Statistica I - Ingegneria Gestionale (2019/20) - I Appello giugno 2020

Problema 1. *Siano* X, Y *v.a. indipendenti. Si assuma che* X *abbia legge di Poisson di parametro* $\lambda = 3$ *e che* Y *abbia legge binomiale di parametri* $n = 18$, $p = \frac{1}{6}$.

(i) Si determinino le variabili aleatorie standardizzate corrispondenti a X *e* Y.

(ii) Si calcolino il valore atteso e la varianza di $Z = 2X + Y$.

(iii) Si calcoli la covarianza tra X *e* $U = X - Y$.

Problema 2. *Si calcoli approssimativamente l'integrale*

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{e^x}}{1+x^2} \, \mathrm{d}x,$$

usando il metodo di Monte Carlo.

Problema 3. *Sia* $\theta > 0$ *un parametro e sia*

$$f(x) := \begin{cases} 4\theta^4 x^{-5} & \text{se } x \geq \theta, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Si verifichi che f *è una densità di probabilità per ogni* $\theta > 0$.

(ii) Sia $X_1, \ldots, X_n$ *un campione casuale estratto da una popolazione avente densità* f. *Si determini tramite il metodo dei momenti uno stimatore puntuale per* θ.

(iii) Lo stimatore trovato nel punto (ii) è corretto?

(iv) Si determini la funzione L *di massima verosimiglianza corrispondente a* f *e ad un campione di dati* $x_1, \ldots, x_n$. *Si disegni il grafico di* L.

Problema 4. *Viene lanciata per tre volte una moneta regolare.*

(i) Si dia una formalizzazione matematica di quest'esperimento aleatorio indicando lo spazio dei risultati possibili Ω *e un'opportuna funzione di probabilità definita su* Ω.

(ii) Si calcoli la probabilità dell'evento "esce al più una volta Testa".

(iii) Si calcoli la probabilità dell'evento "facce consecutive non sono mai uguali".

(iv) Si stabilsica se i due eventi dei punti (ii) e (iii) sono indipendenti.

Problema 5. *Sia X una v.a. di legge esponenziale di parametro 2 e sia Y una v.a. di Bernoulli di parametro $p \in (0,1)$. Denotiamo con $\overline{X}_n$ e $\overline{Y}_n$ le medie empiriche ottenute prendendo n copie indipendenti di X e Y rispettivamente. Si determini un p tale che per n sufficientemente grande $\overline{X}_n$ e $\overline{Y}_n$ hanno circa la stessa legge. Di quale legge si tratta?*

Problema 6. *I file csv disponibili qui contengono ciascuno un campione di dati estratto da una popolazione incognita. Si consideri nel seguito solamente il file contenente il proprio numero di matricola nel nome.*

(i) Si presenti un'analisi descrittiva dei dati contenente la numerosità del campione, un istogramma delle frequenze relative e il calcolo di media e varianza campionarie. Si faccia un'opportuna ipotesi sulla legge della popolazione, fissandone il tipo a meno di qualche parametro.

(ii) Si faccia una stima dei parametri usando degli stimatori puntuali e i dati contenuti nel file.

(iii) Si determini un intervallo di confidenza a due code del 95% per la media μ della popolazione, a partire dall'ipotesi fatta in (i).