Prova scritta (Appello 27.06.2022)

Tempo a disposizione: 120 minuti

Nome, Cognome e #matricola: ______________________________

Riportare nome e cognome su ogni foglio consegnato. La soluzione di ogni esercizio deve essere scritta in maniera pulita e leggibile sugli appositi fogli contrassegnati forniti a inizio prova, spiegando dettagliatamente il ragionamento con argomenti matematicamente validi. Il risultato di ogni esercizio deve essere riportato nell'apposito spazio su questo foglio (o in forma di risposta o in forma di crocetta). Per le domande a crocette, è necessario dare anche una spiegazione della propria risposta (calcoli o argomento) sul foglio a parte. I risultati numerici devono essere dati con 4 cifre significative. Punti potranno essere sottratti per inadempienza a questi criteri. Esercizi consegnati su fogli esterni non saranno ritenuti validi. Sono benvenute le frasi che forniscono una spiegazione euristica della strategia che si intende seguire, ma non sono sufficienti, ci si aspetta calcoli espliciti. È permesso l'uso di calcolatrici non programmabili, e di **un foglio formato A4** (scritto fronte-retro, anche al computer) contenente appunti/formule. Un foglio supplementare è permesso per le tavole necessarie.

1. Ci sono due scatole, contenenti ciascuna 10 schede SD, dello stesso tipo e usate: la prima scatola contiene 2 schede SD difettose e la seconda 4 schede SD difettose. Le altre schede in ogni scatola sono tutte funzionanti.

   (a) Peschiamo due schedine dalla seconda scatola, senza reinserimento. Gli eventi "la prima schedina pescata è difettosa" e "la seconda schedina pescata è difettosa" sono indipendenti?

   a) sì b) no c) dati insuff. d)Altro: ______

   (b) Gli eventi considerati al punto precedente sono indipendenti anche se la prima schedina è pescata dalla prima scatola e la seconda schedina dalla seconda?

   a) sì b) no c) dati insuff. d)Altro: ______

   (c) Per effettuare le riparazioni, si prelevano (in blocco) 3 schede SD (senza reinserimento) dalla seconda scatola. Calcolare la probabilità di pescare almeno una schedina difettosa.

   a) 0.125 b) 0.83 c) 0.17 d) 0.875 e)Altro: ______

   (d) Supponiamo di scegliere a caso, in maniera equiprobabile, una scatola e di prelevare (in blocco, quindi senza reinserimento) da essa 3 schede SD che risultano tutte funzionanti: qual è la probabilità che sia stata scelta la prima scatola?

   Risposta: __________________

   (e) Supponiamo di scegliere a caso, in maniera equiprobabile, una scatola e di continuare a pescare da quella scatola *con reinserimento* finché viene estratta una schedina difettosa. Sia X il numero di estrazioni necessarie per ottenere una schedina difettosa. Calcolare $\mathbb{E}(X)$.
   Suggerimento: Può aiutare scrivere X usando una variabile di Bernoulli e delle variabili Y_1, Y_2 che rappresentano il numero di tentativi se si è scelta la scatola 1 o 2.

   Risposta: __________________

2. Un produttore di salmoni afferma che il peso medio dei suoi salmoni è maggiore del peso medio generale per questa specie di pesce. Per verificare questa affermazione, un gruppo di ricercatori ha raccolto un campione casuale di 8 salmoni dal produttore e ha ottenuto i seguenti dati sul peso (in kg):

   7.2 6.8 7.5 7.4 7.1 7.3 7.6 7.3

   Si sa che il peso medio dei salmoni nella popolazione generale è di 7.48 kg.

   (a) Calcola la media campionaria e la deviazione standard campionaria del peso dei salmoni nel campione raccolto.

   Risposta: __________________

   (b) Formula l'ipotesi nulla ($\mathcal{H}_0$) e l'ipotesi alternativa ($\mathcal{H}_1$) per il test statistico che ha come obbiettivo quello di contraddire il messaggio del produttore.

   Risposta: __________________

(c) Testare l'ipotesi nulla formulata al punto precedente al livello di significatività del 2%. Quale è la conclusione che questo risultato ci permette di trarre?

Risposta: ___________________

(d) Calcolare approssimativamente il p-value per il test discusso ai punti precedenti.

Risposta: ___________________

3. Perfect Pandas SA ha sviluppato giocattoli elettronici. Assumiamo che il numero di ordini ricevuti da Perfect Pandas SA in un'ora abbia una distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = 3/2$, indipendente per ogni ora della giornata.

(a) Calcolare la probabilità che Perfect Pandas abbia ricevuto almeno tre ordini nelle prime due ore della giornata.

a) 0.42 b) 0.37 c) 0.22 d) 0.58 e)Altro: ______

Assumiamo ora che i giocattoli funzionano correttamente con una probabilità del $p = 0.90$, indipendentemente gli uni dagli altri. I nuovi giocattoli vengono spediti ai negozi di giocattoli di tutto il paese in scatole contenenti 200 unità ciascuna.

(b) Sia X il numero di giocattoli funzionanti in una scatola. Calcola il valore atteso e la deviazione standard di X, ovvero trova $\mathbb{E}(X)$ e $\mathrm{SD}(X)$.

Risposta: ___________________

(c) Quale percentuale di scatole contiene 180 o più giocattoli funzionanti? (Questo equivale a chiedere quale è la probabilità che una singola scatola contenga 180 o più giocattoli funzionanti.) Usa un'approssimazione normale per stimare la risposta; dovresti utilizzare la correzione di continuità.

Risposta: ___________________

4. Per $\theta > 0$, si consideri una popolazione con densità di probabilità data da

$$f_\theta(x) := \frac{1}{1+\theta} x^\theta \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

da cui peschiamo iid un campione $(X_1, \dots, X_n)$

(a) Verificare che f_θ è una funzione di densità e calcolare $\mathbb{E}(2X_1 + 3)$ come funzione di θ

Risposta: ___________________

(b) Identificare lo stimatore di massima verosimiglianza per il parametro θ.

Risposta: ___________________

(c) Discutere se lo stimatore di θ dato da $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$ è corretto[1].

Risposta: ___________________

5. Consideriamo l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{\sin(7 + e^x)}{(2 + \log(x^2 + 1))} \, dx$$

(a) Discutere brevemente il metodo di integrazione di Monte Carlo e come può essere applicato per l'approssimazione di questo integrale.

(b) Scrivere i comandi in R la cui esecuzione restituisce, per il metodo discusso sopra, un valore approssimativo di questo integrale.
Nota: potrebbero essere utili i comandi `sin(·)` (il seno), `log(·)` (il logaritmo naturale) e `exp(·)` (la funzione esponenziale).

[1] questo stimatore può essere diverso da quello calcolato al punto precedente.