

*La durata della prova è di 120 minuti. Fornire risposte dettagliate.*

### Problema 1

Una piccola lotteria organizzata presso il bar di un paesino consiste di 100 biglietti, ciascuno del costo di 1 €, e ha in tutto 3 premi, del valore rispettivamente di 50, 25 e 25 €. Il cliente Alfonso non è un grande scommettitore e ha comperato solo due biglietti.

1. Calcolare la probabilità che Alfonso vinca esattamente 50 €.
2. Alfonso è particolarmente fortunato: viene avvisato dagli organizzatori che ha vinto in tutto 50 €. È più probabile che abbia vinto il singolo premio da 50 € oppure entrambi i premi da 25 €?

### Problema 2

Siano  $X$  e  $Y$  variabili aleatorie a valori in  $\{-1, 0, 1\}$  indipendenti e uniformi (discrete):

$$\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(Y = i) = 1/3 \quad \text{per ogni } i \in \{-1, 0, 1\}.$$

1. Calcolare valor medio e deviazione standard di  $X + Y$ .
2. Sia  $S$  la somma di 300 copie indipendenti di  $X + Y$ . Usando il teorema limite centrale approssimare la probabilità

$$\mathbb{P}(|S| \leq 10)$$

*(scrivere l'integrale approssimante, un opportuno comando R per calcolarlo e il risultato numerico ottenuto).*

### Problema 3

Si osserva il prezzo dello stesso modello di smart TV (in €) presso 7 diversi siti di e-commerce, ottenendo i valori

$$252, \quad 251, \quad 264, \quad 266, \quad 245, \quad 242, \quad 234.$$

Assumendo che siano un campione di variabili gaussiane  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,

1. supponendo  $\sigma^2$  non nota, determinare un intervallo di confidenza di livello 95% per la media  $\mu$  del prezzo della smart TV;
2. assumendo  $\sigma = 10$ , decidere se rigettare l'ipotesi nulla  $H_0 : \mu = 240$  al livello 5%.

### Problema 4

Sia  $\theta > 0$  un parametro e sia  $X$  una variabile aleatoria con *funzione di ripartizione* data da

$$F(x) = \begin{cases} x^\theta & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Calcolare la funzione di densità e la funzione quantile di  $X$ .

2. Supponendo di osservare 100 copie indipendenti di  $X$ , scrivere uno stimatore  $\hat{\theta}$  di  $\theta$  usando il metodo dei momenti.
3. [Cliccando qui](#) si trova un file .csv contenente un campione di 100 dati estratti secondo la legge di  $X$ . Stimare  $\theta$  usando  $\hat{\theta}$  del punto precedenti e i dati del file.

**Problema 5**

Calcolare approssimativamente l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{|x|}} e^{-x^2/2} dx$$

implementando in R il metodo di Monte Carlo (oltre al risultato indicare i comandi R utilizzati e qualche parola di spiegazione sul metodo).