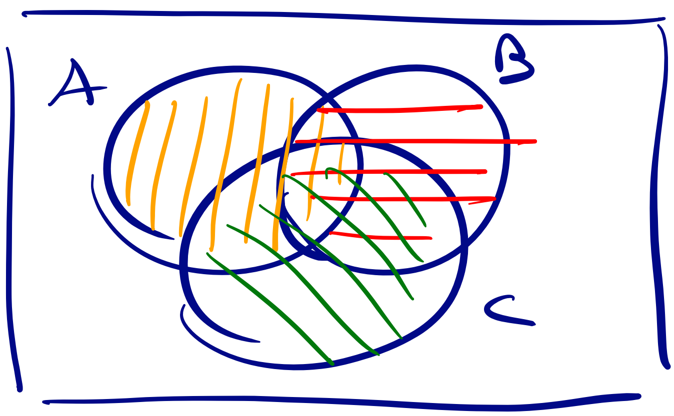
1. Tre eventi A, B, C sono tali che $P(A \cap B) = P(A)P(B), P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0, P(A \cup B \cup C) = 1, P(A) = P(B) = 0.3$. Calcolare $P(C)$.

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}((A \cup B \cup C) \setminus (A \cup B))$$
$$= \mathbb{P}(A \cup B \cup C) - \mathbb{P}(A \cup B)$$
$$= 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B))$$
$$= 1 - (0.3 + 0.3 - 0.09) = 0.49$$



2. Principio di inclusione-esclusione per 3 eventi. Si dia una dimostrazione, con l'aiuto di diagrammi di Venn, dell'identita seguente: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$



$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$$
$$- \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C)$$
$$- \mathbb{P}(B \cap C)$$
$$+ \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Richiamo: per esiti ugualmente probabili

$$\mathbb{P}(E) = \#(E) / \#(S) \qquad E \subseteq S$$

3. Consideriamo un esperimento aleatorio che consiste nel lanciare tre volte un dado.

(a) Determinare uno spazio di probabilità che rappresenta l'esperimento.

(b) Calcolare la probabilità che la somma dei tre punteggi ottenuti sia 5.

(c) È piu probabile che la somma dei tre punteggi ottenuti sia uguale a 6 o che sia minore o uguale a 5?

(d) È più probabile che i tre lanci successivi diano una terna di punteggi strettamente crescenti o che la somma dei tre punteggi sia strettamente minore di 7?

a) $\underline{(S, \mathbb{P})}$ $\qquad S = \{1, 2, 3, \dots 6\} \times \{1, 2, \dots 6\} \times \{1, 2, \dots 6\}$

$$\mathbb{P}(E) = \#(E) / \#(S)$$

b) $\#(S) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ $\quad (1,1)(0,1)(1,0)$ $(0,0)$

$E_5 = \{\text{somma dei dadi sia} = 5\}$

$= \{\overline{(1,1,3)}, \overline{(1,2,2)}\} =$ $\qquad \mathbb{P}(E) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$

$\#E = 3 + 3 = 6$

c) $E_6 = \{\text{somma} = 6\} = \{\overline{(1,2,3)}, \overline{(2,2,2)}, \overline{(1,1,4)}\}$

$\#E_6 = 3! + 1 + 3 = 10$

$\mathbb{P}(E_6) = \frac{10}{216}$

$E_{\leq 5} = \{\text{somma} \leq 5\} = \{\overline{(1,1,1)}, \overline{(1,1,2)} \overline{(1,1,3)} \overline{(1,2,2)}\}$

$= 1 + 3 + 3 + 3$

$\mathbb{P}(E_{\leq 5}) = \frac{10}{216}$

d) $\mathbb{P}(\text{crescente}) = \frac{\#\text{crescenti}}{216} = \frac{\sum_{j=1}^{4} \#\{(j,k,l) : j<k<l\}}{216}$

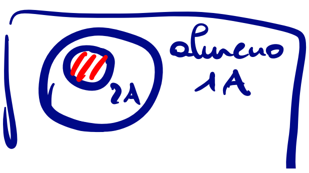
$\#\{(1,k,l)\}$

$= \frac{5\cdot 4/2 + 4\cdot 3/2 + 3\cdot 2/2 + 2\cdot 1/2}{216} = 0.093$

$P(\text{somma} < 7) = \frac{\#\{(1,1,1), \overline{(1,1,x)}, \overline{(1,2,2)}, \overline{(1,2,3)}, \overline{(1,2,4)}, \overline{(1,3,3)}\}}{216} = \frac{1+3\cdot 5+3+3!+3!+3}{216} = 0.157$

4. Due carte sono pescate a caso da un mazzo standard di 52 carte senza reinserimento. Sappiamo che almeno una delle carte e un asso. Calcolare la probabilita che entrambe le carte siano assi?

$\mathbb{P}(\text{due assi} \mid \text{un asso}) = \frac{\mathbb{P}(\text{due assi} \cap \text{almeno un asso})}{\mathbb{P}(\text{almeno un asso})}$



$= \mathbb{P}(\text{due assi}) / \mathbb{P}(\text{almeno 1A})$

$$\mathbb{P}(\text{due assi}) = \frac{4 \cdot 3}{52 \cdot 51}$$

$$\mathbb{P}(\text{almeno un asso}) = 1 - \mathbb{P}(0 \text{ assi}) = 1 - \frac{48 \cdot 47}{52 \cdot 51} = \frac{4 \cdot 99}{52 \cdot 51}$$

$$\mathbb{P}(\text{due assi} \mid \text{un asso}) = \frac{\cancel{4} \cdot 3 / \cancel{52 \cdot 51}}{\cancel{4} \cdot 99 / \cancel{52 \cdot 51}} = \frac{3}{99} = \frac{1}{33}$$

Richiamo (Formula di Bayes)

$$\mathbb{P}(F \mid E) = \frac{\mathbb{P}(E \mid F) \cdot \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(E)}$$

causa

stato di un sistema

effetto

osservazione

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \mid F) \cdot \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E \mid F^c)\, \mathbb{P}(F^c)$$

5. In un certo anno, la frequenza della malattia di Lyme è di circa 8 casi per 100000 persone. Esiste un test del sangue piuttosto accurato per questa malattia. Circa il 10% delle volte una persona che ha la malattia riceverà un risultato negativo (falso negativo) mentre il 3% delle volte una persona sana riceverà un risultato positivo (falso positivo). Si risponda alle seguenti domande ad una precisione di almeno 4 cifre decimali.

   (a) Una persona è scelta a caso sulla popolazione ed è testata. Calcolare la probabilità che ottenga un risultato positivo?

   (b) Calcolare la probabilità che una persona scelta a caso sulla popolazione abbia la malattia di Lyme e ottenga un risultato negativo (quindi che sia e malata e il risultato sia negativo).

   (c) Dato che un test ritorna positivo, calcolare la probabilita che una persona scelta a caso sulla popolazione abbia la malattia di Lyme

   (d) Un paziente va dal medico dopo aver notato un morso di zecca circa 3 giorni addietro, e la pelle risulta arrossata intorno al morso. Si lamenta di stanchezza cronica e di mal di testa (tutti tipici sintomi di contagio di malattia di Lyme). Prima di effettuare il test, il dottore stima, sulla base di questi sintomi, che ci sia il 90% si probabilità che il paziente sia infetto. Il test ritorna negativo. Data questa informazione, si aggiorni la probabilità che la persona abbia la malattia di Lyme (cioè che il test fosse un falso negativo).

a) m = malato $+$ = positivo

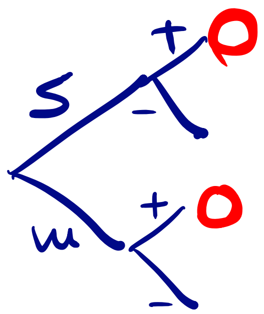
s = sano $-$ = negativo

$$\mathbb{P}(m) = \frac{8}{10^5}$$

$\mathbb{P}(- \mid m) = 0.1$ $\mathbb{P}(+ \mid m) = 0.9$

$\mathbb{P}(+ \mid s) = 0.03$ $\mathbb{P}(- \mid s) = 0.97$

$$\mathbb{P}(+) = \mathbb{P}(+|s)\,\mathbb{P}(s) + \mathbb{P}(+|m)\cdot\mathbb{P}(m)$$



$$= 0.03 \cdot \left(1 - \frac{8}{10^5}\right) + 0.9 \cdot \frac{8}{10^5}$$

$$= 0.03 = 3\,\%$$

b) $\mathbb{P}(m \cap -) = \mathbb{P}(-|m)\cdot\mathbb{P}(m)$

$$= 0.1 \cdot \frac{8}{10^5} = 8\ 10^{-6}$$

c) $\mathbb{P}(m|+) = \dfrac{\mathbb{P}(+|m)\cdot\mathbb{P}(m)}{\mathbb{P}(+)}$

$$= \frac{0.9 \cdot 8/10^5}{0.03} = 0.002 = 0.2\,\%$$

d) $\mathbb{P}(m) = 0.9$

$$\mathbb{P}(m|-) = \frac{\mathbb{P}(-|m)\cdot\mathbb{P}(m)}{\mathbb{P}(-)}$$

$$= \frac{0.1 \cdot 0.9}{1 - \mathbb{P}(+)}$$

$= 0.48$