Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg e applicazioni alle PDE

Candidato:
Francesco Sapio

Relatore:
Prof. Paolo Acquistapace

Controrelatore:
Prof. Marco Ghimenti

Anno Accademico 2015/2016

Indice

Introduzione

Questa tesi è incentrata sullo studio della disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg, provata indipendentemente da E. Gagliardo nel 1958 [1] e da L. Nirenberg nel 1959 [2]. Si tratta di una disuguaglianza di tipo interpolatorio molto generale, che include come caso particolare il teorema di immersione di Sobolev, e che ha svariate applicazioni in diversi campi dell'analisi e della teoria delle equazioni alle derivate parziali.
La disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg è la seguente: per ogni funzione $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sufficientemente regolare si ha

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D^m u\|^{\alpha}_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

ove $m, j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j < m$, $q, r \in [1, \infty]$, $\alpha \in \left[\frac{j}{m}, 1\right]$ e p è determinato dalla relazione

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + \frac{1-\alpha}{q}\,.$$

In questa relazione, $\frac{1}{p}$ può anche essere nullo o negativo: in questi casi si intende, secondo la definizione di Nirenberg, che $p = \infty$ o che $u \in C^{k,\gamma}$ con $k = \left[-\frac{n}{p}\right]$ e $\gamma = -\frac{n}{p} - k$.
La disuguaglianza viene provata nella sua piena generalità; se ne descrive in alcuni casi speciali la costante ottimale nonché le funzioni che realizzano l'uguaglianza. Si è cercato di fornire per tutti questi risultati una dimostrazione completa e autosufficiente, con alcune eccezioni per certi teoremi che, per la loro generalità e complessità, non potevano essere inseriti senza aumentare a dismisura le lunghezza della tesi. Si descrivono anche, in modo necessariamente sommario, alcuni esempi che illustrano le applicazioni della disuguaglianza a problemi non lineari nella teoria delle equazioni alle derivate parziali.
Descriviamo brevemente il contenuto della tesi. Il primo capitolo è dedicato alla dimostrazione della disuguaglianza: si mostra dapprima che se essa è valida nei casi estremi $\alpha = 1$, e $\alpha = \frac{j}{m}$, allora essa vale per ogni $\alpha \in \left[\frac{j}{m}, 1\right]$.
Poi, dopo una descrizione delle proprietà di regolarità degli aperti di $\mathbb{R}^n$ con

particolare riferimento a quelle rilevanti per i teoremi di immersione di tipo Sobolev, cioè le proprietà del segmento, del cono e di locale Lipschitzianità, si dimostra la disuguaglianza nei casi estremi $\alpha = \frac{j}{m}$ e $\alpha = 1$, che corrisponde al teorema di Sobolev. Infine si fa cenno ad alcune eccezioni alla validità della disuguaglianza, relative al caso $\alpha = 1$ allorché l'esponente r è tale che $m - j - \frac{n}{r}$ sia un numero naturale.
Il capitolo 2 riguarda la determinazione della costante ottimale e delle funzioni che realizzano l'uguaglianza nel caso in cui $p = \infty$ e $j = 0$, considerando anche una estensione della disuguaglianza al caso $q = 2$ e $m \notin \mathbb{N}$, descrivendo un lavoro dovuto a L. Schütz, J.S. Ziebell, J.P. Zingano, P.R. Zingano [22].
Nel capitolo 3 si considera il caso $m = 1$, $j = 0$ e $r = 2$, e si studia l'esistenza della costante ottimale per mezzo dell'analisi dei minimi del funzionale

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^q dx,$$

sotto il vincolo $\|u\|_p = 1$. Questo studio richiede svariati risultati preliminari: un po' di analisi convessa, il teorema dell'inversa per applicazioni monotone, il teorema del cambiamento di variabile monotono, la disuguagliamza di Brunn-Minkowski e alcuni risultati della teoria del trasporto ottimo. Utilizzando tutti questi strumenti e seguendo il lavoro di M. Agueh [16] si riesce a risolvere (in certi casi, vale a dire $q = 1 + \frac{p}{2}$ e $q = 2(p-1)$) l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale $E(u)$, ricavando la costante ottimale e le funzioni che realizzano l'uguaglianza.
Nel capitolo 4 si cerca la costante ottimale nel caso $j = 0$, $m = 1$, senza vincoli su r, utilizzando l'operatore r-Laplaciano $-\mathrm{div}(\,|\nabla u|^{r-2}\nabla u)$, che è quello che interviene nell'equazione di Eulero-Lagrange, seguendo l'articolo di M. Agueh [17] e generalizzando i risultati ottenuti nel capitolo precedente.
Infine il capitolo 5 riguarda l'applicazione della disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg allo studio dell'equazione di Schrödinger non lineare, seguendo la strada descritta da J. Bellazzini, V. Benci, M. Ghimenti, A.M. Micheletti [15]. Utilizzando la disuguaglianza di Pólya-Szegö, il lemma di compattezza di Strauss, l'identità di Pohozaev e il principio variazionale di Ekeland, si cercano soluzioni dell'equazione di Schrödinger che siano radiali e non negative (le cosiddette soluzioni di "ground state"). Introducendo un opportuno funzionale integrale, e mostrando (grazie alla disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg) che esso è inferiormente limitato, si riesce a costruire una successione minimizzante verificante la condizione di Palais-Smale, che converge a un punto di minimo del funzionale, cioè una soluzione di ground state dell'equazione di Schrödinger.
Conclude la tesi una breve appendice contenente una lista di teoremi classici,

utilizzati nella tesi ma ben noti, e dunque non bisognosi di dimostrazione, perché ampiamente illustrati nei corsi seguiti durante gli anni precedenti.

Capitolo 1

Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg

In questo primo capitolo affronteremo lo studio della disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg. Nel corso del capitolo, mostreremo che è conseguenza indiretta di un classico teorema di Sobolev 6.0.23. Cominciamo la nostra trattazione, sviluppando i prerequisiti che ci servono per inquadrare il problema.

Definizione 1.0.1. Sia $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\gamma \in]0,1]$. Diremo che u soddisfa la condizione di Hölder con esponente γ e scriveremo $u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$ se

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\Omega)} = \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\gamma} < \infty. \tag{1.1}$$

In generale, dati $m \in \mathbb{N}$ e $\gamma \in]0,1]$, diremo che $u \in C^{m,\gamma}(\Omega)$ se

$$[u]_{C^{m,\gamma}(\Omega)} = \max_{|\alpha|=m} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\Omega)} < \infty.$$

Definizione 1.0.2. Sia $p \in \mathbb{R}$ per cui $\frac{1}{p} \in]-\infty, 1]$. In base al segno di p diamo le seguenti definizioni:

1. per $p \geq 1$ poniamo $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ misurabili} : \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$, dove la norma è

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} (\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}} & p \neq \infty, \\ \sup_{x\in\Omega} |u(x)| & p = \infty; \end{cases} \tag{1.2}$$

2. per $p < 0$, posto $\gamma = -\frac{n}{p} - s$ dove $s = \left[-\frac{n}{p}\right]$, definiamo lo spazio $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$ dove, in questo caso, la

seminorma è di tipo Hölder (1.1)

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} [D^s u]_{C^{0,\gamma}(\Omega)} & \gamma \neq 0, \\ \sup_{x\in\Omega} |D^s u(x)| & \gamma = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Osservazione 1.0.3. Per $p \in]0,1[$ lo spazio metrico $(L^p(\Omega), \Delta_p)$ non è localmente convesso e la distanza $\Delta_p(u,v) = \int_\Omega |u(x) - v(x)|^p \mathrm{d}x$ non è indotta da alcuna norma (contrariamente lo spazio sarebbe obbligatoriamente localmente convesso). Infatti se per assurdo esistesse una tal norma, varrebbe $\Delta_p(u,v) = \|u - v\|$ e quindi per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\lambda(u-v)\| = \Delta_p(\lambda u, \lambda v) = |\lambda|^p \Delta_p(u,v) = |\lambda|^p \|u - v\|$$

il che è assurdo per le proprietà delle norme.

Passiamo subito ad enunciare, quindi, il nostro risultato fondamentale:

Teorema 1.0.4. *Siano $q, r \in [1, +\infty]$ e $m, j \in \mathbb{N}$. Consideriamo una funzione $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ per cui le derivate di ordine m stiano in $L^r(\mathbb{R}^n)$. Allora per ogni $j \in [0, m[$, vale la seguente disuguaglianza*

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,m,j,q,r,\alpha) \|D^m u\|^{\alpha}_{L^r(\mathbb{R}^n)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall \alpha \in \left[\frac{j}{m}, 1\right] \tag{1.4}$$

dove p rispetta la seguente identità

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + \frac{1-\alpha}{q}, \tag{1.5}$$

fatta eccezione per questi due casi:

1. *se $j = 0$, $q = \infty$ e $rm < n$ dobbiamo fare un'ulteriore ipotesi sulla funzione; possiamo richiedere che sia infinitesima all'infinito o che sia s-sommabile con $s \geq 1$;*
2. *se $r \in]1, \infty[$ e $m - j - \frac{n}{r} \in \mathbb{N}$ allora (1.4) vale solo per $\alpha \in [\frac{j}{m}, 1[$.*

La prima cosa che vogliamo mostrare è che la nostra disuguaglianza (1.4), corredata della relazione sugli esponenti (1.5), è ben definita, nel senso che $p \notin [0, 1[$. Infatti in tale maniera la quantità $\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ assumerà talvolta il significato (1.2) talvolta quello (1.3). Analizzeremo caso per caso la situazione. Supponiamo $\alpha = 1$: allora con semplici conti si ottiene che

$$p < 0 \Longleftrightarrow r > \frac{n}{m-j} \qquad\qquad p > 1 \Longleftrightarrow 1 \leq r < \frac{n}{m-j}. \tag{1.6}$$

Inoltre è facile notare che

$$0 \leq p \leq 1 \iff r \leq \frac{n}{n+m-j} < 1. \tag{1.7}$$

Ma per le ipotesi del teorema 1.0.4 vale $r \in [1, +\infty]$, quindi la condizione (1.7) per $\alpha = 1$ non può valere e vale quindi la (1.6). Analizziamo ora il caso $\alpha = \frac{j}{m}$; anche qui con semplici calcoli si ottiene

$$p \geq 1 \iff \frac{1}{p} > 0 \wedge \frac{1}{p} \leq 1, \tag{1.8}$$

da cui ricaviamo che

1. per ogni $r, q \in [1, \infty]$ vale

$$\frac{1}{p} > 0 \iff \frac{j}{mr} + \frac{m-j}{mq} > 0 \iff \frac{j}{r} + \frac{m-j}{q} > 0 \iff jq + r(m-j) > 0;$$

2. per ogni $r, q \in [1, \infty]$ vale $q \geq 1 - \frac{j}{m}$ e quindi

$$\frac{1}{p} \leq 1 \iff \frac{j}{r} + \frac{m-j}{q} \leq m \iff jq + r(m-j) \leq mrq \iff$$

$$\iff jq + r(m - j - mq) \leq 0 \iff r \geq \frac{jq}{mq - m + j}.$$

Dal momento che

$$\frac{jq}{mq - m + j} \leq 1 \iff jq \leq mq - m + j \iff q \geq 1,$$

di conseguenza la condizione (1.8) è sempre verificata per $\alpha = \frac{j}{m}$ al variare di $j < m$. Inoltre

$$\frac{1}{r} - \frac{m-j}{n} < \frac{j}{mr} + \frac{m-j}{mq} \iff \frac{1}{r} < \frac{1}{q} + \frac{m}{n} \iff r > \frac{nq}{mq+n}.$$

Interpretando graficamente i risultati ottenuti, abbiamo i grafici della Figura 1.1 i quali mostrano che per $r \neq \frac{n}{m-j}$ vale $\frac{1}{p} \in]-\infty, 1[$.
Consideriamo allora l'ultimo caso rimasto, $r = \frac{n}{m-j}$. Dato che per ipotesi $r \geq 1$, allora $n \geq m - j$ e la relazione (1.8) mostra che anche in questo caso $p \geq 1$. Il grafico corrispondente è in Figura 1.2.

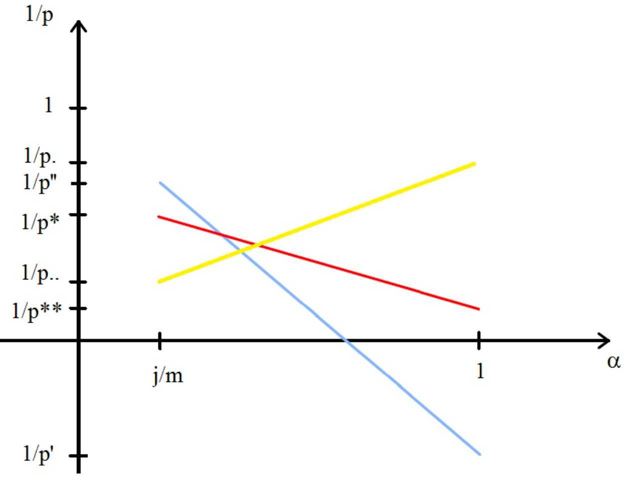


Figura 1.1: In rosso il caso $\frac{nq}{mq+n} < r < \frac{n}{m-j}$, in celeste quello $r > \frac{n}{m-j}$ e in giallo $r \leq \frac{nq}{mq+n}$.

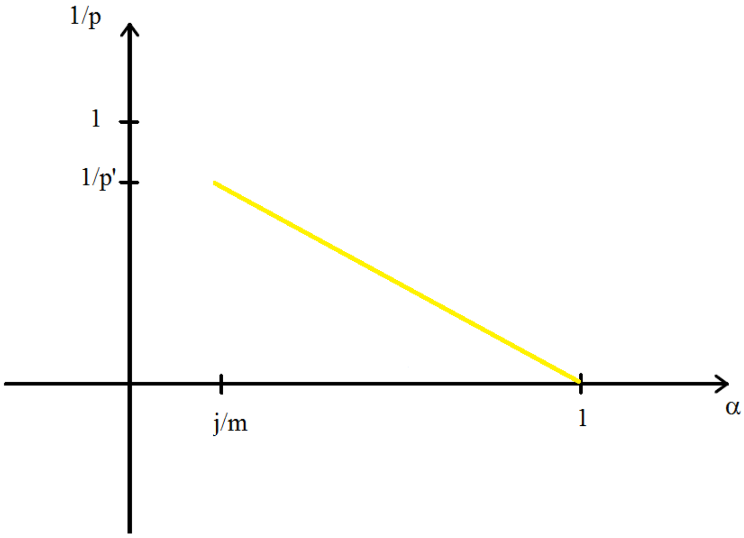


Figura 1.2: In giallo $r = \frac{n}{m-j}$.

Osservazione 1.0.5. Prima di iniziare con le proposizioni preparatorie alla dimostrazione del teorema, facciamo alcuni commenti utili

1. Il valore di p è chiaramente determinato dall'analisi dimensionale.

2. Se scegliamo $\alpha = 1$ nella (1.4) si perde l'informazione $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ e il teorema coincide con il teorema di Sobolev.

3. $\frac{j}{m}$ è il più piccolo valore che α può assumere, e questo può essere visto scegliendo $u(x) = \sin(\lambda x_1)\zeta(x)$ dove $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$: per λ grandi otteniamo $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = O(1), \|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = O(\lambda^j), \|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = O(\lambda^m)$ dove nessuno O può essere rimpiazzato con o. Quindi se valesse (1.4) per $\alpha \in [0, \frac{j}{m}[$, avremmo che $O(\lambda^j) \leq CO(\lambda^{m\alpha})O(1) = O(\lambda^{m\alpha}) = o(\lambda^j)$ che non può essere vero.

4. Dalla dimostrazione sarà chiaro che il risultato sarà ancora valido se la funzione è definita su un dominio prodotto di questo tipo

$$x_s \in \mathbb{R}, \quad x_t \in \mathbb{R}^+ : s = 1, ..., k, \quad t = k+1, ..., n$$

   e quindi su ogni dominio che possa essere messo in corrispondenza *one-by-one* col dominio prima citato, mediante una mappa sufficientemente regolare.

5. Per un dominio limitato con frontiera liscia, il risultato è ancora valido se aggiungiamo il termine $C_1\|u\|_{L^s}$ nella parte destra dell'identità (1.4) per un certo $s \geq 1$. Quindi la disuguaglianza diventerebbe di questo tipo

$$\|D^j u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|D^m u\|^{\alpha}_{L^r(\Omega)}\|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)} + C_1\|u\|_{L^s(\Omega)},$$

   questo segue dal fatto che se u verifica la disuguaglianza, anche $u + \tilde{C}$ deve verificarla. La costante dipenderà dal dominio.

6. Per un opportuno p, stime analoghe sono valide per le p-norme delle $D^j u$ su sottospazi vettoriali di dimensione minore.

7. Una disuguaglianza simile esiste per le derivate frazionarie ma la dimostrazione è tutt'altro che elementare.

Descriviamo ora brevemente quale sarà la strategia che useremo per dimostrare il teorema. Gli step principali della nostra dimostrazione saranno:

1. per ogni funzione $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ le cui derivate di ordine m stanno in $L^r(\mathbb{R}^n)$ dimostreremo per ogni $j \in \mathbb{N}$ per cui $0 \leq j \leq m-1$ la seguente disuguaglianza

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{\frac{j}{m}} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{j}{m}}, \qquad \frac{1}{p} = \frac{j}{mr} + \frac{m-j}{mq}; \tag{1.9}$$

2. per ogni funzione $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ le cui derivate di ordine m stanno in $L^r(\mathbb{R}^n)$ dimostreremo per ogni $j \in \mathbb{N}$ per cui $0 \leq j \leq m-1$ la seguente disuguaglianza

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \qquad \frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{m-j}{n}; \tag{1.10}$$

3. grazie alle relazioni (1.10) e (1.9), possiamo applicare un processo di interpolazione che ci fornisce la disuguaglianza finale (1.4) con le relazioni (1.5).

Ognuno di questi step, poi, ha bisogno dello sviluppo di casistiche ulteriori, che in tal caso dipenderanno dalle relazioni mutue tra r e n.

Lemma 1.0.6. *Siano $1 \leq p \leq q$ e $\theta \in [0,1]$. Allora per ogni funzione $u \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ vale*

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\theta} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q},$$

e quindi in particolare $u \in L^r(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Sia $r \geq 1$ allora

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^r = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^r \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{r\theta} |u(x)|^{r(1-\theta)} \mathrm{d}x = \||u|^{r\theta}|u|^{r(1-\theta)}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.11}$$

Considerati $s, t \in [1, \infty]$ per cui $s + t = st$, grazie alla disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$\||u|^{r\theta}|u|^{r(1-\theta)}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \||u|^{r\theta}\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \||u|^{r(1-\theta)}\|_{L^t(\mathbb{R}^n)},$$

ossia

$$\||u|^{r\theta}|u|^{r(1-\theta)}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^{rs\theta}(\mathbb{R}^n)}^{r\theta} \|u\|_{L^{rt(1-\theta)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1-\theta)}. \tag{1.12}$$

Grazie a (1.11) e (1.12) otteniamo

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^r \leq \|u\|_{L^{rs\theta}(\mathbb{R}^n)}^{r\theta} \|u\|_{L^{rt(1-\theta)}(\mathbb{R}^n)}^{r(1-\theta)},$$

da cui

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^{rs\theta}(\mathbb{R}^n)} \|u\|^{1-\theta}_{L^{rt(1-\theta)}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.13}$$

Posto $rs\theta = p$ e $rt(1-\theta) = q$ otteniamo per le relazioni su s e t

$$\frac{p}{r\theta} + \frac{q}{r(1-\theta)} = \frac{pq}{r^2\theta(1-\theta)} \Longrightarrow \frac{p}{\theta} + \frac{q}{(1-\theta)} = \frac{pq}{r\theta(1-\theta)},$$

da cui, effettuando i conti,

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{p}{\theta}}{\frac{pq}{\theta(1-\theta)}} + \frac{\frac{q}{1-\theta}}{\frac{pq}{\theta(1-\theta)}} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{p},$$

e la disuguaglianza (1.13) diventa

$$\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Per continuità la (1.13) si estende ai casi in cui gli indici sono infiniti. □

Lemma 1.0.7. *Supponiamo di aver dimostrato la validità di* (1.4) *per il valore* $\alpha = 1$*; allora per* $s < n$ *vale per ogni* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|^{\theta}_{L^s(\mathbb{R}^n)} \|u\|^{1-\theta}_{L^t(\mathbb{R}^n)}, \qquad \theta = \frac{\frac{n}{t}}{1 + \frac{n}{t} - \frac{n}{s}}.$$

Dimostrazione. Grazie alle nostre ipotesi, fissati $0 < \gamma < 1$ e $\epsilon > 0$, grazie al lemma 1.0.6 abbiamo

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq &\quad C\|u\|_{W^{1,r}(\mathbb{R}^n)} = \\
= &\quad C\left[\|Du\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}\right] \leq \\
\leq &\quad C\|Du\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} + C\|u\|^{\gamma}_{L^t(\mathbb{R}^n)} \|u\|^{1-\gamma}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \\
\leq &\quad C\left[\|Du\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} + \frac{\epsilon^{-\frac{1}{\gamma}}}{\gamma}\|u\|_{L^t(\mathbb{R}^n)} + \frac{\epsilon^{\frac{1}{1-\gamma}}}{1-\gamma}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right].
\end{aligned}$$

Se scegliamo $\epsilon = \left[\frac{1-\gamma}{2C}\right]^{1-\gamma}$ otteniamo

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 2C\|Du\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} + 2C\|u\|_{L^t(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.14}$$

e quindi, sostituito $u(x)$ con $u(\lambda x)$, con $\lambda > 0$, nella relazione (1.14) abbiamo

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1\lambda^{1-\frac{n}{s}}\|Du\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} + C_2\lambda^{-\frac{n}{t}}\|u\|_{L^t(\mathbb{R}^n)}.$$

Dunque, posto $A = C_1\|Du\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}$ e $B = C_2\|u\|_{L^t(\mathbb{R}^n)}$ otteniamo

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^{1-\frac{n}{s}}A + \lambda^{-\frac{n}{t}}B = \phi(\lambda). \tag{1.15}$$

La funzione ϕ è derivabile per $\lambda > 0$; poiché $1 - \frac{n}{s} > 0$ e $-\frac{n}{t} < 0$ allora $\lim_{\lambda\to 0^+} \phi(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} \phi(\lambda) = +\infty$, quindi la funzione ammette punto di minimo $\lambda_0 > 0$ per cui $\phi'(\lambda_0) = 0$. Di conseguenza

$$\phi'(\lambda) = A\left(1 - \frac{n}{s}\right)\lambda^{-\frac{n}{s}} - B\frac{n}{t}\lambda^{-1-\frac{n}{t}} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = B^{\frac{1}{1+\frac{n}{t}-\frac{n}{s}}} A^{-\frac{1}{1+\frac{n}{t}-\frac{n}{s}}} K(n,t,s)$$

da cui sostituendo nella relazione (1.15) otteniamo

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le A^{1-\frac{1-\frac{n}{s}}{1-\frac{n}{s}+\frac{n}{t}}} B^{\frac{1-\frac{n}{s}}{1+\frac{n}{t}-\frac{n}{s}}} K^{1-\frac{n}{s}} + B^{1+\frac{-\frac{n}{t}}{1+\frac{n}{t}-\frac{n}{s}}} A^{\frac{\frac{n}{t}}{1+\frac{n}{t}}-\frac{n}{s}} K^{-\frac{n}{t}} =$$

$$= [K^{1-\frac{n}{s}} + K^{-\frac{n}{t}}]A^\theta B^{1-\theta} = C\|Du\|^\theta_{L^s(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\theta}_{L^t}$$

ove $\theta = \frac{\frac{n}{t}}{1+\frac{n}{t}-\frac{n}{s}}$. □

Lemma 1.0.8. *Supponiamo di aver dimostrato la validità di* (1.4) *per il valore $\alpha = 1$; allora per $s > n$ vale per ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \le C\|Du\|^\theta_{L^s(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\theta}_{L^t(\mathbb{R}^n)}, \qquad \theta = \frac{\frac{n}{t} + \gamma}{1 - \frac{n}{s} + \frac{n}{t}}.$$

Dimostrazione. Grazie alle nostre ipotesi, fissato $0 < \gamma < 1 - \frac{n}{s}$, abbiamo

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + [u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{W^{1,s}(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= C\left(\|Du\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}\right) \le C\left(\|Du\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^t(\mathbb{R}^n)}\right) + \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

da cui ricaviamo

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \le C\left(\|Du\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^t(\mathbb{R}^n)}\right). \tag{1.16}$$

Inserendo nella relazione (1.16) la funzione $u(\lambda x)$, con $\lambda > 0$, al posto di $u(x)$ otteniamo

$$\lambda^\gamma[u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \le C\left[\lambda^{1-\frac{n}{s}}\|Du\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} + \lambda^{-\frac{n}{t}}\|u\|_{L^t(\mathbb{R}^n)}\right],$$

da cui, posto $A = C\|Du\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}$ e $B = C\|u\|_{L^t(\mathbb{R}^n)}$, ricaviamo

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \le \lambda^{1-\frac{n}{s}-\gamma}A + \lambda^{-\frac{n}{t}-\gamma}B = \phi(\lambda), \qquad 1 - \frac{n}{s} - \gamma > 0 > -\frac{n}{t} - \gamma. \tag{1.17}$$

Dal momento che ϕ è derivabile, $\phi \ge 0$ e $\lim_{\lambda\to 0^+} \phi(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \phi(\lambda) = +\infty$, minimizzando la funzione ϕ sui $\lambda > 0$ otteniamo che il punto di minimo λ_0 rispetta $\phi'(\lambda_0) = 0$, ossia

$$\phi'(\lambda) = \left(1 - \frac{n}{s} - \gamma\right)A\lambda^{-\frac{n}{s}-\gamma} - B\frac{n}{t}\lambda^{-\frac{n}{t}-1-\gamma} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \left[\frac{\frac{n}{t}B}{\left(1 - \frac{n}{s} - \gamma\right)A}\right]^{\frac{1}{1+\frac{n}{t}-\frac{n}{s}}}.$$

Sostituendo questo valore λ_0 nella relazione (1.17) otteniamo

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq KB^{\frac{1-\frac{n}{s}-\gamma}{1-\frac{n}{s}+\frac{n}{t}}} A^{\frac{\frac{n}{t}+\gamma}{1-\frac{n}{s}+\frac{n}{t}}} = K\|u\|_{L^t(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1-\frac{n}{s}-\gamma}{1-\frac{n}{s}+\frac{n}{t}}} \|Du\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\frac{n}{t}+\gamma}{1-\frac{n}{s}+\frac{n}{t}}}.$$

$\square$

Enunciamo e dimostriamo, infine, un risultato di interpolazione che ci permetterà di ottenere la nostra disuguaglianza:

Teorema 1.0.9. *Supponiamo di aver dimostrato la validità di* (1.4) *per i valori estremali* $\alpha = \frac{j}{m}$ *e* $\alpha = 1$; *allora essa continua ad essere verificata per ogni* $\alpha \in [\frac{j}{m}, 1]$ *che soddisfi* (1.5).

Dimostrazione. Supponiamo in prima istanza che $p \in [1, +\infty[$. La nostra ipotesi è che valgono

$$\|D^j u\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}, \quad \|D^j u\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{\frac{j}{m}} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{j}{m}}, \tag{1.18}$$

con le seguenti relazioni sugli esponenti

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1}{r} - \frac{m-j}{n}, \qquad \frac{1}{p_2} = \frac{j}{n} + \frac{j}{m}\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + \frac{1-\frac{j}{m}}{q}. \tag{1.19}$$

Allora sfruttando entrambe le disuguaglianze in (1.18), e grazie al lemma 1.0.6, otteniamo

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|D^j u\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)}^{\theta} \|D^j u\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta} \leq C_1^{\theta} C_2^{1-\theta} \|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{\theta + \frac{(1-\theta)j}{m}} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{\frac{(m-j)(1-\theta)}{m}}$$

quando

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2} \quad \text{e} \quad \theta \in [0,1].$$

Inoltre, grazie alla relazione (1.19), vale che

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} = {} & \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2} = \\
= {} & \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{m-j}{n}\right) + (1-\theta)\left(\frac{j}{n} + \frac{j}{m}\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + \frac{1-\frac{j}{m}}{q}\right) = \\
= {} & (\theta + 1 - \theta)\frac{j}{n} + \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + (1-\theta)\frac{j}{m}\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + \frac{(1-\theta)\left(1-\frac{j}{m}\right)}{q} = \\
= {} & \frac{j}{n} + \left[\theta + (1-\theta)\frac{j}{m}\right]\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + \frac{(1-\theta)\left(1-\frac{j}{m}\right)}{q} = \\
= {} & \frac{j}{n} + \alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + \frac{1-\alpha}{q}.
\end{aligned}$$

Sia ora $p = +\infty$. Applichiamo il lemma 1.0.7 a $D^j u$ e otteniamo

$$\|D^j u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C\|D^{j+1}u\|^{\theta}_{L^s(\mathbb{R}^n)}\|D^j u\|^{1-\theta}_{L^t(\mathbb{R}^n)}, \qquad \theta = \frac{\frac{n}{t}}{1+\frac{n}{t}-\frac{n}{s}}. \tag{1.20}$$

Inoltre, grazie alle nostre ipotesi, valgono

$$\|D^{j+1}u\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \le c_1\|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}, \qquad \|D^j u\|_{L^t(\mathbb{R}^n)} \le c_2\|D^m u\|^{\frac{j}{m}}_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\frac{j}{m}}_{L^q(\mathbb{R}^n)} \tag{1.21}$$

con le seguenti relazioni sugli esponenti

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{m-j-1}{n}, \qquad \frac{1}{t} = \frac{j}{n} + \frac{j}{m}\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right) + \frac{1-\frac{j}{m}}{q}. \tag{1.22}$$

Allora sfruttando entrambe le disuguaglianze in (1.21) e la (1.20), otteniamo

$$\|D^j u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le Cc_1^{\theta}c_2^{1-\theta}\|D^m u\|^{\theta+\frac{(1-\theta)j}{m}}_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{\frac{(m-j)(1-\theta)}{m}}_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Inoltre, grazie alle relazioni (1.22) e (1.20), vale che

$$\begin{aligned}
0 = \quad & \theta\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{n}\right) + \frac{1-\theta}{t} = \\
= \quad & \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{m-j-1}{n} - \frac{1}{n}\right) + (1-\theta)\left(\frac{j}{n} + \frac{j}{m}\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right) + \frac{1-\frac{j}{m}}{q}\right) = \\
= \quad & (\theta+1-\theta)\frac{j}{n} + \left[\theta + (1-\theta)\frac{j}{m}\right]\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right) + \frac{(1-\theta)\left(1-\frac{j}{m}\right)}{q} = \\
= \quad & \frac{j}{n} + \alpha\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right) + \frac{1-\alpha}{q}.
\end{aligned}$$

Per concludere analizziamo il caso $p < 0$. Applichiamo il lemma 1.0.8 a $D^{k+j}u$, dove $k = \left[-\frac{n}{p}\right]$, e otteniamo

$$[D^{k+j}u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \le C\|D^{k+j+1}u\|^{\theta}_{L^s(\mathbb{R}^n)}\|D^{k+j}u\|^{1-\theta}_{L^t(\mathbb{R}^n)}, \qquad \theta = \frac{\frac{1}{t}+\frac{\gamma}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{t}-\frac{1}{s}}. \tag{1.23}$$

Inoltre, grazie alle nostre ipotesi, valgono

$$\|D^{k+j+1}u\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \le c_1\|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}, \quad \|D^{k+j}u\|_{L^t(\mathbb{R}^n)} \le c_2\|D^m u\|^{\frac{k+j}{m}}_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\frac{k+j}{m}}_{L^q(\mathbb{R}^n)} \tag{1.24}$$

con le seguenti relazioni sugli esponenti

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{m-j-k-1}{n}, \qquad \frac{1}{t} = \frac{k+j}{n} + \frac{k+j}{m}\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right) + \frac{1-\frac{k+j}{m}}{q}. \tag{1.25}$$

Allora sfruttando entrambe le disuguaglianze in (1.24) e la (1.23), otteniamo

$$[D^{k+j}u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq Cc_1^{\theta}c_2^{1-\theta}\|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{\theta+(1-\theta)\frac{k+j}{m}}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{(1-\theta)\left(1-\frac{k+j}{m}\right)}.$$

Inoltre posto $i = k + j$, grazie alle relazioni (1.23) e (1.25), vale che

$$\begin{aligned}
-\frac{\gamma}{n} = &\quad \theta\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1-\theta}{t} = \\
= &\quad \theta\left(\frac{1}{r}-\frac{m-i-1}{n}-\frac{1}{n}\right)+(1-\theta)\left(\frac{i}{n}+\frac{i}{m}\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)+\frac{1-\frac{i}{m}}{q}\right) = \\
= &\quad (\theta+1-\theta)\frac{i}{n}+\left[\theta+(1-\theta)\frac{i}{m}\right]\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)+\frac{(1-\theta)\left(1-\frac{i}{m}\right)}{q} = \\
= &\quad \frac{i}{n}+\alpha\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)+\frac{1-\alpha}{q},
\end{aligned}$$

ossia

$$-\frac{\gamma+k}{n} = \frac{j}{n}+\alpha\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)+\frac{1-\alpha}{q}. \tag{1.26}$$

Posto $\gamma = -\frac{n}{p} - k$ allora $[D^{k+j}u]_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} = \|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ e la relazione (1.26) diviene

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n}+\alpha\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)+\frac{1-\alpha}{q}.$$

□

1.1 Regolarità geometrica dei domini euclidei

Molte delle proprietà degli spazi di Sobolev definiti su domini $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, e in particolare le proprietà di immersione di questi spazi, dipendono dalla regolarità di Ω stesso. Tale regolarità solitamente è espressa in termini di condizioni geometriche o analitiche che un dato dominio soddisfa. Il teorema 1.0.9 mostra la connessione tra la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg e il teorema di Sobolev, ragion per cui, tali proprietà di regolarità, diventano importanti anche nel nostro caso. Ora ne preciseremo diverse, considerando le relazioni che intercorrono tra esse.

Definizione 1.1.1. Sia $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e, per ogni $x \neq 0$, indichiamo con $L(x, v)$ l'angolo tra i due vettori. Per ogni dato $v, \rho > 0$ e $0 < k \leq \pi$ definiamo l'insieme

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| \leq \rho, \quad L(x, v) \leq \frac{k}{2}\right\} \cup \{0\},$$

chiamato cono finito di altezza ρ, generatrice v e apertura k con vertice nell'origine.

Definizione 1.1.2. Siano $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}^n$ vettori linearmente indipendenti, definiamo il parallelepipedo con un vertice nell'origine

$$P = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j : \quad 0 \leq \lambda_j \leq 1, \ 1 \leq j \leq n \right\}$$

Osservazione 1.1.3. Se consideriamo, fissato $x \in \mathbb{R}^n$, l'insieme

$$x + C = \{x + y : y \in C\}$$

sarà il cono finito di altezza ρ, generatrice la retta parallela v e passante per x, e apertura k con vertice in x. In modo analogo $x+P$ sarà il parallelepipedo congruente a P con vertice in x e centro $x + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} y_j$. Ogni parallelepipedo con vertice in x è contenuto in un cono finito con lo stesso vertice, e viceversa.

Definizione 1.1.4. Un ricoprimento aperto di un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice localmente finito se ogni insieme compatto in $\mathbb{R}^n$ interseca al massimo un numero finito di aperti del ricoprimento.

Osservazione 1.1.5. Se Ω è chiuso, allora qualsiasi ricoprimento aperto di Ω, fatto da insiemi con un limite inferiore sui diametri, possiede un sottoricoprimento localmente finito.

Fissato $\delta > 0$, indicheremo l'insieme dei punti di Ω a distanza minore di δ dalla frontiera con

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$$

Definizione 1.1.6 (Condizione del Segmento). Un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ soddisfa la condizione del segmento se per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un intorno U_x e un vettore y_x non nullo tale che se $z \in \overline{\Omega} \cap U_x$, allora $z + ty_x \in \Omega$ per ogni $0 < t < 1$.

Osservazione 1.1.7. Poiché la frontiera di Ω è necessariamente un insieme chiuso, si può sostituire il ricoprimento aperto costituito dagli intorni U_x con un sottoricoprimento localmente finito $\{U_1, U_2, ...\}$ con i corrispondenti vettori $y_l, y_2, ...$ tali che se $x \in \overline{\Omega} \cap U_j$ per qualche j, allora $x + ty_j \in \Omega$ per ogni $0 < t < 1$.

Definizione 1.1.8 (Condizione di Cono). $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ soddisfa la condizione di cono se esiste un cono finito C tale che ogni $x \in \Omega$ sia il vertice di un cono finito $C_x \subset \Omega$ e congruente a C.

Definizione 1.1.9 (Condizione uniforme di Cono). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremo che soddisfa la condizione uniforme di cono se esiste un ricoprimento aperto localmente finito $\{U_j\}$ di $\partial\Omega$ ed una corrispondente successione $\{C_j\}$ di coni finiti, ognuno congruente ad un fissato cono finito C, tale che

1. esiste $M > 0$ tale che ogni U_j ha un diametro inferiore a M;
2. $\Omega_\delta \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$ per un certo $\delta > 0$;
3. $Q_j = \bigcup_{x \in \Omega \cap U_j}(x + C_j) \subset \Omega$ per ogni j;
4. esiste $R > 0$ per cui ogni collezione di insiemi Q_j fatta da $R+1$ elementi, ha intersezione vuota.

Osservazione 1.1.10. La condizione uniforme di cono implica quella di cono. Consideriamo $x \in \Omega$ con il dominio che rispetti la prima condizione citata. Distinguiamo due casi: se $x \in \Omega_\delta$, per ipotesi esiste j per cui

$$x \in U_j \cap \Omega, \text{ quindi } x + C_j \subset Q_j \subset \Omega.$$

Se invece $x \notin \Omega_\delta$, e non esiste alcuna direzione per cui il cono prefissato centrato in x stia tutto in Ω allora vale che

$$\delta \leq \text{dist}(x, \partial\Omega) < h$$

dove h è l'altezza del cono prefissato. Possiamo rimpicciolire l'altezza del cono fino a che non sia contenuto in Ω (nei punti dove il cono vecchio andava bene a maggior ragione andrà bene il cono nuovo più piccolo). E questo conclude l'osservazione.

Definizione 1.1.11 (Condizione forte di locale Lipschitzianità). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, diremo che soddisfa la condizione forte di locale Lipschitzianità, se esistono numeri positivi δ e M, un ricoprimento aperto localmente finito $\{U_j\}$ di $\partial\Omega$, e, per ogni j, una funzione a valori reali f_j di $n-1$ variabili, tale che valgano le seguenti condizioni:

1. esiste $R > 0$ per cui ogni collezione di insiemi U_j fatta da $R+1$ elementi, ha intersezione vuota;
2. per ogni coppia di punti $x, y \in \Omega_\delta$ per cui $|x-y| < \delta$, esiste j tale che
$$x, y \in V_j = \{x \in U_j : \text{dist}(x, \partial U_j) > \delta\};$$
3. ogni funzione f_j soddisfa la condizione di Lipschitz con costante M:
$$|f(\xi) - f(\rho)| \leq M|\xi - \rho|, \qquad \xi, \rho \in \mathbb{R}^{n-1};$$

4. esiste un sistema di coordinate cartesiane $(\zeta_{j_1}, ..., \zeta_{j_n})$ in U_j, per cui

$$\Omega \cap U_j = \{\zeta_{j_n} < f_j(\zeta_{j_1}, ..., \zeta_{j_{n-1}})\}.$$

Osservazione 1.1.12. Se Ω è limitato, il variegato insieme di condizioni sopra citate si riduce alla semplice condizione che $\partial\Omega$ debba essere localmente lipschitziana, cioè, ogni punto $x \in \partial\Omega$ deve avere un intorno U_x la cui intersezione con $\partial\Omega$ deve essere il grafico di una funzione lipschitziana.

Definizione 1.1.13. Siano $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ una trasformazione biunivoca con inversa $\psi = \phi^{-1}$. Diremo che ϕ è un diffeomorfismo di classe C^m, se quando scriviamo $y = \phi(x)$ e $x = \psi(y)$ nella forma

$$y_i = \phi_i(x_1, ..., x_n) \qquad x_i = \psi_i(y_1, ..., y_n) \qquad i = 1, ..., n$$

allora $\phi_i \in C^m(\overline{\Omega}_1)$ e $\psi_i \in C^m(\overline{\Omega}_2)$ per ogni $i = 1, ..., n$.

Definizione 1.1.14 (Condizione uniforme di regolarità C^m). Consideriamo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, diremo che soddisfa la condizione uniforme di regolarità C^m se esiste un ricoprimento aperto localmente finito $\{U_j\}$ di $\partial\Omega$, e una corrispondente successione $\{\phi_j\}$ di diffeomorfismi di classe C^m, con ϕ_j che mappa U_j sulla sfera $B(0,1)$ e con inversa ψ_j, per cui:

1. esiste $R > 0$ per cui ogni collezione di insiemi U_j fatta da $R+1$ elementi, ha intersezione vuota;
2. $\Omega_\delta \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \psi_j(\{y \in \mathbb{R}^n : |y| < \frac{1}{2}\})$ per un certo $\delta > 0$;
3. $\phi_j(U_j \cap \Omega) = \{y \in B(0,1) : y_n > 0\}$ per ogni j;
4. dette $\phi_j = (\phi_{j_1}, ..., \phi_{j_n})$ e $\psi_j = (\psi_{j_1}, ..., \psi_{j_n})$ le componenti, allora esiste $M > 0$ tale che per ogni $0 < |\alpha| \leq M$, ogni $1 \leq i \leq n$, e ogni j soddisfino
$$|D^\alpha \phi_{j_i}(x)| \leq M \qquad \forall x \in U_j,$$
$$|D^\alpha \psi_{j_i}(y)| \leq M \quad \forall y \in B(0,1).$$

Osservazione 1.1.15. Fatta eccezione per la condizione di cono, le altre condizioni definite sopra, richiedono tutte che la frontiera di Ω sia $(n-1)$-dimensionale e che Ω giaccia da una sola parte rispetto a $\partial\Omega$. Abbiamo le seguenti implicazioni:
Condizione uniforme di regolarità C^m con $m \geq 2 \Longrightarrow$ Condizione forte di locale lipschitzianità $\Longrightarrow$ Condizione uniforme di cono $\Longrightarrow$ Condizione del segmento.

Abbiamo anche:
Condizione uniforme di cono $\Longrightarrow$ Condizione di cono.
Tipicamente, la maggior parte delle immersioni di $W^{m,p}(\Omega)$ sono state dimostrate per i domini soddisfacenti la condizione di cono. Fanno eccezione le immersioni in spazi $C^{0,\gamma}(\Omega)$ e $C^{k,\gamma}(\Omega)$ di funzioni uniformemente continue che, richiedono che Ω stia tutto da un lato rispetto alla frontiera. Queste immersioni sono di solito provate per i domini che soddisfano la condizione forte di locale lipschitzianità. Tuttavia, per mostrare le immersioni di $W_0^{m,p}(\Omega)$ non abbiamo bisogno di nessuna di queste condizioni di regolarità su Ω.

Controesempio 1.1.16. *Consideriamo i seguenti insiemi*

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x - y = 0, \quad x, y \geq 0\}.$$

Il dominio $\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$ ha la proprietà di cono ma non quella uniforme, infatti l'insieme non sta tutto da una parte rispetto alla frontiera.

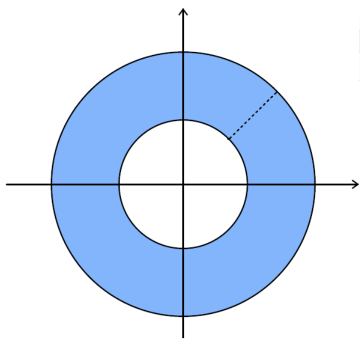


Figura 1.3: Es. (1.1.16)

Enunciamo e dimostriamo ora un teorema che mette in relazione la condizione di cono con la forte locale lipschitzianità

Teorema 1.1.17. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ che soddisfi la condizione di cono. Allora esiste una collezione finita $\{\Omega_1, ..., \Omega_N\}$ di sottoinsiemi aperti di Ω per cui $\Omega = \cup_{j=1}^N \Omega_j$, e tali che ogni Ω_j sia associato a un $A_j \subset \Omega_j$ e a un parallelepipedo aperto P_j con un vertice nell'origine per cui $\Omega_j = \cup_{x \in A_j}(x + P_j)$.*
Se Ω è limitato, allora, fissato $\rho > 0$, la decomposizione è valida in maniera che $diam(A_j) < \rho$ per ogni j.
Se Ω è limitato e $\rho > 0$ è sufficientemente piccolo, allora ogni Ω_j soddisferà la condizione forte di locale Lipschizianità.

Dimostrazione. Sia C il cono finito con vertice nell'origine per cui ogni $x \in \Omega$ sia il vertice di un cono $C_x \subset \Omega$ congruente a C. Possiamo considerare un numero finito di coni finiti $C_1, ..., C_N$ ognuno dei quali abbia vertice nell'origine (stessa altezza di C ma apertura inferiore) e tali che ogni cono finito congruente a C e con vertice nell'origine, contenga uno dei coni C_j. Per ogni j, sia P_j un parallelepipedo aperto con vertice nell'origine, contenuto in C_j, e avente volume positivo. In virtù di ciò, per ogni $x \in \Omega$ esiste j compreso tra 1 e N, per cui $x + P_j \subset x + C_j \subset C_x \subset \Omega$. Dal momento che Ω è aperto e $\overline{x + P_j}$ è compatto, allora $y + P_j \subset \Omega$ per ogni y sufficientemente vicino a x. Perciò ogni $x \in \Omega$ appartiene, per qualche j e $y \in \Omega$, a $y + P_j$. Poniamo $A_j = \{y \in \overline{\Omega} : y + P_j \subset \Omega\}$ e $\Omega_j = \cup_{y \in A_j}(y + P_j)$, da cui ricaviamo $\Omega = \cup_{j=1}^{N} \Omega_j$.
Ora supponiamo che Ω sia limitato e sia $\rho > 0$ fissato. Se $\mathrm{diam}(A_j) \geq \rho$ possiamo decomporre A_j in un'unione finita di sottoinsiemi A_{j_i} ciascuno con diametro inferiore a ρ, e possiamo definire il corrispondente parallelepipedo $P_{j_i} = P_j$. Rinominiamo la totalità di questi insiemi A_{j_i} come una sola famiglia finita, che chiameremo nuovamente A_j e definiamo Ω_j come sopra.
Infine, dimostriamo che se ρ è sufficientemente piccolo, allora Ω soddisfa la condizione forte di locale lipschitzianità. Per semplicità di notazione, siano $G = \cup_{x \in A}(x + P)$, dove $\mathrm{diam}(A) < \rho$ e P è un parallelepipedo fissato. Mostriamo che G soddisfa la condizione forte di locale lipschitzianità, se ρ è scelto opportunamente. Per ogni vertice v_j di P definiamo $Q_j = \{y = v_j + \lambda(x - v_j) : x \in P, \lambda > 0)$ la piramide infinita di vertice v_j generata da P. Allora $P = \cap Q_j$, l'intersezione deve essere fatta su tutti i 2^n vertici di P. Sia $G_j = \cup_{x \in A}(x + Q_j)$. Sia δ la distanza dal centro di P alla frontiera di P e sia B una palla arbitraria di raggio $\sigma = \frac{\delta}{2}$. Per qualsiasi $x \in G$, B non può intersecare facce opposte di $x + P$, così possiamo scegliere un v_j vertice di P con la proprietà che $x + v_j$ sia comune a tutte le facce di $x + P$ che intersecano B, se tali facce esistono. Allora $B \cap (x + P) = B \cap (x + Q_j)$. Siano ora $x, y \in A$ e supponiamo che B possa intersecare facce relativamente opposte di $x + P$ e $y + P$, cioè, esistono punti a e b su facce opposte di P tale che $x + a \in B$ e $y + b \in B$. Allora

$$\rho \geq \mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(x + b, y + b) \geq \mathrm{d}(x + b, x + a) - \mathrm{d}(x + a, y + b) \geq 2\delta - 2\sigma = \delta.$$

Ne consegue che se $\rho < \delta$, allora B non può intersecare facce relativamente opposte di $x + P$ e $y + P$ per ogni $x, y \in A$. Quindi $B \cap (x + P) = B \cap (x + Q_j)$ per qualche j indipendente da $x \in A$, perciò $B \cap G = B \cap G_j$. Scegliamo coordinate $\xi = (\xi', \xi_n) = (\xi_1, ..., \xi_{n-1}, \xi_n)$ in B di modo che l'ennesimo asse sia positivamente orientato nella direzione del vettore dal centro di P al vertice v_j. Allora $B \cap (x + Q_j)$ è definito in B da una disuguaglianza della forma $\xi_n < f_x(\xi')$, dove f_x soddisfa la condizione di lipschitzianità con costante indipendente da x. Allora $B \cap G_j$, e quindi $B \cap G$, è definito dalla disuguaglianza $\xi_n < f(\xi')$, dove $f(\xi') = \sup_{x\in A} f_x(\xi')$ è essa stessa una funzione lipschitziana. Dal momento che questo può essere fatto per una palla B centrata in un qualsiasi punto della frontiera G, segue che G soddisfa la condizione forte di locale lipschitzianità. □

1.2 Primo step: caso $\alpha = \frac{j}{m}$

Consideriamo in prima istanza il caso $\alpha = \frac{j}{m}$; analizzeremo la situazione solo in un caso particolare, nello specifico $j = 1$ e $m = 2$, dal quale ricaveremo il caso generale. La successiva proposizione dimostra proprio il nostro caso specifico.

Proposizione 1.2.1. *Siano $r, q \in [1, \infty]$. Allora per ogni funzione che rispetta $u \in L^q(\mathbb{R}^n) \cap W^{2,r}(\mathbb{R}^n)$ vale la seguente disuguaglianza*

$$\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D^2u\|^{\frac{1}{2}}_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \qquad \frac{2}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}. \tag{1.27}$$

Dimostrazione. Sia $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora per ogni $p \geq 2$ vale $v|v|^{p-2} \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ e di conseguenza per ogni $j = 1, ..., n$, usando la regola di Leibniz,

$$\partial_j(v|v|^{p-2}) = (\partial_j v)|v|^{p-2} + v \cdot (p-2)|v|^{p-3} \cdot \frac{|v|}{v} \cdot (\partial_j v) = (p-1)(\partial_j v)|v|^{p-2}. \tag{1.28}$$

Poniamo allora $v = \partial_j u$, ottenendo

$$\partial_j(u\partial_j u|\partial_j u|^{p-2}) - (p-1)u\partial_j^2 u|\partial_j u|^{p-2} = \partial_j(uv|v|^{p-2}) - (p-1)u\partial_j v|v|^{p-2} =$$

$$= (\partial_j u)v|v|^{p-2} + u\partial_j(v|v|^{p-2}) - (p-1)u\partial_j v|v|^{p-2} = (\partial_j u)v|v|^{p-2} = |\partial_j u|^p$$

dove la prima uguaglianza è valida per le nostre imposizioni, la seconda per la regola di Leibniz e la terza grazie all'utilizzo di (1.28). Integriamo ora i termini estremi della nostra uguaglianza e otteniamo

$$\|\partial_j u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u\partial_j u|\partial_j u|^{p-2}(., x_j, .)|^{+\infty}_{-\infty} \mathrm{d}x^{n-1} - \int_{\mathbb{R}^n} (p-1)u\partial_j^2 u|\partial_j u|^{p-2}\mathrm{d}x \leq$$

$$\leq |p-1|\|u\partial_j^2 u|\partial_j u|^{p-2}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq |p-1|\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\|\partial_j^2 u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|\partial_j u\|^{p-2}_{L^{\gamma(p-2)}(\mathbb{R}^n)},$$

dove la seconda disuguaglianza vale in virtù della disuguaglianza di Hölder $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{\gamma} = 1$. Imponendo che $\gamma(p-2) = p$, sostituendo nell'ultima uguaglianza ricaviamo $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{p}$ e

$$\|\partial_j u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq |q-1|\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\|\partial_j^2 u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|\partial_j u\|^{p-2}_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

che implica la tesi a patto di estendere il nostro risultato per densità. $\square$

Avendo dimostrato la proposizione 1.2.1, il successivo teorema estende il caso particolare e conclude il primo step, nonché la sezione.

Teorema 1.2.2. *Siano* $\alpha = \frac{j}{m}$ *e* $j, m \in \mathbb{N}$ *tali che rispettino* (1.5)*; allora vale la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg* (1.4)*.*

Dimostrazione. Dimostreremo per induzione su m che vale

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D^m u\|^{\frac{j}{m}}_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\frac{j}{m}}_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \qquad \frac{m}{p} = \frac{j}{r} + \frac{m-j}{q}, \quad 1 \leq j < m.$$

Il passo base $m = 2$ sappiamo essere vero per $j = 1$ grazie alla proposizione 1.2.1. Supponiamo che valga la tesi per ogni $1 \leq j < m$ e consideriamo il caso $m + 1$, con

$$\frac{m+1}{p} = \frac{j}{r} + \frac{m+1-j}{q} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

Facciamo un'induzione su j all'indietro. Applichiamo la proposizione 1.2.1 a $D^m u$ ottenendo

$$\|D^m u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D^{m+1}u\|^{\frac{1}{2}}_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|D^{m-1}u\|^{\frac{1}{2}}_{L^t(\mathbb{R}^n)}, \qquad \frac{2}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{t}. \tag{1.29}$$

Per ipotesi induttiva ($m - 1$ è uno degli indici $j < m$) otteniamo che

$$\|D^{m-1}u\|_{L^t(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D^m u\|^{\frac{m-1}{m}}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{\frac{1}{m}}_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \qquad \frac{m}{t} = \frac{m-1}{p} + \frac{1}{q}. \tag{1.30}$$

Componendo le disuguaglianze (1.29) e (1.30) e le relative condizioni su p, r, t, m, q otteniamo

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{t} = \frac{1}{r} + \frac{m-1}{mp} + \frac{1}{mq} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{m+1}{p} = \frac{m}{r} + \frac{1}{q} \tag{1.31}$$

e

$$\|D^m u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D^{m+1}u\|^{\frac{1}{2}}_{L^r(\mathbb{R}^n)}\left[C\|D^m u\|^{\frac{m-1}{m}}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{\frac{1}{m}}_{L^q(\mathbb{R}^n)}\right]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= C\|D^{m+1}u\|^{\frac{1}{2}}_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|D^m u\|^{\frac{m-1}{2m}}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{\frac{1}{2m}}_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

da cui si ricava

$$\|D^m u\|^{\frac{m+1}{2m}}_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|D^m u\|^{1-\frac{m-1}{2m}}_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D^{m+1}u\|^{\frac{1}{2}}_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{\frac{1}{2m}}_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Elevando entrambi i membri alla giusta potenza per cui l'esponente del primo membro diventi unitario, otteniamo

$$\|D^m u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D^{m+1}u\|^{\frac{m}{m+1}}_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{\frac{1}{m+1}}_{L^q(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.32}$$

Mettendo insieme (1.31) e (1.32) otteniamo la prova del caso $m + 1$ con $j = 1, ..., m$, e quindi completiamo il passo induttivo. Ne segue la tesi. $\square$

1.3 Secondo step: Il teorema di Sobolev

Consideriamo ora il caso $\alpha = 1$, che come abbiamo visto corrisponde al teorema di Sobolev. In questo caso la relazione (1.5) assume la seguente forma

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{m-j}{n},$$

la quale identifica alcuni casi distinti. Imponendo la validità di $r < \frac{n}{m-j}$ otteniamo che $p \in]1, +\infty[$, in caso contrario $\frac{1}{p} \leq 0$. In quest'ultima situazione dobbiamo richiedere una ulteriore condizione ossia che $m - j - \frac{n}{r} = k \notin \mathbb{N}$, perché se così non fosse, allora avremmo che

$$\begin{aligned} &\|D^j u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|D^m u\|_{L^{\frac{n}{m-j}}(\mathbb{R}^n)} && r = \frac{n}{m-j} \\ &\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|D^{k+j}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} && r > \frac{n}{m-j} \end{aligned}$$

ma sappiamo che $W^{h,r}(\mathbb{R}^n)$ non si immerge in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ quando $hr = n$ come mostra il seguente controesempio per $h = 1$ e $r = n$:

Controesempio 1.3.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto contenente l'origine e poniamo $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$. Fissiamo R per cui $\overline{B_{2R}} \subset \Omega$, poniamo $v(x) = \log\left(\log\left(\frac{4R}{|x|}\right)\right)$ e*

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & x \in B_R \\ 0 & x \in \Omega \setminus B_{2R} \end{cases} \tag{1.33}$$

Allora $u \in W^{1,n}(\Omega)$ se e solo se $v \in W^{1,n}(B_R)$. Mostriamo quindi che $v \in W^{1,n}(B_R)$. Calcoliamone la derivata, ottenendo

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\log\left(\frac{4R}{|x|}\right)} \cdot \frac{|x|}{4R} \cdot \left(-\frac{4R}{|x|^2} \cdot \frac{x_i}{|x|}\right) \Longrightarrow \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|^n = \frac{1}{\left|\log\left(\frac{4R}{|x|}\right)\right|^n} \cdot \frac{|x_i|^n}{|x|^{2n}},$$

quindi integrando entrambi i membri otteniamo

$$\int_{B_R} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\right|^n \mathrm{d}x = \int_{B_R} \frac{1}{\left|\log\left(\frac{4R}{|x|}\right)\right|^n} \cdot \frac{|x_i|^n}{|x|^{2n}} \mathrm{d}x \leq \int_{B_R} \frac{1}{|x|^{2n} \log\left(\frac{4R}{|x|}\right)^n} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\partial B_1} \int_0^R \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{2n} \log(4R\rho^{-1})^n} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\omega = C \int_0^R \frac{1}{\rho^{n+1} \log(4R\rho^{-1})^n} \mathrm{d}\rho < \infty,$$

ossia $v \in W^{1,n}(B_R)$ e quindi $u \in W^{1,n}(\Omega)$, ma come si vede u è infinita in 0 e perciò $u \notin L^\infty(\Omega)$.

Analizzeremo quindi, in questo capitolo, i seguenti casi

1. $r < \frac{n}{m-j}$ al variare di $0 \leq j < m$;
2. $r > \frac{n}{m-j}$ e $m - j - \frac{n}{r} \notin \mathbb{N}$ al variare di $0 \leq j < m$.

Studieremo questi casi solo per i valori $j = 0$ e $m = 1$ dai quali ricaveremo il caso generale, come segue dal seguente teorema:

Teorema 1.3.2. *Supponiamo che* (1.4) *sia verificata per* $\alpha = 1$*,* $j = 0$ *e* $m = 1$*; allora essa stessa è ancora verificata per* $\alpha = 1$ *e*

1. *per ogni* j *e* m *che verifichino l'identità* (1.5) *se* $r < \frac{n}{m-j}$*;*
2. *per ogni* j *e* m *tali che* $m - j - \frac{n}{r} \notin \mathbb{N}^+$ *e che verifichino l'identità* (1.5) *se* $r > \frac{n}{m-j}$*.*

Dimostrazione. La nostra ipotesi è che vale

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{0,1}\|Du\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{n}. \tag{1.34}$$

Dimostriamo per induzione su k che vale

$$\|D^j v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{j,k}\|D^{j+k} v\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{k}{n}, \tag{1.35}$$

cosicché imponendo nella (1.35) il valore $k = m - j$ otterremo la validità dell'identità (1.5). Partiamo con il passo base dell'induzione; esso è verificato in quanto basta, nella (1.34), porre $u = D^j v$, ottenendo effettivamente la (1.35) con $k = 1$. Supponiamo allora la tesi verificata per k e dimostriamola per $k + 1$.

$$C_{0,1}C_{j,k}\|D^{j+k+1}u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = C_{0,1}C_{j,k}\|D(D^{j+k}u)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \geq$$

$$\geq C_{j,k}\|D^{j+k}u\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \geq \|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{k}{n}$$

dove la prima disuguaglianza è vera applicando (1.34) alla funzione $D^{j+k}u$, mentre la seconda per ipotesi induttiva. Ponendo $C_{j,k+1} = C_{0,1}C_{j,k}$ otteniamo la tesi

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{j,k+1}\|D^{j+k+1}u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{s} - \frac{k}{n} = \frac{1}{r} - \frac{1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{r} - \frac{k+1}{n}.$$

□

Ci apprestiamo ora a dimostrare la disuguaglianza di Sobolev, distinguendo i due casi prima introdotti.

1.3.1 Caso $r < \frac{n}{m-j}$

In questo caso, l'esponente $p = \frac{rn}{n-r(m-j)} > 0$, addirittura come mostra la (1.6) maggiore di 1, e quindi le "norme" precedenti saranno tali nel vero senso matematico del termine. Mettiamoci nella condizione $j = 0$ e $m = 1$ ottenendo $r < n$.

Lemma 1.3.3. *Vale la seguente disuguaglianza per ogni $i = 2, ..., n-1$*

$$\int_i \int_{i-1} ... \int_1 |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_i \leq \left(\prod_{k=i+1}^{n} J_k \right) \left(\prod_{s=1}^{i} I_s \right) \tag{1.36}$$

dove

$$I_s = \Big(\int_i \int_{i-1} ... \int_1 |\partial_s u(x)| \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_i \Big)^{\frac{1}{n-1}}, \qquad J_k = \Big(\int_k I_k^{n-1} \mathrm{d}x_k \Big)^{\frac{1}{n-1}}$$

e l'integrale i-esimo rappresenta l'integrale su tutta la retta reale rispetto all'i-esima variabile.

Dimostrazione. Sia $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$; allora per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ vale

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, .., x_{i-1}, t, x_{i+1}, .., x_n) \mathrm{d}t$$

e passando ai moduli otteniamo per ogni $i = 1, ..., n$

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, .., x_{i-1}, t, x_{i+1}, .., x_n) \right| \mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \mathrm{d}x_i. \tag{1.37}$$

Dimostriamo per induzione su i. Sia $i = 2$ allora, dal momento che vale la (1.37) possiamo ricavare

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\int_j |\partial_j u(x)| \mathrm{d}x_j \right)^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{j=1}^{n} H_j \tag{1.38}$$

allora integrando e applicando la disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$\int_1 |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x_1 \leq H_1 \int_1 \prod_{j=2}^{n} H_j \mathrm{d}x_1 \leq H_1 \prod_{j=2}^{n} \Big(\int_1 H_j^{n-1} \mathrm{d}x_1 \Big)^{\frac{1}{n-1}} =$$

$$= \Big(\int_1 |\partial_1 u(x)| \mathrm{d}x_1 \Big)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{j=2}^{n} \left(\int_1 \int_j |\partial_j u(x)| \mathrm{d}x_j \mathrm{d}x_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} = \Big(\int_1 |\partial_1 u(x)| \mathrm{d}x_1 \Big)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{j=2}^{n} T_j.$$

Integrando nuovamente e applicando alla stessa maniera di prima la disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$\int_2 \int_1 |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \leq T_2 \int_2 \prod_{j=1, j\neq 2}^{n} T_j \mathrm{d}x_2 \leq T_2 \prod_{j=1, j\neq 2}^{n} \Big(\int_2 T_j^{n-1} \mathrm{d}x_2\Big)^{\frac{1}{n-1}} =$$

$$= \Big(\int_1 \int_2 |\partial_2 u(x)| \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_1\Big)^{\frac{1}{n-1}} \Big(\int_2 \int_1 |\partial_1 u(x)| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2\Big)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{j=3}^{n} P_j$$

con $P_j = \big(\int_2 \int_1 \int_j |\partial_j u(x)| \mathrm{d}x_j \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2\big)^{\frac{1}{n-1}}$, che era quello che volevamo mostrare. Terminato il passo base supponiamo che sia vero per i e dimostriamolo per $i+1$. Applicando subito l'ipotesi induttiva e posto

$$M_k = \Big(\int_k \int_i ... \int_1 |\partial_k u(x)| \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_k\Big)^{\frac{1}{n-1}},$$

$$N_s = \Big(\int_i \int_{i-1} ... \int_1 |\partial_s u(x)| \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_i\Big)^{\frac{1}{n-1}}$$

otteniamo

$$\int_{i+1} \int_i ... \int_1 |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_{i+1} \leq \int_{i+1} \prod_{k=i+1}^{n} M_k \prod_{s=1}^{i} N_s \mathrm{d}x_{i+1} =$$

$$= T_{i+1} \int_{i+1} \prod_{k=i+2}^{n} M_k \prod_{s=1}^{i} N_s \mathrm{d}x_{i+1} \leq$$

$$\leq T_{i+1} \prod_{k=i+2}^{n} \Big(\int_{i+1} M_k^{n-1} \mathrm{d}x_{i+1}\Big)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{s=1}^{i} \Big(\int_{i+1} N_k^{n-1} s \mathrm{d}x_{i+1}\Big)^{\frac{1}{n-1}} =$$

$$= \Big(\int_{i+1} \int_i ... \int_1 |\partial_{i+1} u(x)| \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_{i+1}\Big)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{k=i+2}^{n} P_k \prod_{s=1}^{i} R_s \tag{1.39}$$

dove la seconda disuguaglianza è frutto della disuguaglianza di Hölder e

$$P_k = \Big(\int_{i+1} \int_k \int_i ... \int_1 |\partial_k u(x)| \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_{i+1}\Big)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$R_s = \Big(\int_{i+1} \int_i ... \int_1 |\partial_s u(x)| \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_{i+1}\Big)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Notando che

$$\Big(\int_{i+1} \int_i ... \int_1 |\partial_{i+1} u(x)| \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_{i+1}\Big)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{s=1}^{i} R_s = \prod_{s=1}^{i+1} R_s \tag{1.40}$$

sostituendo nella (1.39) la (1.40) appena verificata, otteniamo la tesi finale.

□

Proposizione 1.3.4. *Vale la seguente disuguaglianza*

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \tag{1.41}$$

Dimostrazione. Applicando il lemma 1.3.3 per $i = n-1$ otteniamo

$$\int_{n-1} ... \int_1 |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x^{n-1} \leq$$

$$\leq \left(\int_n ... \int_1 |\partial_n u(x)| \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{s=1}^{n-1} \left(\int_{n-1} ... \int_1 |\partial_s u(x)| \mathrm{d}x^{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} = T \prod_{s=1}^{n-1} H_s.$$

Integrando entrambi i membri rispetto all'ultima variabile e usando la disuguaglianza di Hölder, ricaviamo

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n}{n-1}} \leq T \int_n \prod_{s=1}^{n-1} H_s \mathrm{d}x_n \leq T \prod_{s=1}^{n-1} \int_n H_s^{n-1} \mathrm{d}x_n =$$

$$= \|\partial_n u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n-1}} \prod_{s=1}^{n-1} \left(\int_n ... \int_1 |\partial_s u(x)| dx\right)^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{s=1}^{n} \|\partial_s u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n-1}}.$$

Elevando i membri estremi della disuguaglianza alla potenza $\frac{n-1}{n}$ otteniamo la tesi. □

Proposizione 1.3.5. *Supposto $r < n$ vale la seguente relazione*

$$\|u\|_{L^{\frac{nr}{n-r}}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{r(n-1)}{n-r} \prod_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \tag{1.42}$$

Dimostrazione. Grazie alla proposizione 1.3.4 sappiamo che vale la disuguaglianza (1.41), perciò applicandola alla funzione $v = |u|^{\frac{r(n-1)}{n-r}}$ otteniamo

$$\|u\|_{L^{\frac{rn}{n-r}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{rn}{n-r}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{(n-1)r}{n-r}\cdot\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{n-1}{n}} = \|v\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq$$

$$\leq \prod_{i=1}^{n} \|\partial_i v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{n-1}{n-r} r |u(x)|^{\frac{n-1}{n-r}r-1} \partial_i u(x) \frac{|u(x)|}{u(x)}\right| \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{r(n-1)}{n-r} \prod_{i=1}^{n} \left\| |u|^{\frac{n(r-1)}{n-r}} |\partial_i u| \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \leq \frac{r(n-1)}{n-r} \prod_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \left\| |u|^{\frac{n(r-1)}{n-r}} \right\|_{L^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{r(n-1)}{n-r} \left\| |u|^{\frac{n(r-1)}{n-r}} \right\|_{L^{\frac{r}{r-1}}(\mathbb{R}^n)} \prod_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} = \frac{r(n-1)}{n-r} \|u\|_{L^{\frac{nr}{r-n}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n(r-1)}{n-r}} \prod_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}}$$

da cui ricaviamo che

$$\|u\|^{\alpha}_{L^{\frac{rn}{n-r}}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{r(n-1)}{n-r} \prod_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|^{\frac{1}{n}}_{L^r(\mathbb{R}^n)}$$

dove $\alpha = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{rn}{n-r} - \frac{n(r-1)}{n-r} = \frac{n}{n-r}\left(\frac{n-1}{n}r - r + 1\right) = \frac{n}{n-r} \cdot \frac{nr-r-nr+n}{n} = 1.$ □

Teorema 1.3.6. *Siano $j = 0$, $\alpha = m = 1$ e $r < n$. Allora vale la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg* (1.4) *per r che soddisfa* (1.5).

Dimostrazione.

$$\|Du\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\sum_{i=1}^{n} |\partial_i u(x)|^2\right|^{\frac{r}{2}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} \geq$$

$$\geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_i u(x)|^r \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} = \|\partial_i u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall i = 1, ..., n$$

da cui possiamo ricavare

$$\|Du\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \geq \prod_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|^{\frac{1}{n}}_{L^r(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.43}$$

Utilizzando la proposizione 1.3.5 e quindi sfruttando (1.43) otteniamo

$$\|u\|_{L^{\frac{nr}{n-r}}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{r(n-1)}{n-r} \prod_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|^{\frac{1}{n}}_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}.$$

□

1.3.2 Caso $r > \frac{n}{m-j}$

Di controparte, in questo caso abbiamo $p = \frac{rn}{n-r(m-j)} < 0$ per le imposizioni fatte. Quindi, considerati come nel caso precedente $j = 0$ e $m = 1$, mostrare la (1.4), equivale a mostrare una disuguaglianza tra norme classiche di Lebesgue e seminorme di tipo Hölder (definizione 1.0.1), con esponente

$$\gamma = -\frac{n}{p} - \left[-\frac{n}{p}\right] = 1 - \frac{n}{r} - \left[1 - \frac{n}{r}\right] = 1 - \frac{n}{r},$$

dove l'ultima uguaglianza è conseguenza del fatto che $r > n$.

Teorema 1.3.7. *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio con la proprietà uniforme di cono e sia la funzione $u : D \to \mathbb{R}$ che abbia tutte le sue derivate prime r-sommabili su D con $r > n$. Allora vale la Gagliardo-Nirenberg* (1.4) *per ogni r e $p < 0$ che rispetta* (1.5)

$$\|u\|_{L^p(D)} = \sup_{P,Q\in D} \frac{|u(P) - u(Q)|}{|P-Q|^{1-\frac{n}{r}}} \leq C(n,r)\|Du\|_{L^r(D)} \tag{1.44}$$

Dimostrazione. Poniamo $s = |P - Q|$. Il dominio D possiede la proprietà uniforme di cono, quindi siano V_P e V_Q i coni di vertice P (rispettivamente Q) interamente contenuti in D. Siano ora $B_P = V_P \cap B(P,s)$ e $B_Q = V_Q \cap B(Q,s)$ e poniamo $B = B_P \cap B_Q$. Sia $x \in B$ allora per la disuguaglianza triangolare

$$|u(P) - u(Q)| \leq |u(P) - u(x)| + |u(x) - u(Q)|$$

da cui otteniamo integrando rispetto a x

$$m(B)|u(P) - u(Q)| \leq \int_B |u(P) - u(x)|\mathrm{d}x + \int_B |u(x) - u(Q)|\mathrm{d}x = I + II.$$

Valutiamo ora i due integrali di destra. Passiamo a coordinate polari di centro P (di centro Q) nella valutazione di I (nella valutazione di II) e raggio s, ponendo $S = \partial B(0,1)$ e $u(P + t\omega) = \bar{u}(t)$ otteniamo

$$I \leq \int_S \int_0^s |u(P) - u(P + t\omega)|t^{n-1}\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega = \int_S \int_0^s t^{n-1} \left| \int_0^t \frac{\partial \bar{u}}{\partial k}(k)\mathrm{d}k \right| \mathrm{d}t\mathrm{d}\omega \leq$$

$$= \int_S \int_0^s t^{n-1} \int_0^t \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial k}(k) \right| \mathrm{d}k\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega \leq \int_S \int_0^s t^{n-1} \int_0^s \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial k}(k) \right| \mathrm{d}k\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega =$$

$$= \frac{s^n}{n} \int_S \int_0^s \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial k}(k) \right| \mathrm{d}k\mathrm{d}\omega = \frac{s^n}{n} \int_S \int_0^s |\langle \nabla u(P + k\omega), \omega\rangle| \,\mathrm{d}k\mathrm{d}\omega =$$

$$= \frac{s^n}{n} \int_S \int_0^s \left| \sum_{j=1}^n \partial_j u(P + k\omega) \cdot \omega_j \right| \mathrm{d}k\mathrm{d}\omega \leq \frac{s^n}{n} \int_S \int_0^s \sum_{j=1}^n |\partial_j u(P + k\omega)| \cdot |\omega_j|\mathrm{d}k\mathrm{d}\omega.$$

Effettuando il cambio di variabile $z = P + k\omega$ e $dz = k^{n-1}\mathrm{d}k\mathrm{d}\omega$ otteniamo

$$I \leq \frac{s^n}{n} \int_S \int_0^s \sum_{j=1}^n |\partial_j u(z)| \cdot |\omega_j| \frac{k^{n-1}}{k^{n-1}}\mathrm{d}k\mathrm{d}\omega \leq \frac{s^n}{n} \int_{B_P} \sum_{j=1}^n |\partial_j u(z)| \cdot |z - P|^{1-n}\mathrm{d}z.$$

Notiamo che la funzione $z \mapsto |z - P|^{1-n}$ è $\frac{r}{r-1}$-sommabile su B_P, infatti

$$r > n \Rightarrow \frac{1}{r} < \frac{1}{n} \Rightarrow -\frac{1}{r} > -\frac{1}{n} \Rightarrow 1 - \frac{1}{r} > 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r}{r-1} < \frac{n}{n-1} \Rightarrow \frac{r}{r-1}(n-1) < n$$

Quindi applicando la disuguaglianza di Hölder con esponenti coniugati otteniamo

$$I \leq \frac{s^n}{n}\Big\| \sum_{j=1}^{n} |\partial_j u| \Big\|_{L^r(B_P)} \left(\int_{B_P} |z-P|^{\frac{r}{r-1}(1-n)} \mathrm{d}z \right)^{\frac{r-1}{r}}$$

$$\leq \frac{s^n}{n} \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j u\|_{L^r(B_P)} \left(\int_S \int_0^s \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{(n-1)\frac{r}{r-1}}} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\omega \right)^{\frac{r-1}{r}} \leq$$

$$\leq C s^n \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j u\|_{L^r(B_P)} \left(\int_0^s \rho^{(n-1)\left(1-\frac{r}{r-1}\right)} \mathrm{d}\rho \right)^{\frac{r-1}{r}} =$$

$$= C s^n \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j u\|_{L^r(B_P)} s^{\frac{(n-1)\left(1-\frac{r}{r-1}\right)+1}{\frac{r}{r-1}}} =$$

$$= C s^{n+\frac{(r-1)(n-1)\left(1-\frac{r}{r-1}\right)+r-1}{r}} \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j u\|_{L^r(B_P)} = C s^{n+1-\frac{n}{r}} \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j u\|_{L^r(B_P)}.$$

Facendo lo stesso tipo di stima per II e notando che valgono le uguaglianze $m(B_P) = m(B_Q) = C|P-Q|^n$, posto $\beta = n+1-\frac{n}{p}$ otteniamo

$$|u(P)-u(Q)| \leq \frac{C|P-Q|^\beta}{m(B_P)} \sum_{j=1}^{n} (\|\partial_j u\|_{L^r(B_P)} + \|\partial_j u\|_{L^r(B_Q)}) \leq \bar{C}|P-Q|^{1-\frac{n}{p}} \|Du\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$$

da cui, dividendo in primis entrambi i membri per $|P-Q|^{1-\frac{n}{r}}$ e poi passando all'estremo superiore su D, ricaviamo la tesi. $\square$

1.4 Eccezioni al teorema di Sobolev e conseguenze sulla GN

La teoria sviluppata nel secondo step ci permette di capire che quando $r = \frac{n}{m-j}$ oppure $r > \frac{n}{m-j}$ con $m - j - \frac{n}{r} \in \mathbb{N}^+$ il teorema di Sobolev non è valido. Quindi, in tali casi, la nostra disuguaglianza non può valere per $\alpha = 1$. Dimostreremo che invece vale per ogni $\alpha \in [\frac{j}{m}, 1[$. Quindi quest'ultimo caso, per le considerazioni appena fatte, sfocia nell'eccezione (2) del teorema 1.0.4. Come già fatto in precedenza, mostreremo solamente un caso particolare, ossia $j = 0$ e $m = 1$, da cui ricaveremo la disuguaglianza generale. Utilizzeremo risultati sviluppati nel primo step, e ciò è lecito, dato che quando $\alpha = \frac{j}{m}$, indipendentemente dal rapporto tra r e n, la disuguaglianza è valida.

1.4.1 Caso $r > \frac{n}{m-j}$, $m-j-\frac{n}{r}=k \in \mathbb{N}^+$ e $\alpha \in [\frac{j}{m}, 1[$

Teorema 1.4.1. *Siano $m, j \in \mathbb{N}$ con $0 \le j < m$, $q \in [1, \infty]$, $r = \frac{n}{m-j-k}$ e k un naturale positivo. Sia inoltre*

$$\alpha \in \left] \frac{\frac{j}{n}+\frac{1}{q}}{\frac{j}{n}+\frac{1}{q}+\frac{k}{n}}, 1 \right[\qquad \text{quindi} \qquad \frac{1}{p} = \frac{j}{n} - \alpha\frac{j+k}{n} + \frac{1-\alpha}{q} < 0.$$

Allora vale per ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^\alpha \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\alpha}.$$

Dimostrazione. Notiamo che vale

$$\alpha = \frac{\frac{j}{n}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}{\frac{j+k}{n}+\frac{1}{q}},$$

fissiamo $s \ge 1$ tale che $\frac{1}{s} < \min\left\{\frac{1}{p}+\frac{k}{n}, \left(\frac{1}{q}+\frac{j+k}{n}\right)\left(1-\frac{j+k}{m}\right)\right\}$. Sia allora

$$\beta = \frac{\frac{j}{n}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}{\frac{j+k}{n}+\frac{1}{q}-\frac{1}{s}} \in \left] \frac{\frac{j}{n}+\frac{1}{q}}{\frac{j+k}{n}+\frac{1}{q}-\frac{1}{s}}, 1 \right[$$

di modo che valga $\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \beta\left[\frac{1}{s} - \frac{j+k}{n}\right] + \frac{1-\beta}{q}$. Notiamo che $\frac{1}{p} < \frac{j}{n} + \frac{1}{q}$, da cui $\frac{1}{s} < \frac{k+j}{n} + \frac{1}{q}$, dunque β è ben definito e $\beta < 1$. Inoltre abbiamo che $(j+k) - j - \frac{n}{s} = k - \frac{n}{s} = n\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{s}\right) \notin \mathbb{N}$ se si evita di scegliere $\frac{1}{s}$ della forma $\frac{1}{s} = \frac{k-h}{n}$, $h = 1, ..., k$. Ma non importa perché $\beta < 1$. Sia adesso

$$\gamma = \frac{\frac{j+k}{n}+\frac{1}{q}-\frac{1}{s}}{\frac{j+k}{n}+\frac{1}{q}} : \quad \text{allora} \quad \gamma \in \left] \frac{j+k}{m}, 1 \right[$$

per la scelta di s; inoltre $m-(j+k)-\frac{n}{r} = m-(j+k)-(m-j-k) = 0 \in \mathbb{N}$, ma non importa perché $\gamma < 1$. In conclusione, possiamo applicare GN:

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|D^{j+k} u\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}^\beta \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\beta},$$
$$\|D^{j+k} u\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \le C\|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^\gamma \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\gamma},$$

da cui, essendo $\beta\gamma = \alpha$,

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{\beta\gamma} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\beta+\beta(1-\gamma)} = C\|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^\alpha \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\alpha}.$$

□

1.4.2 Caso $r = \frac{n}{m-j}$ e $\alpha \in [\frac{j}{m}, 1[$

Incominciamo il paragrafo dimostrando il caso particolare che si ottiene per $j = 0$ e $m = 1$.

Proposizione 1.4.2. *Vale la seguente disuguaglianza*

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,q,p)\|Du\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{q}{p}}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q}{p}}, \qquad 1 \leq q \leq p < \infty \tag{1.45}$$

Dimostrazione. Applichiamo la proposizione 1.3.4 alla funzione $v = |u|^{p\frac{n-1}{n}}$ ottenendo

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p\frac{n-1}{n}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p\frac{n-1}{n}\frac{n}{n-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{n-1}{n}} = \|v\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|\partial_i v\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \leq$$

$$= \|Dv\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \max_{i=0,\dots,n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{p(n-1)}{n}|u(x)|^{\frac{p(n-1)}{n}-1}\partial_i u(x)\frac{|u(x)|}{u(x)}\right|\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{p(n-1)}{n}\max_{i=0,\dots,n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^{\frac{p(n-1)}{n}-1}|\partial_i u(x)|\mathrm{d}x\right)$$

da cui possiamo ricavare la stima

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(\max_{i=o,\dots,n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^{\frac{p(n-1)}{n}-1}|\partial_i u(x)|\mathrm{d}x\right)\right)^{\frac{n}{p(n-1)}}. \tag{1.46}$$

Occupiamoci del secondo membro della nostra stima. Poniamo

$$\frac{p(n-1)}{n} - 1 = \gamma + \delta \quad \Longrightarrow \begin{cases} 0 < \gamma < p\left(1-\frac{1}{n}\right) - 1 \\ \delta = p\left(1-\frac{1}{n}\right) - 1 - \gamma > 0 \end{cases}$$

allora dalla (1.46), usando Hölder con esponenti $\frac{\gamma}{q} + \frac{\delta}{p} + \frac{1}{n} = 1$ ricaviamo

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(\max_{i=0,\dots,n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^{\gamma}|u(x)|^{\delta}|\partial_i u(x)|\mathrm{d}x\right)\right)^{\frac{n}{p(n-1)}} \leq$$

$$\leq C\||u|^{\gamma}\|_{L^{\frac{q}{\gamma}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n}{p(n-1)}} \cdot \||u|^{\delta}\|_{L^{\frac{p}{\delta}}(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n}{p(n-1)}} \cdot \left(\max_{i=0,\dots,n}\|\partial_i u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{n}{p(n-1)}} =$$

$$= C\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\gamma n}{p(n-1)}} \cdot \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\delta n}{p(n-1)}} \cdot \left(\max_{i=0,\dots,n}\|\partial_i u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{n}{p(n-1)}}.$$

da cui, semplificando, otteniamo

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{\delta n}{p(n-1)}} \leq C\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\gamma n}{p(n-1)}} \cdot \left(\max_{i=0,\dots,n}\|\partial_i u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{n}{p(n-1)}},$$

ossia

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\gamma n}{p(n-1)-\delta n}} \cdot \left(\max_{i=0,\dots,n} \|\partial_i u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{n}{p(n-1)-\delta n}}.$$

Facendo un po' di conti sulle nostre imposizioni, otteniamo $\gamma = \frac{q}{p-q}$ e necessariamente $p(n-1) - \delta n = \frac{np}{p-q}$, da cui ricaviamo

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\frac{nq}{p-q}}{\frac{np}{p-q}}} \cdot \left(\max_{i=0,\dots,n} \|\partial_i u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{n}{\frac{np}{p-q}}} = C\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q}{p}} \cdot \|Du\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{q}{p}},$$

che è la nostra tesi a patto di mostrare che vale per ogni $q \leq p$. Notiamo innanzitutto che la condizione $\gamma < p\left(1 - \frac{1}{n}\right) - 1$ implica

$$\frac{q}{p-q} < p\left(1 - \frac{1}{n}\right) - 1 \Longrightarrow q < \left[p\left(1 - \frac{1}{n}\right) - 1\right](p-q) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow qp\left(1 - \frac{1}{n}\right) < p\left[p\left(1 - \frac{1}{n}\right) - 1\right] \Longrightarrow q < p - \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \Longrightarrow q < p - 1 + \frac{1}{n}.$$

Dunque (1.45) vale per ogni $q \in [1, p - 1 + \frac{1}{n}[$. Sia adesso $s \in [q, p[$; allora per ogni $\lambda \in [0, 1[$ per cui $\frac{1}{s} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{q}$, abbiamo

$$\|u\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\lambda} \cdot \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\lambda} \leq C\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q\lambda}{p}} \cdot \|Du\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}^{\left(1-\frac{q}{p}\right)\lambda} \cdot \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\lambda} =$$

$$= C\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{\left(\frac{q}{p}-1\right)\lambda+1} \cdot \|Du\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}^{\left(1-\frac{q}{p}\right)\lambda} = \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q}{s}} \cdot \|Du\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{q}{s}}$$

perché facendo i dovuti conti si ottiene $\lambda = \frac{p}{s} \cdot \frac{s-q}{p-q}$. Dunque (1.45) vale per ogni esponente $q \leq p$. □

Il prossimo teorema estende la validità del caso particolare e conclude la dimostrazione della veridicità della disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg.

Teorema 1.4.3. *Siano $m, j \in \mathbb{N}$ con $0 \leq j < m$, $\alpha \in \left[\frac{j}{m}, 1\right[$, $q \in [1, \infty[$, $r = \frac{n}{m-j}$ per cui*

$$\frac{1}{p} = (1-\alpha)\left(\frac{j}{n} + \frac{1}{q}\right) \in]0, 1].$$

Allora per ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{\alpha} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\alpha}.$$

Dimostrazione. Grazie alla proposizione 1.4.2 sappiamo che la tesi è valida per $j = 0$, $m = 1$, $r = n$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{q}$ con $0 < \alpha < 1$. Per provarla in generale, definiamo $s \in]1, \infty[$ mediante le due relazioni:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{j}{n} + \beta\left(\frac{1}{s} - \frac{j+1}{n}\right) + \frac{1-\beta}{q} = (1-\beta)\left(\frac{j}{n} + \frac{1}{q}\right) + \beta\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{n}\right) \\ \frac{1}{s} &= \frac{j+1}{n} + \gamma\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + \frac{1-\gamma}{q} = (1-\gamma)\left(\frac{j}{n} + \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{n}, \end{aligned} \tag{1.47}$$

per opportuni $\gamma, \beta \in [0, 1[$. In realtà vogliamo che $\beta \in \left[\frac{j}{j+1}, 1\right[$ e $\gamma \in \left[\frac{j+1}{m}, 1\right[$. Allora osserviamo che dalle relazioni (1.47) segue

$$\beta = \frac{\frac{1}{q} + \frac{j}{n} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{q} + \frac{j}{n} - \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{n}\right)}, \qquad \gamma = \frac{\frac{1}{q} + \frac{j}{n} - \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{n}\right)}{\frac{j}{n} + \frac{1}{q}}, \qquad \alpha = \frac{\frac{1}{q} + \frac{j}{n} - \frac{1}{p}}{\frac{j}{n} + \frac{1}{q}},$$

da cui $\beta\gamma = \alpha$; dato che $\alpha \in \left[\frac{j}{m}, 1\right[$ possiamo di conseguenza scegliere i valori $\beta \in \left[\frac{j}{j+1}, 1\right[$ e $\gamma \in \left[\frac{j+1}{m}, 1\right[$ tali che $\beta\gamma = \alpha$, definire $\frac{1}{s}$ tramite la seconda identità della relazione (1.47), e ricavare che vale anche la prima: infatti, se $\frac{1}{s} - \frac{1}{n} = (1-\gamma)\left(\frac{j}{n} + \frac{1}{q}\right)$, allora

$$\frac{1}{p} = (1-\alpha)\left(\frac{j}{n} + \frac{1}{q}\right) = (1 - \beta + \beta - \beta\gamma)\left(\frac{j}{n} + \frac{1}{q}\right) =$$

$$= (1-\beta)\left(\frac{j}{n} + \frac{1}{q}\right) + \beta(1-\gamma)\left(\frac{j}{n} + \frac{1}{q}\right) = (1-\beta)\left(\frac{j}{n} + \frac{1}{q}\right) + \beta\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{n}\right).$$

Perciò da (1.47) segue che valgono le maggiorazioni di Gagliardo-Nirenberg

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D^{j+1}u\|^{\beta}_{L^s(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\beta}_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.48}$$

$$\|D^{j+1} u\|_{L^s(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D^{m}u\|^{\gamma}_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\gamma}_{L^q(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.49}$$

Notando che $(j+1) - j - \frac{n}{s} = 1 - \frac{n}{s} < 0$ e $m - (j+1) - \frac{n}{r} = -1 < 0$, possiamo mettere insieme le relazioni (1.48) e (1.49) per ottenere

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D^m u\|^{\gamma\beta}_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{(1-\gamma)\beta}_{L^q(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\beta}_{L^q(\mathbb{R}^n)} = C\|D^m u\|^{\alpha}_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

□

1.5 Equivalenza della GN a una disuguaglianza di tipo somma

In questa ultima sezione del capitolo, analizzeremo il rapporto, in particolare l'equivalenza, tra la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg e una disuguaglianza tra norme, al cui membro destro compare la somma anziché il prodotto come visto finora.

Proposizione 1.5.1. *Siano $k \in [1, \infty]$ e $p \in [1, k]$. Allora per ogni funzione $u \in L^{q_2}(\mathbb{R}^n) \cap W^{2,q_1}(\mathbb{R}^n)$ per cui*

$$q_1 = \frac{2k}{p+1}, \qquad q_2 = \frac{2k}{p-1}$$

vale la seguente disuguaglianza

$$\|Du\|_{L^{\frac{2k}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D^2u\|^{\frac{1}{2}}_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.50}$$

Dimostrazione. Utilizziamo la proposizione 1.2.1 con $r = q_1$ e $q = q_2$: di conseguenza ricavando P otteniamo

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{2r} + \frac{1}{2q} = \frac{p+1}{4k} + \frac{p-1}{4k} = \frac{p}{2k} \Longrightarrow P = \frac{2k}{p}.$$

□

Lemma 1.5.2. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$; allora per ogni $q, \epsilon > 0$ vale*

$$ab \leq \epsilon|a|^{1+q} + \epsilon^{-\frac{1}{q}}|b|^{1+\frac{1}{q}} \tag{1.51}$$

Dimostrazione. Fissiamo $\epsilon, q > 0$. Allora vale una delle due disuguaglianze

$$|b| \leq \epsilon|a|^q, \qquad |b| > \epsilon|a|^q,$$

ossia

$$|a||b| \leq \epsilon|a|^{q+1}, \qquad |a| < \epsilon^{-\frac{1}{q}}|b|^{\frac{1}{q}} \Longrightarrow |a||b| < \epsilon^{-\frac{1}{q}}|b|^{\frac{1}{q}+1}$$

da cui la tesi. □

Proposizione 1.5.3. *Siano $j, l, m \in \mathbb{N}^+$ e $p, k \in \mathbb{R}$. Supponiamo che valga $p \in [j, k+1-m]$ e $l \geq j$, allora per $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, e per ogni $u \in W^{l,q_1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{l-j,q_2}(\mathbb{R}^n) \cap W^{l+m,q_3}(\mathbb{R}^n)$ con*

$$q_1 = \frac{2k}{p}, \qquad q_2 = \frac{2k}{p-j}, \qquad q_3 = \frac{2k}{p+m},$$

vale la seguente disuguaglianza

$$\|D^lu\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \leq C\epsilon\|D^{l-j}u\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)} + C(\epsilon)\|D^{l+m}u\|_{L^{q_3}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.52}$$

Dimostrazione. Se applichiamo (1.50) a $D^{l-1}u$, per ogni $k \geq 1$, $l \geq 1$ e $p \in [1, k]$ otteniamo

$$\|D^l u\|_{L^{\frac{2k}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D^{l-1}u\|^{\frac{1}{2}}_{L^{\frac{2k}{p-1}}(\mathbb{R}^n)} \|D^{l+1}u\|^{\frac{1}{2}}_{L^{\frac{2k}{p+1}}(\mathbb{R}^n)}.$$

Di conseguenza per ogni $\epsilon > 0$, usando (1.51) con $q = 1$, vale

$$\|D^l u\|_{L^{\frac{2k}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\epsilon\|D^{l-1}u\|_{L^{\frac{2k}{p-1}}(\mathbb{R}^n)} + C(\epsilon)\|D^{l+1}u\|_{L^{\frac{2k}{p+1}}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.53}$$

Se $p \in [2, k]$ e $l \geq 2$, applicando (1.53), nella quale sostituiamo $p-1$ in luogo di p e $D^{l-2}u$ al posto di $D^{l-1}u$, per ogni $\epsilon_1 > 0$ otteniamo

$$\|D^{l-1}u\|_{L^{\frac{2k}{p-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\epsilon_1\|D^{l-2}u\|_{L^{\frac{2k}{p-2}}(\mathbb{R}^n)} + C(\epsilon_1)\|D^l u\|_{L^{\frac{2k}{p}}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.54}$$

Utilizzando ora la stima (1.54) all'interno di (1.53), fissiamo ϵ_1: imponendo $C\epsilon C(\epsilon_1) < \frac{1}{2}$, otteniamo che il termine $C\epsilon C(\epsilon_1)\|D^l u\|_{\frac{2k}{p}(\mathbb{R}^n)}$ può essere assorbito dalla parte destra della disuguaglianza, e quindi per ogni $k \geq 2$, $p \in [2, k]$ e $l \geq 2$

$$\|D^l u\|_{L^{\frac{2k}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\epsilon\|D^{l-2}u\|_{L^{\frac{2k}{p-2}}(\mathbb{R}^n)} + C(\epsilon)\|D^{l+1}u\|_{L^{\frac{2k}{p+1}}(\mathbb{R}^n)}.$$

Iterando il ragionamento otteniamo per ogni $p \in [j, k]$ e $l \geq j$

$$\|D^l u\|_{L^{\frac{2k}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\epsilon\|D^{l-j}u\|_{L^{\frac{2k}{p-j}}(\mathbb{R}^n)} + C(\epsilon)\|D^{l+1}u\|_{L^{\frac{2k}{p+1}}(\mathbb{R}^n)}.$$

Se applichiamo lo stesso ragionamento all'ultima disuguaglianza sul secondo addendo della parte destra della stessa, otterremo la tesi. □

Corollario 1.5.4. *Siano $l, m \in \mathbb{N}^+$ e $p, k \in \mathbb{R}$ per cui $p \in [l, k+1-m]$, allora per ogni funzione $u \in L^{q_2}(\mathbb{R}^n) \cap W^{l,q_1}(\mathbb{R}^n) \cap W^{l+m,q_3}(\mathbb{R}^n)$ con*

$$q_1 = \frac{2k}{p}, \qquad q_2 = \frac{2k}{p-l}, \qquad q_3 = \frac{2k}{p+m},$$

vale la seguente disuguaglianza

$$\|D^l u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \leq C\epsilon\|u\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)} + C(\epsilon)\|D^{l+m}u\|_{L^{q_3}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.55}$$

Dimostrazione. Utilizziamo la (1.52) imponendo $l = j$ e otteniamo la tesi. □

Corollario 1.5.5. *Siano $l, p, k \in \mathbb{N}^+$ per cui $l \leq p \leq k-1$, allora per ogni funzione $u \in L^{q_2}(\mathbb{R}^n) \cap W^{l,q_1}(\mathbb{R}^n) \cap H^{k+l-p}(\mathbb{R}^n)$ con*

$$q_1 = \frac{2k}{p}, \qquad q_2 = \frac{2k}{p-l},$$

vale la seguente disuguaglianza

$$\|D^l u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \leq C\epsilon \|u\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)} + C(\epsilon)\|D^{k+l-p}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.56}$$

e in particolare se $p = l$ e $l < k$ allora

$$\|D^l u\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \leq C\epsilon \|u\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} + C(\epsilon)\|D^{k}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.57}$$

Dimostrazione. Basta utilizzare la (1.55) imponendo $k = p + m$ e otteniamo la tesi. □

Proposizione 1.5.6. *Siano $j, \mu, m \in \mathbb{N}$ e $q, r, p \in [1, \infty]$ per cui valga la relazione $j \leq \max(\mu, m)$. Supponiamo valga la stima per ogni $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|D^\mu u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.58}$$

Allora per ogni funzione $u \in W^{j,p}(\mathbb{R}^n) \cap W^{m,r}(\mathbb{R}^n) \cap W^{\mu,q}(\mathbb{R}^n)$ vale la disuguaglianza

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq (C_1 + C_2) \|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot \|D^\mu u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \tag{1.59}$$

con

$$\alpha = \frac{n}{p} - \frac{n}{r} + m - j, \qquad \beta = -\frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \mu + j, \tag{1.60}$$

quando queste costanti non sono entrambe nulle. Inoltre, se tali costanti sono entrambe non nulle allora sono concordi.

Dimostrazione. Poniamo per comodità

$$Q = \|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad R = \|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \qquad P = \|D^\mu u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Per ogni $s > 0$, applicando la (1.58) alla funzione $u(sx)$, otteniamo

$$s^{l-\frac{n}{p}} Q \leq C_1 s^{m-\frac{n}{r}} R + C_2 s^{\mu - \frac{n}{q}} P \Longrightarrow Q \leq C_1 s^\alpha R + C_2 s^{-\beta} P.$$

Se per assurdo α, β fossero discordi, facendo tendere $s \to \infty$ otterremo l'assurdo $Q = 0$. Imponendo allora nell'ultima disuguaglianza trovata il valore $s = \left(\frac{P}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$, otteniamo

$$Q \leq C_1 P^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} R^{1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} + C_2 P^{1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} R^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} = (C_1 + C_2) P^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} R^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}.$$

□

Osservazione 1.5.7. Notiamo che in realtà dal teorema precedente si può derivare anche l'implicazione contraria, cioè se vale

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K \|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot \|D^\mu u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

utilizzando (1.51) otteniamo

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K\epsilon \|D^m u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^{(1+t)\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + K\epsilon^{-\frac{1}{t}} \|D^\mu u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{\left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{\alpha}{\alpha+\beta}},$$

quindi ponendo $t = \frac{\alpha}{\beta}$ otteniamo la disuguaglianza di tipo somma (1.58).

Capitolo 2

Costante ottima nel caso della norma del sup

Dopo aver studiato caso per caso la veridicità della disuguaglianza di interpolazione Gagliardo-Nirenberg

$$\|D^j u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D^m u\|^{\alpha}_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \qquad \frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right)\alpha + \frac{1-\alpha}{q}, \tag{2.1}$$

consideriamo il caso particolare $j = 0$ e $p = \infty$, $r = q = 2$, con $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ e $m > \frac{n}{2}$. Sostituendo le nostre imposizioni nella (2.1) otteniamo

$$\frac{1}{\infty} = \frac{0}{n} + \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{n}\right)\alpha + \frac{1-\alpha}{2} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{n}{2m}$$

da cui ricaviamo la seguente forma della disuguaglianza prima citata

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,m)\|D^m u\|^{\frac{n}{2m}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\frac{n}{2m}}_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

Inoltre posto

$$\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|D^m u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

$$\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall s > 0,$$

dove indichiamo con $\hat{u}(\cdot)$ la trasformata di Fourier di u ossia

$$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\mathrm{e}^{-i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}x, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

possiamo estendere la norma in (2.2) nel seguente modo

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2s})|\hat{u}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

e definito $H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{\dot{H}^2(\mathbb{R}^n)} < \infty\}$ lo spazio di Sobolev di ordine s, dimostreremo per $s > \frac{n}{2}$ la veridicità di

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,s)\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{n}{2s}}\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n}{2s}}$$

determinandone il valore ottimo della costante.

2.1 Determinazione della costante

Suddividiamo questa sezione in due parti: nella prima svilupperemo qualche risultato sulle funzioni a valori complessi Γ e β di Eulero, sempre utili per la stima di determinati integrali; nella seconda parte, utilizzeremo gli strumenti sviluppati per l'effettiva determinazione della costante.

2.1.1 Qualche risultato sulle funzioni β e Γ di Eulero

In questa sottosezione svilupperemo alcuni risultati che ci permetteranno di esprimere una relazione esplicita che coinvolge la funzione Γ e la funzione β di Eulero. Inoltre, calcoleremo lo specifico valore di $\beta(z, 1-z)$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Definizione 2.1.1. Definiamo la funzione Gamma di Eulero $\Gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nella seguente maniera

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \qquad \forall z : Re(z) > 0$$

Definizione 2.1.2. Definiamo la funzione Beta di Eulero $\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nella seguente maniera

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad \forall x,y : \mathrm{Re}(x) > 0, \mathrm{Re}(y) > 0$$

Proposizione 2.1.3. *Dette β e Γ le funzioni di Eulero vale che*

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Inoltre essendo la funzione Gamma una estensione del fattoriale ai numeri reali e ai complessi, le due funzioni assumono una espressione più semplice nel dominio dei numeri naturali ($m, n \in \mathbb{N}$)

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$
$$\beta(n,m) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!} = \frac{n+m}{nm\binom{n+m}{n}}.$$

Dimostrazione. Per ricavare la forma integrale della funzione beta, si può scrivere il prodotto di due fattoriali secondo la definizione

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{x-1}\mathrm{d}u \int_0^{+\infty} e^{-v}v^{y-1}\mathrm{d}v.$$

Ora poniamo $u = a^2$ ossia $\mathrm{d}u = 2a\mathrm{d}a$, $v = b^2$ ossia $\mathrm{d}v = 2b\mathrm{d}b$, in modo che usando il teorema di Fubini 6.0.28 otteniamo

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\int_0^{+\infty} e^{-a^2}a^{2x-1}\mathrm{d}a \int_0^{+\infty} e^{-b^2}b^{2y-1}\mathrm{d}b \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a^2+b^2)}|a|^{2x-1}|b|^{2y-1}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b.\end{aligned}$$

Trasformiamo in coordinate polari con $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}|r\cos\theta|^{2x-1}|r\sin\theta|^{2y-1}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-r^2}r^{2x+2y-2}r\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}|\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta|\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}r^{2(x+y-1)}\,\mathrm{d}(r^2)\cdot 4\int_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\,\mathrm{d}\theta = \\ &= 2\Gamma(x+y)\int_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \Gamma(x+y)\beta(x,y).\end{aligned}$$

da cui si ottiene la tesi dividendo entrambi i membri più estremi della precedente uguaglianza per $\Gamma(x+y)$. □

Proposizione 2.1.4. *Vale per ogni $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ la seguente uguaglianza*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Dimostrazione. Grazie alla proposizione 2.1.3 vale

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = B(z,1-z) = \int_0^\infty t^{z-1}(1-t)^{-z}\mathrm{d}t \tag{2.3}$$

Effettuiamo il cambio di variabile

$$t = \frac{u}{u+1} \qquad 1-t = \frac{1}{u+1} \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2}$$

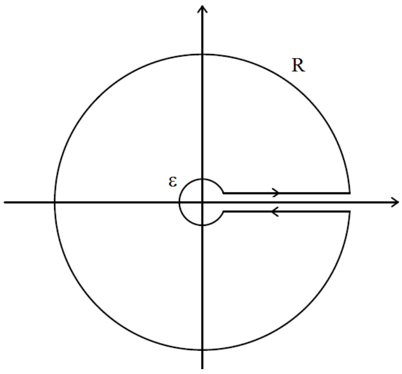
ricavando la relazione

$$B(z,1-z) = \int_0^\infty \left(\frac{u}{u+1}\right)^{z-1}\frac{1}{(u+1)^{-z}}\frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2} = \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{u+1}\mathrm{d}u.$$

Utilizzeremo ora il teorema dei residui 6.0.30 per calcolare quest'ultimo integrale. Consideriamo l'integrale complesso

$$\int_\gamma \frac{(-r)^{z-1}}{r+1}\mathrm{d}r \tag{2.4}$$

dove la curva γ è quella nella figura sottostante



Per definizione vale che $(-r)^{z-1} = \mathrm{e}^{(z-1)\log(-r)}$, perciò, quando percorreremo il ramo parallelo all'asse reale e con parte immaginaria positiva, varranno le seguenti condizioni

$$\arg(-r) = -\pi \qquad\qquad (-r)^{z-1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi(z-1)}|r|^{z-1} \tag{2.5}$$

mentre quando percorreremo il ramo parallelo all'asse reale e con parte immaginaria negativa, varranno le altre condizioni

$$\arg(-r) = \pi \qquad\qquad (-r)^{z-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(z-1)}|r|^{z-1}. \tag{2.6}$$

Notiamo ora che l'integrale (2.4) fatto sulla circonferenza di raggio R tende a 0 per $R \to \infty$, perché

$$R\left|\frac{r^{z-1}}{r+1}\right| \sim \frac{RR^{\rho-1}}{R} = R^{\rho-1} \qquad\qquad \rho = \mathrm{Re}(z) = 1 - \mathrm{Re}(1-z) < 1. \tag{2.7}$$

Inoltre per lo stesso ragionamento, l'integrale (2.4) fatto sulla circonferenza di raggio ϵ tende a 0 per $\epsilon \to 0$, perché

$$\epsilon\left|\frac{r^{z-1}}{r+1}\right| \sim \epsilon\epsilon^{\rho-1} = \epsilon^\rho \qquad\qquad \rho > 0. \tag{2.8}$$

Mettendo insieme le relazioni (2.6), (2.7), (2.8) e (2.5), e facendo tendere $R \to \infty$ e $\epsilon \to 0$ otteniamo

$$\int_\gamma \frac{(-r)^{z-1}}{r+1}\mathrm{d}r = (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi(z-1)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(z-1)})\int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{x+1}\mathrm{d}x = -2\mathrm{i}\sin(\pi(z-1))B(z,1-z). \tag{2.9}$$

La funzione $\frac{(-r)^{z-1}}{r+1}$ ha un polo in $r=-1$ con residuo $1^{r-1}=1$, perciò per il teorema dei residui 6.0.30 abbiamo che vale

$$\int_{\gamma} \frac{(-r)^{z-1}}{r+1} \mathrm{d}r = 2\pi \mathrm{i}. \tag{2.10}$$

Mettendo insieme le relazioni (2.9) e (2.10) otteniamo

$$B(z, 1-z) = -\frac{\pi}{\sin(\pi(z-1))} = \frac{\pi}{\sin(\pi - \pi z)} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \tag{2.11}$$

La (2.3) e la (2.11) ci danno la tesi. □

2.1.2 La costante ottima e l'estensione agli spazi di Sobolev

Per il calcolo effettivo della costante, è necessario ancora qualche lemma preparatorio, che ci sarà utile se utilizzato con i risultati sviluppati nella sottosezione precedente.

Lemma 2.1.5. *Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tale che $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora vale che*

- $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$
- $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ (2.12)

Inoltre otteniamo l'uguaglianza in (2.12) *quando $\hat{u}$ è a valori reali e di segno costante.*

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio di Schwartz delle funzioni a decrescenza rapida all'infinito,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}$$

il quale è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p \geq 1$ grazie al corollario 6.0.14. Dal momento che, grazie al teorema 6.0.15, la trasformata di Fourier è un isomorfismo lineare e continuo e vale

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \qquad \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \tag{2.13}$$

allora la (2.12) vale per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, e grazie alla formula di inversione (6.1) possiamo scrivere

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{i\langle x, \xi \rangle} \mathrm{d}\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.14}$$

Se $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, dato che, in virtù di 6.0.16, la (2.13) vale in modo del tutto analogo sostituendo $L^2(\mathbb{R}^n)$ al posto di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, ma per ipotesi $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ quindi $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Grazie alla densità di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, possiamo considerare una successione $\{\hat{u}_m\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per cui valga $\|\hat{u}_m - \hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$ e $\|\hat{u}_m - \hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$, e applicando (6.1) alla suddetta successione otteniamo la successione $\{u_m\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dimostriamo ora che $\{u_m\} \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ è una successione di Cauchy, ricavando dalla completezza dell'ultimo spazio considerato la convergenza in norma della successione in esso.
Sia $\epsilon > 0$, allora per la (2.12) che abbiamo già dimostrato essere valida per per $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ricaviamo

$$\|u_m - u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\hat{u}_m - \hat{u}_n\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

ma $\{\hat{u}_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ è convergente perciò di Cauchy, quindi esiste $N \in \mathbb{N}$ per cui $\|\hat{u}_m - \hat{u}_n\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \epsilon$ per ogni $m, n > N$ da cui ricaviamo la proprietà di Cauchy

$$\|u_m - u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \epsilon \qquad \forall m, n > N.$$

Dimostrato questo, possiamo allora asserire che esiste $v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $\|u_m - v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$, e dato che $\|u_m - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$ per unicità del limite si deve avere $u = v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dalla convergenza in norma ricaviamo quella puntuale della successione e applicando la (6.1) alla nostra e passando al limite otteniamo per la nostra funzione limite u

$$u(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle} \mathrm{d}\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.15}$$

Da quest'ultima relazione si ottiene

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \mathrm{e}^{i\langle x,\xi\rangle} \mathrm{d}\xi \right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)| \mathrm{d}\xi$$

dove l'ultimo oggetto è proprio uguale a $\|\hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, ottenendo (2.12). In particolare, se $\hat{u}(\xi) \geq 0$ allora grazie a (2.15) ricaviamo $u(0) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ che, per (2.12), implica $u(0) \geq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, ma ovviamente $u(0) \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ da cui l'uguaglianza degli oggetti in (2.12). □

Lemma 2.1.6. *Sia $\sigma(x) = \pi x$ allora detta Γ la funzione Gamma di Eulero, vale*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1 + |\xi|^{2s}} \mathrm{d}\xi = \pi^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right)^{-1} \left(\frac{\sin \sigma(\frac{n}{2s})}{\sigma(\frac{n}{2s})} \right)^{-1}$$

Dimostrazione. Usando le coordinate polari in $\mathbb{R}^n$ e facendo il cambio di variabile $t = (1+r^{2s})^{-1}$ cioè $r = (t^{-1}-1)^{\frac{1}{2s}}$ da cui $\mathrm{d}r = -\frac{1}{2s}(t^{-1}-1)^{\frac{1}{2s}-1}t^{-2}\mathrm{d}t$, otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2s})^{-1}\mathrm{d}\xi = \omega_n\int_0^\infty(1+r^{2s})^{-1}r^{n-1}\mathrm{d}r =$$

$$= -\frac{\omega_n}{2s}\int_1^0 t\cdot t^{-2}(t^{-1}-1)^{\frac{1}{2s}-1}(t^{-1}-1)^{\frac{n-1}{2s}}\mathrm{d}t = \frac{\omega_n}{2s}\int_0^1 t^{-1}(t^{-1}-1)^{\frac{n}{2s}-1}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\omega_n}{2s}\int_0^1\frac{1}{t}\cdot\frac{(1-t)^{\frac{n}{2s}-1}}{t^{\frac{n}{2s}-1}} = \frac{\omega_n}{2s}\int_0^1 t^{-\frac{n}{2s}}(1-t)^{\frac{n}{2s}-1}\mathrm{d}t = I_{s,n},$$

dove $\omega_n = 2\pi^{\frac{n}{2}}\left(\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-1}$ è la superficie della sfera n-dimensionale. Per le proposizioni (2.1.3) e (2.1.4) abbiamo che

$$I_{s,n} = \frac{\omega_n}{2s}\cdot\frac{\Gamma\left(1-\frac{n}{2s}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2s}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{n}{2s}+\frac{n}{2s}\right)} = \frac{\omega_n}{2s}\cdot\frac{\Gamma\left(1-\frac{n}{2s}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2s}\right)}{\Gamma(1)}$$

ossia

$$I_{s,n} = \frac{\omega_n}{2s}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\pi\frac{n}{2s}\right)} = \frac{\omega_n}{n}\cdot\frac{\frac{\pi n}{2s}}{\sin\left(\frac{\pi n}{2s}\right)}.$$

□

Grazie agli ultimi lemmi, possiamo enunciare e dimostrare il prossimo teorema che determina la costante ottima per un'estensione della disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg agli spazi di Sobolev hilbertiani.

Teorema 2.1.7. *Sia $s > \frac{n}{2}$. Se $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, allora $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\cap C^0(\mathbb{R}^n)$ e vale*

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le (4\pi)^{-\frac{n}{4}}\left(\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin\sigma(\frac{n}{2s})}{\sigma(\frac{n}{2s})}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \qquad (2.16)$$

dove $\sigma(r) = r\pi$ e Γ è la funzione Gamma di Eulero. Inoltre otteniamo l'uguaglianza in (2.16) se $\hat{u}(\xi) = c(1+|\xi|^{2s})^{-1}$ per una certa costante $c \ge 0$, perciò la costante utilizzata in (2.16) è ottimale.

Dimostrazione. Sia $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e $s > \frac{n}{2}$. Dato che una tale u rispetta le ipotesi del lemma 2.1.5, allora grazie ad esso vale che

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\|\hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2s})^{-\frac{1}{2}}(1+|\xi|)^{\frac{1}{2}}|\hat{u}(\xi)|\mathrm{d}\xi \le$$

$$\le \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2s})^{-1}\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2s})|\hat{u}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{I_{s,n}}\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

avendo applicato la disuguaglianza di Hölder con $p = q = 2$. Grazie al lemma 2.1.6, sostituendo nella stima precedente il valore di $I_{s,n}$, otteniamo

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\pi^{\frac{n}{4}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin\sigma(\frac{n}{2s})}{\sigma(\frac{n}{2s})}\right)^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

che è la tesi. Infine, se $\hat{u}(\xi) = c(1 + |\xi|^{2s})^{-1}$ per una certa $c \geq 0$, allora $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ perché $s > \frac{n}{2}$ e siccome $u \in H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, per il lemma 2.1.5 otteniamo

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot c \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s})^{-1} \mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{c\omega_n}{n} \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}{\sin\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)} = \frac{c \cdot 2\pi^{\frac{n}{2}} \cdot (2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}{\sin\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}{\sin\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}} c \left(\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}{\sin\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}{\sin\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}} c \left(\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{n}{4}} \left(\frac{\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}{\sin\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}{\sin\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega_n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} c\pi^{-\frac{n}{4}} \left(\frac{\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}{\sin\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}{\sin\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= (4\pi)^{-\frac{n}{4}} \left(\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}{\sin\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} c\left(\frac{\omega_n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}{\sin\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= (4\pi)^{-\frac{n}{4}} \left(\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}{\sin\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

da cui ricaviamo la tesi sotto forma di uguaglianza, che conferma l'ottimalità della costante. □

Dimostriamo ora, per chiudere il capitolo, un'ulteriore estensione della disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg agli spazi di Sobolev hilbertiani. Nello specifico, ne dimostreremo una versione negli spazi omogenei calcolando la costante ottima.

Teorema 2.1.8. *Sia $s > \frac{n}{2}$ e $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, allora*

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,s)\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{n}{2s}}\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n}{2s}} \tag{2.17}$$

con

$$K(n,s) = (4\pi)^{-\frac{n}{4}}\left(\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}{\sigma\left(\frac{n}{2s}\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{2s-n}\right)^{-\frac{n}{4s}}\left(\frac{2s}{2s-n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Inoltre otteniamo l'uguaglianza in (2.17) *se $\hat{u}(\xi) = c(1+|\xi|^{2s})^{-1}$ per qualche costante $c \geq 0$, perciò la costante in* (2.17) *è ottimale.*

Dimostrazione. Fissiamo $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e poniamo $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ al variare di $\lambda > 0$, allora vale $u_\lambda \in H^s(\mathbb{R}^n)$, perciò dal teorema 2.1.7 ricaviamo

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|u_\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (4\pi)^{-\frac{n}{4}}\left(\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin\sigma(\frac{n}{2s})}{\sigma(\frac{n}{2s})}\right)^{-\frac{1}{2}}\|u_\lambda\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= (4\pi)^{-\frac{n}{4}}\left(\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin\sigma(\frac{n}{2s})}{\sigma(\frac{n}{2s})}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\lambda^{-n}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \lambda^{2s-n}\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.18}$$

Consideriamo la funzione continua e derivabile $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definita da $F(\lambda) = \lambda^{-n}A + \lambda^{2s-n}B$ con $A, B > 0$. Conseguenza del fatto che $s > \frac{n}{2}$ è che $\lim_{\lambda\to+\infty} F(\lambda) = +\infty$ e $\lim_{\lambda\to 0^+} F(\lambda) = +\infty$; allora se esiste $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^+$ per cui $F'(\bar{\lambda}) = 0 \neq F''(\bar{\lambda})$ potremo asserire che $\bar{\lambda}$ è punto di minimo. Dato che $F'(\lambda) = \lambda^{-n-1}((2s-n)\lambda^{2s}B - nA)$, il valore cercato che annulla la derivata prima è $\bar{\lambda} = (nA)^{\frac{1}{2s}}((2s-n)B)^{-\frac{1}{2s}}$. Applicando questo ragionamento al nostro caso, sostituendo nella (2.18) al posto di λ il valore $\bar{\lambda}$ otteniamo

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,s)\left(\frac{n\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2}{(2s-n)\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}^2}\right)^{-\frac{n}{4s}}\left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \frac{n\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2}{2s-n}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= C(n,s)\left(\frac{2s}{2s-n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{2s-n}\right)^{-\frac{n}{4s}}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{n}{2s}}\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n}{2s}}$$

che è la prima parte della tesi. D'altra parte, dato che $\bar{\lambda}$ è punto di minimo otteniamo

$$\begin{aligned} C(n,s)\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = &\quad C(n,s)(1^{-n}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 1^{2s-n}\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}^2)^{\frac{1}{2}} \geq \\ \geq &\quad K(n,s)\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{n}{2s}}\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n}{2s}} \geq \\ \geq &\quad \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Considerando ora $w \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tale che $\hat{w}(\xi) = c(1 + |\xi|^{2s})^{-1}$ per qualche $c \geq 0$, allora grazie alla relazione (2.19) e al lemma 2.1.6 otteniamo

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K(n,s)\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{n}{2s}}\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n}{2s}} \leq C(n,s)\|w\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = c = \|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

dove l'ultima uguaglianza si ricava dal teorema 2.1.7, dimostrando che l'uguaglianza è verificata e costatando che effettivamente $K(n,s)$ è la costante migliore. $\square$

Capitolo 3

Costante ottima nel caso del gradiente in norma L^2

In questo capitolo, faremo la stessa cosa che abbiamo fatto nel capitolo precedente, ossia determinare la costante ottima di una particolare disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg. L'approccio risolutivo al problema sarà di tutt'altra natura e userà strumenti differenti. Nello specifico, considerando nella disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg (1.4), e nell'associata uguaglianza (1.5), i parametri $r = 2$, $j = 0$ e $m = 1$ otteniamo

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_{GN} \|\nabla u\|^{\alpha}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \quad \alpha \in [0,1] \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{p} = \alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1-\alpha}{q} = \alpha \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{q} \right) + \frac{1}{q} \Longrightarrow \alpha = \frac{2^*(p-q)}{p(2^*-q)} \tag{3.2}$$

Dalla (3.2) possiamo ricavare le relazioni tra p e q. Affinché α sia compreso tra 0 e 1 deve valere

$$\begin{cases} \dfrac{2^*(p-q)}{p(2^*-q)} < 1 \\ \dfrac{2^*(p-q)}{p(2^*-q)} > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{2^*(p-q) - p(2^*-q)}{p(2^*-q)} < 0 \\ \dfrac{2^*(p-q)}{p(2^*-q)} > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{q(p-2^*)}{p(2^*-q)} < 0 \\ \dfrac{2^*(p-q)}{p(2^*-q)} > 0 \end{cases}$$

da cui si ricava $n > 2$ e $q < p < 2^*$. Quindi ci occuperemo di determinare la costante ottima nel seguente caso

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_{GN} \|\nabla u\|^{\frac{2^*(p-q)}{p(2^*-q)}}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u\|^{\frac{q(2^*-p)}{p(2^*-q)}}_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \qquad 1 \leq q < p < 2^*, \quad n > 2. \tag{3.3}$$

Notiamo che se $n = 1, 2$ la disuguaglianza (3.1) è ancora valida, con le condizioni $1 < q < p$ e $\alpha = 1 - \frac{q}{p}$ nel primo caso, e nel secondo $1 < q < p$ e $\alpha = \frac{2(p-q)}{p(q+2)}$.

3.1 Strategia di risoluzione del problema

Un modo diretto per calcolare la costante ottima K_{GN}, e le funzioni ottimali, è mostrare che il seguente funzionale

$$E : D^{1,q}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \qquad E(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{q}\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \tag{3.4}$$

ammette minimo sulla varietà $M_p = \{u \in D^{1,q}(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1\}$ dove definiamo il seguente spazio

$$D^{1,q}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^q(\mathbb{R}^n) : \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Teorema 3.1.1. *Sia $n > 2$ e $1 \leq q < p < 2^*$ (rispettivamente $n = 1, 2$ e $1 \leq q < p$). Supponiamo di aver mostrato l'esistenza di una successione minimizzante convergente $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ per il problema seguente*

$$\inf\left\{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^q \mathrm{d}x : u \in D^{1,q}(\mathbb{R}^n), \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1\right\} \tag{3.5}$$

Allora detto u_∞ il limite della nostra successione, vale la seguente disuguaglianza per ogni $u \in D^{1,q}(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_{GN}\|\nabla u\|^\alpha_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\mathbb{R}^n)}. \tag{3.6}$$

dove le costanti sono così definite

$$\alpha = \frac{2^*(p-q)}{p(2^*-q)}, \qquad K_{GN} = \left[\frac{\gamma+\delta}{(q\gamma)^{\frac{\gamma}{\gamma+\delta}}(2\delta)^{\frac{\delta}{\gamma+\delta}}E(u_\infty)}\right]^{\frac{2n+2p-nq}{p(n-2)(2^*-q)}} \tag{3.7}$$

con $\gamma = (n-2)(2^* - p)$ e $\delta = n(p-q)$. Inoltre, le seguenti funzioni sono ottimali, nel senso che verificano l'uguaglianza

$$v_{a,b}(x) = Cu_\infty(a(x-b)) \qquad C > 0,\ a \neq 0,\ b \in \mathbb{R}^n \tag{3.8}$$

Dimostrazione. Dato che u_∞ è un elemento minimizzante per E su M_p, allora

$$E(u_\infty) \leq E(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{q}\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall u \in M_p$$

da cui ricaviamo che vale per ogni $u \neq 0$ in $D^{1,q}(\mathbb{R}^n)$

$$E(u_\infty) \leq \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{2\|u\|^2_{L^p(\mathbb{R}^n)}} + \frac{\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{q\|u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)}}.$$

Sia ora $\lambda > 0$, allora posto $u_\lambda(x) = u\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ vale che

$$\frac{\|\nabla u_\lambda\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\|u_\lambda\|^2_{L^p(\mathbb{R}^n)}} = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\cdot\frac{1}{\lambda}\right)^2 \mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|u\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}}} = \frac{\lambda^{n-2}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(t)|^2\mathrm{d}t}{\lambda^{\frac{2n}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{2}{p}}} = \frac{\lambda^{n-2}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\lambda^{\frac{2n}{p}}\|u\|^2_{L^p(\mathbb{R}^n)}},$$

$$\frac{\|u_\lambda\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{\|u_\lambda\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)}} = \frac{\int_{\mathbb{R}^n}\left|u\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^q \mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|u\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p}}} = \frac{\lambda^n\int_{\mathbb{R}^n}|u(t)|^q\mathrm{d}t}{\lambda^{\frac{nq}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{2}{p}}} = \frac{\lambda^n\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{\lambda^{\frac{nq}{p}}\|u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)}}.$$

Da queste ultime due uguaglianze otteniamo

$$E(u_\infty) \leq \lambda^{n-2-\frac{2n}{p}}\frac{\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{2\|u\|^2_{L^p(\mathbb{R}^n)}} + \lambda^{n\left(1-\frac{q}{p}\right)}\frac{\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{q\|u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)}} = f(\lambda). \tag{3.9}$$

Grazie alle ipotesi, possiamo ricavare che per ogni $n \geq 1$ vale $n-2-\frac{2n}{p} < 0$ e $n\left(1-\frac{q}{p}\right) > 0$, quindi, effettuando lo stesso ragionamento utilizzato nel teorema 2.1.8, possiamo affermare che $f(\lambda)$ ha un minimo finito. Calcolando ora tale minimo (ossia $f'(\lambda_{min}) = 0$) sui $\lambda > 0$ della parte destra della disuguaglianza (3.9) otteniamo che il valore minimizzante è

$$\lambda_{min} = \left(\frac{2-n+\frac{2n}{p}}{n\left(1-\frac{q}{p}\right)}\cdot\frac{A}{B}\right)^{\frac{p}{2n+2p-nq}} \qquad A = \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{2\|u\|^2_{L^p(\mathbb{R}^n)}} \quad B = \frac{\|u\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{q\|u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^n)}}. \tag{3.10}$$

Andando a sostituire il valore di λ_{min} in (3.9) e posto

$$t = \frac{pn-2p-2n}{2n+2p-nq} = \frac{np-nq}{2n+2p-nq} - 1$$

ricaviamo la seguente stima

$$E(u_\infty) \leq \left(K\cdot\frac{A}{B}\right)^{\frac{pn-2p-2n}{2n+2p-nq}}A + \left(K\cdot\frac{A}{B}\right)^{\frac{np-nq}{2n+2p-nq}}B = \left(\frac{KA}{B}\right)^t A + \left(\frac{KA}{B}\right)^{t+1}B =$$

$$= \left(\frac{KA}{B}\right)^t\left(A + \frac{KA}{B}\cdot B\right) = K^t(K+1)A^{t+1}B^{-t} = \tilde{K}\frac{\|\nabla u\|^{2(t+1)}_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\|u\|^{2(t+1)}_{L^p(\mathbb{R}^n)}}\frac{\|u\|^{-tq}_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{\|u\|^{-tq}_{L^p(\mathbb{R}^n)}} =$$

$$= \tilde{K}\frac{\|\nabla u\|^{\frac{2n(p-q)}{2n+2p-nq}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\cdot\|u\|^{q\left(1-\frac{n(p-q)}{2n+2p-nq}\right)}_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{\|u\|^{\frac{2n(p-q)}{2n+2p-nq}}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\cdot\|u\|^{q\left(1-\frac{n(p-q)}{2n+2p-nq}\right)}_{L^p(\mathbb{R}^n)}} = \tilde{K}\frac{\|\nabla u\|^{\frac{2n(p-q)}{2n+2p-nq}}_{L^2(\mathbb{R}^n)}\cdot\|u\|^{\frac{q(n-2)(2^*-p)}{2n+2p-nq}}_{L^q(\mathbb{R}^n)}}{\|u\|^{\frac{p(n-2)(2^*-q)}{2n+2p-nq}}_{L^p(\mathbb{R}^n)}} \tag{3.11}$$

dove $\tilde{K} = K^t(K+1)2^{\frac{n(q-p)}{2n+2p-nq}} q^{\frac{(n-2)(p-2^*)}{2n+2p-nq}}$. Dalla relazione (3.11), possiamo ottenere

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p(n-2)(2^*-q)}{2n+2p-nq}} \leq \frac{\tilde{K}}{E(u_\infty)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n(p-q)}{2n+2p-nq}} \cdot \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{q\left(1-\frac{n(p-q)}{2n+2p-nq}\right)}$$

e isolando la norma p-esima a sinistra abbiamo

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{\tilde{K}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2n(p-q)}{p(n-2)(2^*-q)}} \cdot \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q(2^*-p)}{p(2^*-q)}} = \tilde{\tilde{K}} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2^*(p-q)}{p(2^*-q)}} \cdot \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{\frac{q(2^*-p)}{p(2^*-q)}}$$

dove la costante considerata è

$$\tilde{\tilde{K}} = \left(\frac{\tilde{K}}{E(u_\infty)}\right)^{\frac{2n+2p-nq}{p(n-2)(2^*-q)}} \tag{3.12}$$

che è proprio la disuguaglianza (3.6) che volevamo mostrare, con costante ottima $K_{GN} = \tilde{\tilde{K}}$ che può essere ricavata direttamente da (3.9) e (3.10).

$$\tilde{\tilde{K}} = \frac{2n+2p-nq}{n(p-q)} \cdot \left(\frac{2n+2p-np}{n(p-q)}\right)^{\frac{pn-2p-2n}{2n+2p-nq}} 2^{\frac{n(q-p)}{2n+2p-nq}} q^{\frac{(n-2)(p-2^*)}{2n+2p-nq}} =$$

$$= \frac{\gamma+\delta}{\delta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{-\frac{\delta}{\gamma+\delta}} 2^{-\frac{\delta}{\gamma+\delta}} q^{-\frac{\gamma}{\gamma+\delta}} = \frac{\gamma+\delta}{(q\gamma)^{\frac{\gamma}{\gamma+\delta}}(2\delta)^{\frac{\delta}{\gamma+\delta}}}.$$

Grazie all'ultima relazione trovata e alla (3.12), otteniamo la costante ottima dichiarata in (3.7). Dalla dimostrazione, inoltre, si capisce bene che u_∞ è una funzione ottimale, e dal momento che la disuguaglianza (3.6) è invariante per traslazioni, dilatazioni e moltiplicazione per costante, otteniamo le altre funzioni ottimali

$$v_{a,b}(x) = Cu_\infty(a(x-b)) \qquad C > 0,\ a \neq 0,\ b \in \mathbb{R}^n.$$

$\square$

Osservazione 3.1.2. Possiamo notare che nella dimostrazione precedente l'argomento di scaling che abbiamo utilizzato è indipendente dalla norma scelta, quindi può essere esteso a norme arbitrarie. Inoltre, per $p = 2$ e $q = 1$ otteniamo la disuguaglianza di Nash

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1+\frac{2}{n}} \leq (K_{GN})^{2+\frac{4}{n}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| \mathrm{d}x\right)^{\frac{4}{n}}$$

3.2 Il problema di minimizzazione

Rimane a questo punto da dimostrare che il problema (3.5) ammette una successione convergente minimizzante, con funzione ottimale u_∞, in modo da dare validità al teorema 3.1.1. Per fare ciò, la strada che seguiremo fa uso della teoria del trasporto ottimo; mostreremo nelle prossime sezioni il forte legame esistente tra il nostro problema e questa teoria.

3.2.1 Convessità

Abbiamo bisogno preventivamente di sviluppare alcuni strumenti necessari al nostro lavoro. In questa sottosezione, enunceremo e affronteremo alcuni risultati di analisi convessa; in particolare definiremo la trasformata di Legendre, studiandone le proprietà principali, e il teorema della funzione inversa per mappe monotone, che impiegheremo per la dimostrazione del teorema di cambio di variabile monotono. Nell'ultimo paragrafo daremo anche una dimostrazione della disuguaglianza di Brunn-Minkowski.

3.2.1.1 Proprietà generali di convessità e trasformata di Legendre

Introdurremo ora qualche risultato di analisi convessa in spazi normati reali, analizzando in particolare i casi in $\mathbb{R}^n$ utili alla nostra trattazione.

Definizione 3.2.1. Sia X uno spazio topologico e sia $\psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che ψ è semicontinua inferiormente nel punto $x_0 \in X$ se si ha

$$\psi(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} \psi(x).$$

Diciamo che ψ è semicontinua superiormente nel punto $x_0 \in X$ se si ha

$$\psi(x_0) \geq \limsup_{x \to x_0} \psi(x).$$

Definizione 3.2.2. Sia X uno spazio normato reale e sia $\psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che ψ è sottodifferenziabile nel punto $x_0 \in X$ se esiste un'applicazione affine $\phi : X \to \mathbb{R}$ tale che

$$\phi(x) \leq \psi(x) \qquad \forall x \in X, \quad \phi(x_0) = \psi(x_0).$$

Se ψ è definita in un aperto $U \subset X$, diremo che ψ è sottodifferenziabile nel punto $x_0 \in U$ se lo è l'estensione di ψ che vale $+\infty$ in $X \setminus U$.

Osservazione 3.2.3. Dalla sottodifferenziabilità di una funzione ψ in un punto x_0 seguono subito due fatti. Il primo, banale ma importante, è che $\psi(x_0) \in \mathbb{R}$; il secondo è che esiste $\varphi \in X^*$ tale che

$$\psi(x) \geq \psi(x_0) + \varphi(x - x_0) \qquad \forall x \in X.$$

Infatti se $\phi(x) = \varphi x + b$ è l'applicazione affine che verifica la definizione di sottodifferenzibilità, si ha per ogni $x \in X$

$$\psi(x) \geq \phi(x) = \varphi(x - x_0) + \varphi x_0 + b = \varphi(x - x_0) + \phi(x_0) = \varphi(x - x_0) + \psi(x_0);$$

notiamo che, di conseguenza, ψ è semicontinua inferiormente nel punto x_0.

Definizione 3.2.4. Sia X uno spazio normato reale e sia $\psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Se ψ è sottodifferenziabile in x_0, ogni $\varphi \in X^*$ tale che

$$\psi(x) \geq \psi(x_0) + \varphi(x - x_0) \qquad \forall x \in X$$

si chiama sottogradiente di ψ in x_0; l'insieme dei sottogradienti di ψ in x_0 si chiama sottodifferenziale di ψ in x_0 e si indica con il simbolo $\partial\psi(x_0)$.

Osservazione 3.2.5. Se non esistono sottogradienti di ψ in x_0, evidentemente $\partial\psi(x_0) = \emptyset$; questo accade certamente se $\psi(x_0) = \pm\infty$, ma può anche capitare in un punto x_0 in cui $\psi(x_0) \in \mathbb{R}$, ad esempio se ψ è una funzione concava su $\mathbb{R}$. Se $\varphi \in X^*$, si ha $\varphi \in \partial\psi(x_0)$ se e solo se $\psi(x_0) \in \mathbb{R}$ e $\psi(x) \geq \psi(x_0) + \varphi(x - x_0)$ per ogni $x \in X$. In particolare, $\partial\psi(x_0)$ è un sottoinsieme convesso (eventualmente vuoto) di X^*.

Definizione 3.2.6. Sia X uno spazio normato reale e sia $\psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$. La coniugata, o trasformata di Legendre, di ψ è la funzione $\psi^* : X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ così definita:

$$\psi^*(\varphi) = \sup_{x \in X}\{\varphi x - \psi(x)\} \qquad \forall \varphi \in X^*.$$

Osservazione 3.2.7. Osserviamo i seguenti fatti:

1. La definizione ha sempre senso, in quanto φx è un numero reale per ogni $x \in X$; risulta $\psi^*(\varphi) \leq b$ se e solo se la funzione affine $x \mapsto \varphi x - b$ è minorante di ψ;

2. La funzione ψ^* è sempre convessa e debolmente $*$ semicontinua inferiormente, perché è l'estremo superiore di funzioni che, rispetto alla variabile φ, sono convesse e debolmente $*$ semicontinue inferiormente;

3. Può capitare che sia $\psi^* \equiv +\infty$: ad esempio, se $X = \mathbb{R}$ e $\psi(x) = -\mathrm{e}^x$, si ha $\psi^*(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{yx + \mathrm{e}^x\} = +\infty$ per ogni $y \in \mathbb{R}$. Però quando ψ è convessa ciò non può accadere (sotto certe ipotesi), come mostra la proposizione che segue.

Definizione 3.2.8. Sia X uno spazio vettoriale, sia $\psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Definiamo l'epigrafico di ψ il sottoinsieme di $X \times \mathbb{R}$ così definito:

$$\mathrm{epi}(\psi) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : \psi(x) < t\}.$$

Lemma 3.2.9. *Valgono le seguenti affermazioni:*

1. *Sia X uno spazio vettoriale topologico, sia $\psi : X \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e sia $B \subset X \times \mathbb{R}$ un insieme convesso non vuoto. Se $\operatorname{int}\mathrm{epi}(\psi) \neq \emptyset$, $B \cap \operatorname{int}\mathrm{epi}(\psi) = \emptyset$ ed esistono $\xi \in \mathrm{dom}(\psi)$ e $s \in \mathbb{R}$ tali che $(\xi, s) \in B$, allora si possono trovare $G \in X^*$ e $\lambda > 0$ tali che, posto $\varphi = \Re(G)$, risulti*

$$\varphi y + \lambda s \leq \varphi x + \lambda t \qquad \forall (y,s) \in B, \quad \forall (x,t) \in \mathrm{epi}(\psi).$$

2. *Sia X uno spazio vettoriale topologico localmente convesso di Hausdorff e sia $\psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa, semicontinua inferiormente e tale che $\psi(x) > -\infty$ per ogni $x \in X$. Se $(y,s) \notin \mathrm{epi}(\psi)$, allora si possono trovare $G \in X^*$ e $\lambda > 0$ tali che, posto $\varphi = \Re(G)$, risulti*

$$\varphi y + \lambda s < \inf\{\varphi x + \lambda t : (x,t) \in \mathrm{epi}(\psi)\}.$$

Dimostrazione. Dimostriamo (1). Poiché $\operatorname{int}\mathrm{epi}(\psi)$ e B sono convessi non vuoti disgiunti ed il primo è aperto, per la prima forma geometrica di Hahn-Banach 6.0.33 esiste un funzionale lineare e continuo su $X \times \mathbb{R}$, non nullo, che li separa: in altre parole, esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ e $G : X \to \mathbb{C}$ lineare e continuo, non entrambi nulli e tali che, posto $\varphi = \Re(G)$,

$$\sup\{\varphi y + \lambda s : (y,s) \in B\} \leq \inf\{\varphi x + \lambda t : (x,t) \in \operatorname{int}\mathrm{epi}(\psi)\}.$$

Questa disuguaglianza, per continuità, diventa

$$\sup\{\varphi y + \lambda s : (y,s) \in B\} \leq \inf\{\varphi x + \lambda t : (x,t) \in \overline{\operatorname{int}\mathrm{epi}(\psi)}\},$$

ma dal momento che vale $\overline{\operatorname{int}\mathrm{epi}(\psi)} = \overline{\mathrm{epi}(\psi)}$, deduciamo in particolare

$$\varphi y + \lambda s \leq \varphi x + \lambda t \qquad \forall (y,s) \in B, \quad \forall (x,t) \in \mathrm{epi}(\psi).$$

Dimostriamo che si ha necessariamente $\lambda > 0$. È chiaro che non può essere $\lambda < 0$ perché in tal caso per $t \to \infty$ dedurremmo che il primo membro della disuguaglianza vale $-\infty$. D'altronde, se fosse $\lambda = 0$, la φ sarebbe non nulla; prendendo $(\xi, s) \in B$ con $\xi \in \mathrm{dom}(\psi)$ e scegliendo $y = \xi$, la disuguaglianza si ridurrebbe a

$$\varphi\xi \leq \varphi x \qquad \forall x \in \mathrm{dom}(\psi).$$

Dato che ξ è un punto interno a $\mathrm{dom}(\psi)$, si potrebbe prendere un intorno bilanciato V di 0 tale che $\xi + V \subseteq \mathrm{dom}(\psi)$: quindi scegliendo $x = \xi \pm v$, $v \in V$, ricaveremmo

$$0 \leq \pm\varphi v \qquad \forall v \in V,$$

il che, per linearità, implicherebbe $\varphi \equiv 0$: ma ciò è assurdo, e pertanto deve essere $\lambda > 0$. Dimostriamo (2). Se $\psi \equiv +\infty$, allora $\mathrm{epi}(\psi)$ è vuoto e la tesi è ovvia: supponiamo perciò che esista $z \in X$ tale che $\psi(z) \in \mathbb{R}$. Gli insiemi $\mathrm{epi}(\psi)$ e $\{(y, s)\}$ sono convessi non vuoti e disgiunti in $X \times \mathbb{R}$; inoltre il secondo è compatto ed il primo è chiuso in quanto ψ è semicontinua inferiormente. Per la seconda forma geometrica di Hahn-Banach 6.0.34, esiste un funzionale lineare e continuo su $X \times \mathbb{R}$, non nullo, che li separa strettamente: dunque esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ e $G : X \to \mathbb{C}$ lineare e continuo, non entrambi nulli e tali che, posto $\varphi = \Re(G)$,

$$\varphi y + \lambda s < \beta \leq \varphi x + \lambda t \qquad \forall (x, t) \in \mathrm{epi}(\psi).$$

Se fosse $\lambda < 0$, l'ultimo membro della disuguaglianza sarebbe $-\infty$ e ciò è assurdo; dunque si ha, intanto, $\lambda \geq 0$. Supponiamo dapprima che sia $\psi(y) \in \mathbb{R}$: allora $(y, \psi(y)) \in \mathrm{epi}(\psi)$ e quindi, scegliendo $x = y$ e $t = \psi(y)$ ricaviamo $\lambda s < \lambda\psi(y)$, da cui necessariamente $\lambda > 0$. Se invece $\psi(y) = +\infty$, può essere ancora $\lambda > 0$, e in tal caso abbiamo concluso, oppure $\lambda = 0$: mostreremo che in questo caso si possono comunque modificare λ e G prendendo λ positivo. Supponiamo dunque $\lambda = 0$, cosicché

$$\varphi y < \beta \leq \varphi x \qquad \forall x \in \mathrm{dom}(\psi).$$

Siccome $\psi(z) \in \mathbb{R}$, esiste $u \in \mathbb{R}$ tale che $(z, u) \notin \mathrm{epi}(\psi)$, e come abbiamo appena visto, in questa situazione esistono $\tilde{G} \in X^*$ ed $\epsilon > 0$ tali che, posto $\phi = \Re(\tilde{G})$,

$$\phi z + \epsilon u < \gamma = \inf\{\phi x + \epsilon t : (x, t) \in \mathrm{epi}(\psi)\}.$$

Scegliamo $c > 0$ abbastanza grande da far sì che

$$\epsilon s < \epsilon c(\beta - \varphi y) + \gamma - \phi y.$$

Allora risulta

$$(\epsilon c\varphi + \phi)y + \epsilon s < \gamma + \epsilon c\beta \leq (\epsilon c\varphi + \phi)x + \epsilon t \qquad \forall (x, t) \in \mathrm{epi}(\psi),$$

da cui, posto $\overline{G} = \epsilon c G + \tilde{G}$ e $\eta = \Re(\overline{G}) = \epsilon c\varphi + \phi$, abbiamo

$$\eta y + \epsilon s < \inf\{\eta x + \epsilon t : (x,t) \in \mathrm{epi}(\psi)\}.$$

La tesi è provata anche in questo caso. □

Proposizione 3.2.10. *Sia X uno spazio vettoriale topologico localmente convesso di Hausdorff e sia $\psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa, semicontinua inferiormente e tale che $\psi(x) > -\infty$ per ogni $x \in X$. Allora:*

1. *ψ ha una funzione affine minorante g, ossia esistono $b \in \mathbb{R}$ e un funzionale $G : X \to \mathbb{C}$ lineare e continuo, tali che $\psi(x) \geq g(x) = \Re(Gx) + b$ per ogni $x \in X$;*

2. *ψ è l'inviluppo delle sue funzioni affini minoranti, ossia*

$$\psi(x) = \sup\{g(x) : g \text{ è una funzione affine, } g \leq \psi \text{ in } X\} \qquad \forall x \in X.$$

Dimostrazione. Anzitutto, se $\psi \equiv +\infty$ abbiamo $\psi(x) = +\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} n$ e le proprietà (1), (2) sono ovvie. Se invece esiste $z \in X$ tale che $\psi(z) \in \mathbb{R}$, in particolare $\mathrm{epi}(\psi)$ è un convesso chiuso non vuoto; sia allora $y \in X$ e sia $a \in]-\infty, \psi(y)[$: mostreremo che esiste una funzione affine g, minorante ψ, tale che $a < g(y)$. Ciò proverà la tesi. Dato che $(y,a) \notin \mathrm{epi}(\psi)$, applicando il lemma 3.2.9 troviamo $G : X \to \mathbb{C}$ lineare e continuo e $\lambda > 0$ tali che, posto $\varphi = \Re(G)$,

$$\varphi y + \lambda a < \beta = \inf\{\varphi x + \lambda t : (x,t) \in \mathrm{epi}(\psi)\}.$$

Perciò, posto $g(x) = -\frac{1}{\lambda}\varphi x + \frac{\beta}{\lambda}$, otteniamo

$$a < g(y), \qquad g(x) \leq \psi(x) \qquad \forall x \in \mathrm{dom}(\psi),$$

e a maggior ragione vale $g(x) \leq \psi(x)$ per ogni $x \in X$, che è quanto si voleva. □

Proposizione 3.2.11. *Sia X uno spazio normato reale e sia $\psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa, semicontinua inferiormente e propria. Allora la sua trasformata di Legendre è propria.*

Dimostrazione. Per ipotesi, $\mathrm{dom}(\psi)$ è non vuoto, quindi scelto $x \in \mathrm{dom}(\psi)$ si ha $\psi^*(\varphi) \geq \varphi x - \psi(x) > -\infty$. Inoltre, dato che ψ è una funzione semicontinua inferiormente, convessa e che non assume mai $-\infty$ in uno spazio normato, grazie alla proposizione 3.2.10 esistono $\varphi \in X^*$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che $\psi(x) \geq \varphi x + b$ per ogni $x \in X$: dunque, per l'osservazione precedente, $\psi^*(\varphi) \leq -b$, cosicché ψ è propria. □

Osservazione 3.2.12. È utile precisare la seguente proprietà: otteniamo $\psi(\varphi) > -\infty$ per ogni $\varphi \in X^*$ se e solo se ψ non è identicamente uguale a $+\infty$.

Proposizione 3.2.13. *[Teorema di Young-Legendre] Sia X uno spazio normato reale e sia $\psi : X \to \mathbb{R}$. Se ψ^* è la trasformata di Legendre di ψ, abbiamo*

$$\psi^*(\varphi) \geq \varphi x - \psi(x) \qquad \forall \varphi \in X^*, \quad \forall x \in X.$$

In particolare, se ψ è propria la disuguaglianza acquista la forma simmetrica

$$\varphi x \leq \psi(x) + \psi^*(\varphi) \qquad \forall \varphi \in X^*, \quad \forall x \in X.$$

Dimostrazione. La prima forma della disuguaglianza è banale conseguenza della definizione di ψ^*. Per la seconda basta osservare che se ψ è propria, allora $\psi > -\infty$ per l'osservazione 3.2.12, e quindi la somma $\psi(x) + \psi^*(\varphi)$ è sempre ben definita. □

Teorema 3.2.14. *[Teorema di Fenchel-Moreau] Sia X uno spazio normato reale e sia $\psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ propria. Allora si ha $\psi^{**}(J_x) = \psi(x)$ per ogni $x \in X$ se e solo se f è convessa e semicontinua inferiormente, dove $J : X \to X^{**}$ è l'immersione canonica.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Sappiamo che ψ^{**} è convessa e semicontinua inferiormente per la topologia debole $*$ di X^{**}; quindi $\psi^{**} \circ J$ è convessa e semicontinua inferiormente per la topologia debole di X. Essendo $\psi(x) = \psi^{**}(J_x)$ per ogni $x \in X$, tale è anche ψ e a maggior ragione si ha la tesi.
($\Longleftarrow$) Poiché $\psi^{**}(J_x) \leq \psi(x)$, la tesi è banale se $\psi^{**}(J_x) = +\infty$. Inoltre, siccome ψ è propria, ψ^* non è identicamente $+\infty$ e di conseguenza $\psi^{**} > -\infty$ (osservazione 3.2.12). Perciò dobbiamo provare che se $\psi^{**}(J_x) \in \mathbb{R}$, allora $\psi^{**}(J_x) = \psi(x)$. Supponiamo, per assurdo, che esista $x_0 \in X$ tale che $\psi^{**}(J_{x_0}) < \psi(x_0)$. Allora $(x_0, \psi^{**}(J_{x_0}))$ non appartiene al convesso chiuso $\mathrm{epi}(\psi)$; dunque, per il lemma 3.2.9, esistono $\varphi \in X^*$, $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\varphi x_0 + \alpha \psi^{**}(J_{x_0}) < \beta = \inf_{(x,t) \in \mathrm{epi}(\psi)} \{\varphi x + \alpha t\}.$$

Osservato che

$$\begin{aligned} \beta = & \inf_{(x,t) \in \mathrm{epi}(\psi)} \{\varphi x + \alpha t\} = \inf_{x \in \mathrm{dom}(\psi)} \{\varphi x + \alpha \psi(x)\} = \\ = & -\sup_{x \in \mathrm{dom}(\psi)} \{-\varphi x - \alpha \psi(x)\} = -(\alpha\psi)^*(-\varphi) = -\alpha \psi^* \left(-\frac{\varphi}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

dividendo la disuguaglianza precedente per α ricaviamo

$$\frac{1}{\alpha} \varphi x_0 + \psi^{**}(J_{x_0}) < -\psi^* \left(-\frac{\varphi}{\alpha}\right).$$

Questa relazione contraddice la disuguaglianza di Young: essendo $\psi^{**} > -\infty$, deve infatti essere

$$-\frac{1}{\alpha}\varphi x_0 = J_{x_0}\left(-\frac{\varphi}{\alpha}\right) \leq \psi^{**}(J_{x_0}) + \psi^*\left(-\frac{\varphi}{\alpha}\right).$$

□

Se ora $X = \mathbb{R}^n$ allora $X \cong X^* \cong X^{**}$ la topologia debole $*$ coincide con quella forte, e alcuni risultati prendono la seguente forma:

Definizione 3.2.15. Sia $\psi : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, e sia $\operatorname{dom}\psi = \{x : \psi(x) < \infty\}$. Per ogni $x \in \operatorname{dom}\psi$ definiamo sottodifferenziale di ψ nel punto x il seguente insieme

$$\partial\psi(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \psi(z) \geq \langle y, z - x\rangle + \psi(x) \quad \forall z \in \mathbb{R}^n\}.$$

Definiamo inoltre sottogradiente ogni $y \in \partial\psi(x)$. Porremo inoltre, per ogni $X \subset \operatorname{dom}\psi$, $\partial\psi(X) = \cup_{x\in X}\partial\psi(x)$.

Osservazione 3.2.16. Quando $x \in \Omega = \operatorname{int}\operatorname{dom}\psi$ il sottodifferenziale $\partial\psi(x)$ oltre ad essere convesso e chiuso è anche limitato. La differenziabilità di ψ in x equivale a chiedere che esista un unico $y \in \partial\psi(x)$ che in tal caso sarà il gradiente. Possiamo esprimere una sorta di proprietà di continuità di $\partial\psi$:

Proposizione 3.2.17. *Sia ψ una funzione convessa in $\mathbb{R}^n$ e $\Omega = \operatorname{int}\operatorname{dom}\psi$. Allora $\partial\psi(K)$ è compatto se $K \subset \Omega$ è compatto, e se $x_k \to x$, $y_k \in \partial\psi(x_k)$ allora $y_k \to \nabla\psi(x)$ quando questo esiste.*

Dimostrazione. Per ipotesi $y_k \in \partial\psi(x_k)$, quindi vale

$$\psi(x) - \psi(x_k) - \langle y_k, x - x_k\rangle \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dunque scelto $x = x_k \pm v$, otteniamo

$$\begin{aligned}\langle y_k, v\rangle &\leq \psi(x_k + v) - \psi(x_k),\\ \langle y_k, -v\rangle &\leq \psi(x_k - v) - \psi(x_k),\end{aligned}$$

allora $|\langle y_k, v\rangle| \leq 2C$ ove $C = \max_{B_{r_0}(x_0)} |\psi|$ con $B_{r_0}(x_0) \subseteq \Omega$ e $\|v\| \leq \frac{r_0}{2}$, $\|x_k - x_0\| \leq \frac{r_0}{2}$. Perciò

$$\sup_{\|v\|\leq\frac{r_0}{2}} |\langle y_k, v\rangle| \leq 2C,$$

da cui per omogeneità

$$\|y_k\| = \sup_{\|w\|\leq 1} |\langle y_k, w\rangle| \leq \frac{4C}{r_0}.$$

Passando a sottosuccessioni, si ha $y_k \to y_0$. Al limite nella relazione di sottodifferenzibilità otteniamo

$$\psi(x) - \psi(x_0) - \langle y_0, x - x_0 \rangle \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

quindi $y_0 \in \partial\psi(x_0) = \{\nabla\psi(x_0)\}$, cioè $y_k \to \nabla\psi(x_0)$. □

Definizione 3.2.18. Sia ψ una funzione convessa su $\mathbb{R}^n$. Diremo che ψ è due volte differenziabile in x_0 con Hessiano $\nabla^2\psi(x_0)$ se esiste $\nabla\psi(x_0)$ ed esiste una matrice simmetrica Λ (che denoteremo come $\Lambda = \nabla^2\psi(x_0)$), tale che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ per cui

$$\sup_{y \in \partial\psi(x)} |y - \nabla\psi(x_0) - \Lambda(x - x_0)| < \epsilon|x - x_0|. \tag{3.13}$$

per ogni x tale che $|x - x_0| < \delta$.

Lemma 3.2.19. *Supponiamo $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ convessa e non crescente e $g : [0, 1] \to \infty$ concava. Allora $h \circ g$ è convessa.*

Dimostrazione. Per ogni $s, t, t' \in [0, 1]$ vale

$$g((1 - s)t + st') \geq (1 - s)g(t) + sg(t'),$$

quindi grazie alle ipotesi otteniamo

$$h \circ g((1 - s)t + st') \leq h((1 - s)g(t) + sg(t')) \leq (1 - s)h(g(t)) + sh(g(t)).$$

□

Definizione 3.2.20. Sia $\psi : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa. Si definisce trasformata di Legendre di ψ la funzione

$$\mathcal{L}(\psi)(p) = \psi^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle p, x \rangle - \psi(x)\}. \tag{3.14}$$

Proposizione 3.2.21. *La trasformata di Legendre è un'involuzione, cioè vale per ogni funzione convessa e semicontinua inferiormente ψ*

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}(\psi))(x) = \psi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Conseguenza del teorema 3.2.14. □

Definizione 3.2.22. Due funzioni f e g si dicono duali nel senso di Young se $g(p) = \mathcal{L}(f)(p)$ e di conseguenza $f(p) = \mathcal{L}(g)(p)$.

Teorema 3.2.23. *[Teorema di Young-Legendre] Se f e g sono funzioni convesse duali nel senso di Young, allora vale $\langle p, x\rangle \leq f(x) + g(p)$.*

Dimostrazione. Conseguenza del teorema 3.2.13. □

Proposizione 3.2.24. *Sia ψ una funzione convessa e coerciva su $\mathbb{R}^n$, ossia $\lim_{|x|\to\infty} \frac{\psi(x)}{|x|} = \infty$; allora $\psi^*(y) < \infty$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Sotto le nostre ipotesi, fissato $y \in \mathbb{R}^n$ esiste $R > 0$ tale che per $|x| > R$ abbiamo $\psi(x) > |x||y|$, da cui $\langle y, x\rangle - \psi(x) < 0$ per $|x| > R$. Ma se $|x| \leq R$, poiché ψ ha una minorante affine $\langle s, x\rangle + b$, otteniamo la disuguaglianza $\langle y, x\rangle - \psi(x) \leq \langle y - s, x\rangle - b \leq R|y - s| - b = M$, quindi si conclude che $\psi^*(y) \leq \max\{0, M\} < \infty$. □

Proposizione 3.2.25. *Sia ψ una funzione convessa su $\mathbb{R}^n$; allora, detta ψ^* la sua trasformata di Legendre, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ in cui ψ è differenziabile abbiamo*

$$\psi(x) + \psi^*(\nabla\psi(x)) = \langle\nabla\psi(x), x\rangle.$$

Dimostrazione. Notiamo che se $y \in \partial\psi(x)$ allora per definizione

$$\psi(z) \geq \langle y, z - x\rangle + \psi(x) \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

ossia

$$\langle y, x\rangle \geq \langle y, z\rangle - \psi(z) + \psi(x) \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

e passando all'estremo superiore su $z \in \mathbb{R}^n$, otteniamo la disuguaglianza $\langle y, x\rangle \geq \psi^*(y) + \psi(x)$, che insieme al teorema di Young-Legendre 3.2.23 ci fornisce $\langle y, x\rangle = \psi^*(y) + \psi(x)$. Inoltre, se vale tale uguaglianza ricaviamo

$$\langle y, z\rangle - \psi(z) \leq \psi^*(y) = \langle y, x\rangle - \psi(x) \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

ossia $y \in \partial\psi(x)$. Grazie al teorema 3.2.21 sappiamo che

$$\psi(x) + \psi^*(y) = \langle y, x\rangle \iff y \in \partial\psi(x) \iff x \in \partial\psi^*(y).$$

Se, in particolare, ψ è differenziabile in x, allora il sottodifferenziale di ψ in x è costituito dal solo punto $\nabla\psi(x)$. Perciò in questa ipotesi

$$y = \nabla\psi(x) \iff \psi(x) + \psi^*(y) = \langle y, x\rangle,$$

cioè la tesi. □

Lemma 3.2.26. *Sia ψ una funzione convessa su $\mathbb{R}^n$ e siano $x, y \in \mathbb{R}^n$. Allora $x \in \partial\psi(y)$ implica $y \in \partial\psi^*(x)$. Inoltre, se ψ è semicontinua inferiormente allora vale l'implicazione inversa.*

Dimostrazione. Sia $x \in \partial\psi(y)$. Allora per definizione

$$\psi(z) \geq \langle y, z - x\rangle + \psi(x) \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Allora vale

$$\langle y, z\rangle - \psi(z) \leq \langle y, x\rangle - \psi(x) \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

da cui ricaviamo

$$\psi^*(y) = \sup_{z\in\mathbb{R}^n}\{\langle y, z\rangle - \psi(z)\} \leq \sup_{z\in\mathbb{R}^n}\{\langle x, y\rangle - \psi(x)\} = \langle x, y\rangle - \psi(x).$$

Quindi, per ogni $w \in \mathbb{R}^n$,

$$\psi^*(y) \leq \langle w, x\rangle - \psi(x) - \langle w - y, x\rangle \leq \sup_{t\in\mathbb{R}^n}\{\langle w, t\rangle - \psi(t)\} - \langle w - y, x\rangle,$$

che implica per ogni $w \in \mathbb{R}^n$ la validità di

$$\psi^*(y) \leq \psi^*(w) - \langle w - y, x\rangle \Longrightarrow \psi^*(w) \geq \psi^*(y) + \langle w - y, x\rangle.$$

Sia ora $y \in \partial\psi^*(x)$. Allora per il teorema 3.2.21 otteniamo $\psi^{**} = \psi$, quindi per la dimostrazione precedente otteniamo $x \in \partial\psi^{**}(y) = \partial\psi(y)$. □

Proposizione 3.2.27 (Teorema della funzione inversa per mappe monotone)**.** *Sia ψ una funzione convessa su $\mathbb{R}^n$, due volte differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nel senso* (3.13)*, per cui $\nabla\psi(x_0)$ esiste e $\psi < \infty$ in un intorno di x_0. Se $\Lambda = \nabla^2\psi(x_0)$ è invertibile, allora ψ^* è due volte differenziabile in $\nabla\psi(x_0)$ con Hessiano Λ^{-1}; se Λ non è invertibile allora ψ^* non è due volte differenziabile in $\nabla\psi(x_0)$.*

Dimostrazione. Poniamo $y_0 = \nabla\psi(x_0)$. Possiamo supporre che $x_0 = y_0 = 0$ senza perdere di generalità, infatti se così non fosse, considerata la funzione $\overline{\psi}(x) = \psi(x + x_0) - \langle y_0, x\rangle$, avremmo $\nabla\overline{\psi}(x) = \nabla\psi(x + x_0) - y_0$ e quindi $\nabla\overline{\psi}(0) = 0$. In tal caso

$$\begin{aligned}\overline{\psi}^*(y) = & \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{\langle y, x\rangle - \overline{\psi}(x)\} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{\langle y + y_0, x\rangle - \psi(x + x_0)\} = \\ = & \sup_{w\in\mathbb{R}^n}\{\langle y + y_0, w - x_0\rangle - \psi(w)\} = \psi^*(y + y_0) - \langle y + y_0, x_0\rangle.\end{aligned}$$

La prima cosa da mostrare è che per Λ invertibile, ψ^* è differenziabile in 0 con $\nabla\psi^*(0)$=0. Questo è vero se e solo se $\partial\psi^*(0) = \{0\}$. Dal momento che $\nabla\psi(0) = 0$ allora $0 \in \partial\psi(0)$, quindi per il lemma 3.2.26 vale $0 \in \partial\psi^*(0)$ e quindi data la convessità di $\partial\psi^*(0)$, è chiaro che se $x \in \partial\psi^*(0)$ allora $tx \in \partial\psi^*(0)$ per ogni $t \in [0, 1]$. Applicando nuovamente il lemma 3.2.26 otteniamo $0 \in \partial\psi(tx)$ per ogni $t \in [0, 1]$. Per ogni $\epsilon > 0$, prendendo t

abbastanza piccolo in (3.13) otteniamo $|\Lambda x| < \epsilon|x|$. Siccome Λ è invertibile, allora $x = 0$ e quindi $\nabla\psi^*(0) = 0$. Mostriamo ora la doppia differenziabilità di ψ^* in 0. Sia $\epsilon > 0$, dalle proprietà di continuità di $\partial\psi^*$ in 0, se $y \in \partial\psi(x)$ e $|y|$ è sufficientemente piccolo, allora $|x|$ è piccolo abbastanza affinché in (3.13) sia verificata la condizione $|y - \Lambda x| < \epsilon|x|$. Da quest'ultima disuguaglianza otteniamo immediatamente la disuguaglianza

$$\|\Lambda^{-1}\|^{-1}|\Lambda^{-1}y - x| < \epsilon|x - \Lambda^{-1}y| + \epsilon|\Lambda^{-1}y|.$$

Per $\epsilon < (2\|\Lambda^{-1}\|)^{-1}$ otteniamo $|x - \Lambda^{-1}y| < 2\epsilon\|\Lambda^{-1}\|^2|y|$, che esprime la doppia differenziabilità di ψ^* in 0. Affrontiamo il caso di Λ non invertibile. Allora il nucleo di Λ non è fatto dal solo vettore nullo; sia $x \in \mathbb{R}^n$ uno di tali vettori. Dalla (3.13), ricaviamo che esiste una successione $x_k \to 0$ di multipli di x e $y_k \in \partial\psi(x_k)$ per cui $|y_k| \leq k^{-1}|x_k|$. Per ogni matrice Λ' e $\epsilon > 0$, prendendo k abbastanza grande, violiamo $|x_k - \Lambda' y_k| < \epsilon|y_k|$. Perciò ψ^* non è due volte differenziabile in 0. $\square$

Definizione 3.2.28. Diremo che una successione di insiemi di Borel $\{M_k\}$ converge bene a $x \in \mathbb{R}^n$ se esiste una successione $\{r_k\}$ infinitesima per cui $M_k \subset B_{r_k}(x)$ ed esiste $\delta > 0$ tale che $\frac{\mu(M_k)}{\mu(B_{r_k})} \geq \delta$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Proposizione 3.2.29 (Teorema del Jacobiano)**.** *Sia ψ una funzione convessa su $\mathbb{R}^n$, due volte differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nel senso* (3.13)*, con matrice Hessiana $\Lambda = \nabla^2\psi(x_0)$. Se $B_r(x_0)$ è la palla di centro x e raggio r, allora vale*

$$\frac{\mu(\partial\psi(B_r(x_0)))}{\mu(B_r(x_0))} \xrightarrow{r\to 0} \det[\nabla^2\psi(x_0)]. \tag{3.15}$$

Per Λ invertibile, $\partial\psi(B_r(x_0))$ converge bene a $\nabla\psi(x_0)$.

Dimostrazione. Come nella precedente proposizione, il caso $x_0 = \nabla\psi(x_0) = 0$ è del tutto generale. Assumiamo Λ invertibile. Denotiamo $B_r(0)$ con B_r e sia $\Lambda(B_r)$ la sua immagine attraverso Λ. Sia $\epsilon > 0$; per $r < \delta$ dalla (3.13) ricaviamo

$$\partial\psi(B_r) \subset (1 + \epsilon\|\Lambda^{-1}\|)\lambda(B_r). \tag{3.16}$$

D'altra parte, grazie alla proposizione 3.2.27 risulta che ψ^* è due volte differenziabile con Hessiano Λ^{-1} in 0. Lo stesso argomento, applicato a $\Lambda(B_r)$, mostra che per r abbastanza piccolo vale $\partial\psi^*(\Lambda(B_r)) \subset (1+\epsilon\|\Lambda\|)B_r$. Prendendo r ancora più piccolo se necessario, di modo che $(1+\epsilon\|\Lambda^{-1}\|)\lambda(B_r)$ stia nella parte interna di $\operatorname{dom}\psi^*$, la dualità verifica

$$(1 + \epsilon\|\Lambda^{-1}\|)\lambda(B_r) \subset \partial\psi(B_r). \tag{3.17}$$

Dato che $\epsilon > 0$ era arbitrario, la relazione (3.15) segue da (3.16) e (3.17) mandando $r \to 0$, con l'identità $\det\Lambda = \lim_{r\to 0} \frac{\mu(\Lambda(B_r))}{\mu(B_r)}$. Per r piccolo è evidente dalle relazioni (3.16) e (3.17) che $\partial\psi(B_r)$ è ben convergente: è contenuto in una famiglia di palle $B_{R(r)}$ per cui $R(r) \to 0$, mentre $\partial\psi(B_r)$ occupa una frazione di $B_{R(r)}$ che è limitata lontana da zero. Sia ora Λ non invertibile, in questo caso $\Lambda(B_r)$ sta in un sottospazio $(n-1)$-dimensionale di $\mathbb{R}^n$. Dato $\epsilon > 0$, se $y \in \partial\psi(x)$ per $|x|$ sufficientemente piccolo, la relazione (3.13) implica che $|y - \Lambda x| < \epsilon|x|$. Perciò $\mu(\partial\psi(B_r)) \leq 2\epsilon(\|\Lambda\| + \epsilon)^{n-1}cr^n$ dove c è la misura $(n-1)$-dimensionale della palla unitaria. Dato che $\epsilon > 0$ era arbitrario, il limite (3.15) è zero. $\square$

3.2.1.2 Teorema del cambio di variabile monotono

Sia ψ una funzione convessa su $\mathbb{R}^n$ e denotiamo la parte interna del convesso $\{x \in \mathbb{R}^n : \psi(x) < \infty\}$ con $\Omega = \operatorname{int}\operatorname{dom}\psi$. Allora la funzione gradiente $\nabla\psi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ rappresenta la generalizzazione, in dimensione maggiore di 1, della derivata prima che è un'applicazione monotona sull'intervallo. Inoltre $\nabla\psi$ è una funzione misurabile e differenziabile q.o. Utilizzeremo $\nabla\psi$ per effettuare il push-forward di alcune misure di Radon, che denoteremo con $\mathcal{M}(\Omega)$ (non sono misure finite, ma hanno massa finita sui compatti) da Ω a $\mathbb{R}^n$. Se $\rho \in \mathcal{M}(\Omega)$ è noto che $\rho = \rho_{ac} + \rho_{sing}$, dove ρ_{ac} è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e ρ_{sing} è nulla eccetto che sugli insiemi di misura nulla secondo la misura di Lebesgue. L'insieme $\mathcal{M}_{ac}(\Omega)$ delle misure assolutamente continue è un sottoinsieme di $L^1_{loc}(\Omega)$, perciò ρ_{ac} può essere vista simultaneamente come misura e come funzione.

Definizione 3.2.30. Sia $\rho \in \mathcal{M}(\Omega)$. Definiamo la sua derivata simmetrica $D\rho$ nel punto $x \in \Omega$ nella seguente maniera

$$D\rho(x) := \lim_{r\to 0} \frac{\rho(B_r(x))}{\mu(B_r)} \tag{3.18}$$

dove $B_r(x)$ è la palla di centro x e raggio r.

Osservazione 3.2.31. $D\rho(x)$ esiste e coincide con $\rho_{ac}(x)$ q.o.; $D\rho(x) = \infty$ su insiemi di misura totale per ρ_{sing}. Dalla derivata simmetrica ρ-q.o. è possibile ricostruire ρ_{ac} e determinare se $\rho_{sing} = 0$. Nei punti di Lebesgue di $\rho = \rho_{ac}$, quindi q.o., il limite (3.18) rimane inalterato se le palle $B_r(x)$ le rimpiazziamo con una successioni di insiemi di Borel $\{M_k\}$ che *convergono bene* a x.

Definizione 3.2.32. Definiamo $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n), d_2)$ lo spazio delle densità di probabilità munite della metrica di Wasserstein, ossia

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \left\{\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ : \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\mathrm{d}x = 1\right\}$$

$$d_2(\rho_0, \rho_1) = \left(\inf\{\mathbb{E}[|X - Y|^2] : X \sim \rho_0 \mathrm{d}x, Y \sim \rho_1 \mathrm{d}x\}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Indicheremo inoltre con $\mathcal{P}_{ac}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ le densità di probabilità assolutamente continue.

Lemma 3.2.33. *Sia ψ convessa su $\mathbb{R}^n$, $\Omega := \operatorname{int}\operatorname{dom}\psi$, e denotiamo il sottodifferenziale della sua trasformata di Legendre con $\partial\psi^*$. Sia $\rho \in \mathcal{M}_{ac}(\Omega)$. Detta $\nabla\psi_\#$ la mappa di push-forward, per ogni $M \subset \Omega$ insieme di Borel si ha*

$$\nabla\psi_\#\rho(M) = \rho[\partial\psi^*(M)].$$

Dimostrazione. Per definizione abbiamo $\nabla\psi_\#\rho(M) = \rho[(\nabla\psi)^{-1}(M)]$. Ma $(\nabla\psi)^{-1}(M) \subset \partial\psi^*(M)$, e la differenza è un insieme trascurabile secondo ρ. Il contenimento è ovvio: se $\nabla\psi(x) = y \in M$ allora $y \in \partial\psi(x)$ oppure $x \in \partial\psi^*(y)$. D'altra parte, può essere $x \in \partial\psi^*(y)$ senza che $\nabla\psi$ sia univocamente determinato in x; in ogni caso, questo accade solo in un insieme trascurabile secondo Lebesgue. □

Proposizione 3.2.34. *Sia ψ convessa su $\mathbb{R}^n$, $\Omega := \operatorname{int}\operatorname{dom}\psi$ e $\rho \in \mathcal{M}_{ac}(\Omega)$. Supponiamo che x sia un punto di Lebesgue per ρ nel quale ψ sia due volte differenziabile con Hessiano invertibile $\Lambda := \nabla^2\psi(x)$. Allora, in $\nabla\psi(x)$ la derivata simmetrica della misura $\nabla\psi_\#\rho$ esiste ed è uguale a $\frac{\rho(x)}{det\Lambda}$.*

Dimostrazione. Grazie al teorema della funzione inversa 3.2.27 la funzione ψ^* risulta differenziabile due volte nel punto $y = \nabla\psi(x)$ con Λ^{-1} il suo Hessiano. La proposizione 3.2.29 allora mostra che $\partial\psi^*(B_r(y))$ *converge bene* a x. Dato che x è un punto di Lebesgue per ρ, otteniamo

$$\frac{\rho[\partial\psi^*(B_r(y))]}{\mu(\partial\psi^*(B_r(y)))} \xrightarrow{r\to 0} \rho(x).$$

Per lo stesso limite, la proposizione 3.2.29 mostra anche che

$$\frac{\mu(\partial\psi^*(B_r(y)))}{\mu(B_r)} \xrightarrow{r\to 0} \det\Lambda^{-1}.$$

Il prodotto di queste ultime due relazioni e il lemma 3.2.33 provano la tesi. □

Corollario 3.2.35. *Sia ψ convessa su $\mathbb{R}^n$, e poniamo $\Omega := \operatorname{int}\operatorname{dom}\psi$. Allora la funzione $\det[\nabla^2\psi(x)] \geq 0$ è in $L^1_{loc}(\Omega)$. Inoltre, l'immagine di $\det[\nabla^2\psi(x)]$, tramite la mappa di push-forward $\nabla\psi_\#$, è esattamente la misura di Lebesgue ristretta a $\partial\psi(M)$, dove M è l'insieme dei punti dove $\nabla^2\psi$ e la sua inversa esistono, che sono i punti di Lebesgue per $\det[\nabla^2\psi]$.*

Dimostrazione. Consideriamo la trasformata di Legendre ψ^* e la misura di Lebesgue su $\Omega := \operatorname{int}\operatorname{dom}\psi^*$. La prima affermazione da provare è: $\det[\nabla^2\psi(x)]$ sta in $L^1_{loc}(\Omega)$; infatti essa è la parte assolutamente continua della misura $\omega := \nabla\psi^*_{\#}\mu$. Sebbene tale misura ω possa avere massa infinita vicino la frontiera di Ω, la sua restrizione a Ω è una misura di Radon: se $K \subset \Omega$ è compatto allora tale è $\partial\psi(K)$, da cui $\omega(K) = \mu(\partial\psi(K)) < \infty$. Il risultato sarà provato se $\det[\nabla^2\psi] = D\omega$ μ-q.o. su Ω, dove $D\omega$ è la derivata simmetrica. Ricordiamo che $\nabla^2\psi$ esiste q.o. Dove $\det[\nabla^2\psi(x)] > 0$, la proposizione 3.2.34 (applicata a ψ^* con $\rho = \mu$) e il teorema della funzione inversa 3.2.27 mostrano che vale $D\omega = \det[\nabla^2\psi(x)]$. D'altra parte, $D\omega$ deve essere nulla q.o. sull'insieme Z dove $\det[\nabla^2\psi(x)] = 0$: per il lemma 3.2.33 e la proposizione 3.2.27 la condizione $0 < \omega(Z) = \mu(\partial\psi(Z))$ sarebbe incompatibile col fatto che $\nabla^2\psi^*$ non esiste su $\partial\psi(Z)$. Questo mostra il primo asserto. Applicando nuovamente la proposizione 3.2.34 a ψ, con $\rho = \det[\nabla^2\psi]$, si vede che la derivata simmetrica di $\nabla\psi_{\#}\rho$ è uguale a 1 su $\partial\psi(M)$. L'insieme $\partial\psi(M)$ ha misura unitaria secondo $\nabla\psi_{\#}\rho$, dato che M è unitario per ρ. Perciò $\nabla\psi_{\#}\rho$ non può essere altro che la misura di Lebesgue su $\partial\psi(M)$. □

Proposizione 3.2.36. *Siano $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}_{ac}(\mathbb{R}^n)$ e sia ψ una funzione convessa per cui $\nabla\psi_{\#}\rho_0 = \rho_1$. Detto $X \subset \mathbb{R}^n$ l'insieme dei punti per cui $\nabla\psi(x)$ è ben definito e invertibile, allora X ha misura unitaria. Se F è una funzione misurabile su $[0,\infty)$ con $F(0) = 0$ allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(\rho_1(y))\mathrm{d}y = \int_X F\left(\frac{\rho_0(x)}{\det[\nabla^2\psi(x)]}\right)\det[\nabla^2\psi(x)]\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Dal momento che $\nabla\psi$ è una mappa di push-forward tra ρ_0 e ρ_1 , allora ψ deve essere finita su un insieme di massa unitaria secondo ρ_0. Perciò, $\nabla\psi(x)$ esiste ρ_0-q.o., e per la proposizione 3.2.27 può non essere invertibile solo sull'insieme $\partial\psi^*(Z)$, dove $Z = \{y|\nabla^2\psi^*(x) \text{ non esiste}\}$. Dall'assoluta continuità di ρ_1 e dal lemma 3.2.33, abbiamo $\rho_0[\partial\psi^*(Z)] = \rho_1[Z] = 0$. Quindi X è di misura unitaria per ρ_0. Sia $M \subset X$ costituito dai punti di Lebesgue per $\det[\nabla^2\psi]$, funzione che sta in $L^1_{loc}(\Omega)$ per il precedente corollario. M differisce da X per un insieme di misura nulla secondo Lebesgue. Perciò $\partial\psi(M)$ è di misura unitaria per ρ_1. Dato che $\nabla\psi$ funge da push-forward tra $\det[\nabla^2\psi]$ e la misura di Lebesgue sull'insieme $\partial\psi(M)$, dal corollario 3.2.35 otteniamo

$$\int_{\partial\psi(M)} F(\rho_1(y))\mathrm{d}y = \int_M F(\rho_1(\nabla\psi(x)))\det[\nabla^2\psi(x)]\mathrm{d}x.$$

Scegliendo ρ_1 coincidente con la sua derivata simmetrica, la proposizione 3.2.34 mostra che $\rho_1(\nabla\psi(x)) = \frac{\rho_0(x)}{\det[\nabla^2\psi(x)]}$ nei punti di Lebesgue di ρ_0 in M. Notando che $F(0) = 0$, la tesi segue immediatamente. □

3.2.1.3 Disuguaglianza di Brunn-Minkowski

Teorema 3.2.37 (Disuguaglianza di Prekopa-Leindler)**.** *Siano* $\lambda \in (0,1)$ *e* f, g, h *funzioni non negative integrabili per le quali valga per ogni* $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}. \tag{3.19}$$

Allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\mathrm{d}x \geq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x\Big)^{1-\lambda} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathrm{d}x\Big)^{\lambda}.$$

Dimostrazione. Lo dimostreremo per induzione sulla dimensione n. Proviamolo inizialmente per $n = 1$. Possiamo assumere senza perdita di generalità che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = F > 0 \qquad \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}x = G > 0.$$

Definiamo $u, v : [0,1] \to \mathbb{R}$ per cui $u(t)$ e $v(t)$ siano i più piccoli numeri che soddisfano

$$\frac{1}{F}\int_{-\infty}^{u(t)} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{G}\int_{-\infty}^{v(t)} g(x)\mathrm{d}x = t. \tag{3.20}$$

Allora u e v possono essere discontinue, ma sono funzioni strettamente crescenti e quindi differenziabili q.o. Sia $w(t) = (1-\lambda)u(t) + \lambda v(t)$. Derivando la relazione (3.20) rispetto a t otteniamo

$$\frac{f(u(t))u'(t)}{F} = \frac{g(v(t))v'(t)}{G} = 1.$$

Usando l'ultima relazione trovata e la proposizione 6.0.29, otteniamo (quando $f(u(t)) \neq 0$ e $g(v(t)) \neq 0$)

$$w'(t) = (1-\lambda)u'(t) + \lambda v'(t) \geq u'(t)^{1-\lambda} v'(t)^{\lambda} = \left(\frac{F}{f(u(t))}\right)^{1-\lambda} \left(\frac{G}{g(v(t)}\right)^{\lambda}.$$

Perciò ricaviamo

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^1 h(w(t))w'(t)\mathrm{d}t \geq$$

$$\geq \int_0^1 f(u(t))^{1-\lambda} g(v(t))^{\lambda} \left(\frac{F}{f(u(t))}\right)^{1-\lambda} \left(\frac{G}{g(v(t)}\right)^{\lambda} \mathrm{d}t = F^{1-\lambda}G^{\lambda}.$$

Supponiamo allora sia verificata la disuguaglianza per ogni numero naturale più piccolo di n. Per ogni $s \in \mathbb{R}$ definiamo la funzione non negativa h_s su $\mathbb{R}^{n-1}$ in questa maniera $h_s(z) = h(z, s)$. Definiamo f_s e g_s analogamente. Siano $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$ e poniamo $c = (1-\lambda)a + \lambda b$. Allora

$$h_c((1-\lambda)x + \lambda y) = h((1-\lambda)x + \lambda y, (1-\lambda)a + \lambda b) =$$

$$= h((1-\lambda)(x,a)+\lambda(y,b)) \geq f(x,a)^{1-\lambda} g(y,b)^{\lambda} = f_a(x)^{1-\lambda} g_b(y)^{\lambda}.$$

Per ipotesi induttiva ricaviamo

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_c(x)\mathrm{d}x \geq \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_a(x)\mathrm{d}x\Big)^{1-\lambda} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_b(x)\mathrm{d}x\Big)^{\lambda}.$$

Poniamo

$$H(c) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_c(x)\mathrm{d}x \qquad F(a) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_a(x)\mathrm{d}x \qquad G(b) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_b(x)\mathrm{d}x,$$

allora

$$H(c) = H((1-\lambda)a + \lambda b) \geq F(a)^{1-\lambda} G(b)^{\lambda}.$$

Allora dal teorema di Fubini 6.0.28 e dal passo base otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_c(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}c = \int_{\mathbb{R}} H(c)\mathrm{d}c \geq$$

$$\geq \Big(\int_{\mathbb{R}} F(a)\mathrm{d}a\Big)^{1-\lambda} \Big(\int_{\mathbb{R}} G(b)\mathrm{d}b\Big)^{\lambda} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x\Big)^{1-\lambda} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathrm{d}x\Big)^{\lambda}.$$

□

Corollario 3.2.38. *Sia $\lambda \in (0,1)$ e siano X, Y insiemi limitati misurabili in $\mathbb{R}^n$ per cui $(1-\lambda)X + \lambda Y$ sia misurabile. Allora detta μ la misura di Lebesgue*

$$\mu((1-\lambda)X + \lambda Y) \geq \mu(X)^{1-\lambda} \mu(Y)^{\lambda}.$$

Dimostrazione. Utilizziamo la disuguaglianza di Prekopa-Leindler 3.2.37 con le seguenti imposizioni

$$h = \chi_{(1-\lambda)X+\lambda Y} \qquad f = \chi_X \qquad g = \chi_Y.$$

Se $x, y \in \mathbb{R}^n$, allora $f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda} > 0$ se e solo se $x \in X$ e $y \in Y$. Ciò implica che $(1-\lambda)x+\lambda y \in (1-\lambda)X+\lambda Y$, che è vero se e solo se $h((1-\lambda)x+\lambda y) = 1$. Quindi vale la (3.19), perciò

$$\mu((1-\lambda)X + \lambda Y) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(1-\lambda)X+\lambda Y}(x)\mathrm{d}x \geq$$

$$\geq \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_X(x)\mathrm{d}x\Big)^{1-\lambda} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_Y(x)\mathrm{d}x\Big)^{\lambda} = \mu(X)^{1-\lambda} \mu(Y)^{\lambda}.$$

□

Teorema 3.2.39 (Disuguaglianza di Brunn-Minkowski)**.** *Sia $n \geq 1$ e sia μ la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$. Siano X e Y due sottoinsiemi compatti non vuoti di $\mathbb{R}^n$. Allora per ogni $\lambda \in (0,1)$ vale la seguente disuguaglianza*

$$[\mu((1-\lambda)X + \lambda Y)]^{1/n} \geq (1-\lambda)[\mu(X)]^{1/n} + \lambda[\mu(Y)]^{1/n}, \tag{3.21}$$

dove $X+Y$ denota la somma di Minkowski

$$X + Y := \{\, x + y \in \mathbb{R}^n \mid x \in X,\ y \in Y \,\}.$$

Dimostrazione. Sia

$$\lambda' = \frac{\mu(Y)^{\frac{1}{n}}}{\mu(X)^{\frac{1}{n}} + \mu(Y)^{\frac{1}{n}}}$$

e siano $X' = \mu(X)^{-\frac{1}{n}}X$ e $Y' = \mu(Y)^{-\frac{1}{n}}Y$. Allora

$$1 - \lambda' = \frac{\mu(X)^{\frac{1}{n}}}{\mu(X)^{\frac{1}{n}} + \mu(Y)^{\frac{1}{n}}}$$

e $\mu(X) = \mu(Y) = 1$, grazie al fatto che $\mu(rA) = r^n\mu(A)$ per ogni $r \geq 0$. Allora applicando il corollario 3.2.38 otteniamo $\mu((1-\lambda')X' + \lambda'Y') \geq 1$. Ma

$$\mu((1-\lambda')X' + \lambda'Y') = \mu\left(\frac{X+Y}{\mu(X)^{\frac{1}{n}} + \mu(Y)^{\frac{1}{n}}}\right) = \frac{\mu(X+Y)}{(\mu(X)^{\frac{1}{n}} + \mu(Y)^{\frac{1}{n}})^n}$$

che ci fornisce

$$\mu(X+Y)^{\frac{1}{n}} \geq \mu(X)^{\frac{1}{n}} + \mu(Y)^{\frac{1}{n}}.$$

Per ottenere la relazione (3.21) basta rimpiazzare X e Y con $(1-\lambda)X$ e λY. $\square$

Lemma 3.2.40. *Sia $\Lambda \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice definita positiva. Definita la funzione $v(t) = \det((1-t)I + t\Lambda)$, vale che $v^{\frac{1}{n}}(t)$ è concava su $[0,1]$.*

Dimostrazione. Definiamo i seguenti insiemi

$$A_\delta = [0, 1-\delta]^n \qquad B_\delta = \prod_{i=1}^{n}[0, \delta\lambda_i] \qquad \delta \in (0,1),$$

allora, dal momento che Λ è simmetrica, A è diagonalizzabile, quindi vale che

$$v(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - t + t\lambda_i) = \mu(A_t + B_t). \tag{3.22}$$

Mostriamo che vale $(1-t)A_s + tA_{s'} \subseteq A_{(1-t)s+ts'}$ per ogni $s, s' \in (0,1)$ e $t \in [0,1]$. Sia $x \in (1-t)A_s + tA_{s'}$; allora $x = y + z$ con $y \in (1-t)A_s$ e

$z \in tA_{s'}$, quindi $x = (1-t)p + tq$ con $p_i \leq 1-s$ e $q_i \leq 1-s'$ per ogni $i = 1, ..., n$. Di conseguenza, $x_i \leq (1-t)(1-s) + t(1-s') = 1 - [(1-t)s + ts']$ che implica $x \in A_{(1-t)s+ts'}$. Mostriamo ora che vale $(1-t)B_s + tB_{s'} \subseteq B_{(1-t)s+ts'}$ per ogni $s, s' \in (0,1)$ e $t \in [0,1]$. Sia $x \in (1-t)B_s + tB_{s'}$ allora $x = y + z$ con $y \in (1-t)B_s$ e $z \in tB_{s'}$, quindi $x = (1-t)p + tq$ con $p_i \leq s\lambda_i$ e $q_i \leq s'\lambda_i$ per ogni $i = 1, ..., n$. Di conseguenza, $x_i \leq (1-t)s\lambda_i + ts'\lambda_i = [(1-t)s + ts']\lambda_i$ che implica $x \in B_{(1-t)s+ts'}$. Da tutto ciò possiamo ricavare

$$A_{(1-t)s+ts'} + B_{(1-t)s+ts'} \supseteq (1-t)(A_s + B_s) + t(A_{s'} + B_{s'}). \tag{3.23}$$

Allora, per la disuguaglianza di Brunn-Minkowski 3.2.39,

$$(\mu(A_{(1-t)s+ts'} + B_{(1-t)s+ts'}))^{\frac{1}{n}} \geq (\mu((1-t)(A_s + B_s) + t(A_{s'} + B_{s'})))^{\frac{1}{n}} \geq$$

$$\geq (\mu((1-t)(A_s + B_s)))^{\frac{1}{n}} + (\mu((t(A_{s'} + B_{s'})))^{\frac{1}{n}} =$$

$$= (1-t)(\mu(A_s + B_s))^{\frac{1}{n}} + t(\mu(A_{s'} + B_{s'}))^{\frac{1}{n}}.$$

Dall'ultima relazione e dalla (3.22) ricaviamo la tesi. □

3.2.2 Teoria del Trasporto Ottimo

Supponiamo di avere un mucchio di sabbia che occupa una regione $X \subset \mathbb{R}^n$ e supponiamo di avere un'altra regione $Y \subset \mathbb{R}^n$ che consiste di fori, entrambe le regioni con una distribuzione nota. Sia ρ_0 la distribuzione della sabbia e ρ_1 la distribuzione dei fori. Supponiamo inoltre che per ogni coppia di punti $(x, y) \in X \times Y$ esista assegnato un numero non negativo $c(x, y)$ che rappresenta il costo per il trasporto di una massa unitaria da x a y. Una mappa di trasporto $T : X \to Y$ è una strategia che ci dice che la massa da x sarà spostata in $T(x)$. Tale mappa dovrà soddisfare il principio di conservazione della massa, ossia

$$\int_B \rho_1(y)\mathrm{d}y = \int_{T^{-1}(B)} \rho_0(x)\mathrm{d}x \tag{3.24}$$

per ogni insieme $B \subset \mathbb{R}^n$ misurabile. Quando vale (3.24), diremo che T è una strategia per il trasporto di ρ_0 su ρ_1, oppure mappa di push-forward, e scriveremo $T_{\#}\rho_0 = \rho_1$. Scegliere una strategia per il trasporto di ρ_0 su ρ_1 corrisponde a scegliere una mappa T per cui $T_{\#}\rho_0 = \rho_1$. Dato un punto x, se $\rho_0(x)\mathrm{d}x$ è la massa trasportata da un piccolo intorno di x, il costo per il trasporto di $\rho_0(x)\mathrm{d}x$ in un intorno di $T(x)$ è $c(x, T(x))\rho_0(x)\mathrm{d}x$. Quindi, il costo totale per il trasporto di ρ_0 su ρ_1 è

$$C(T) = \int_{\mathbb{R}^n} c(x, T(x))\rho_0(x)\mathrm{d}x.$$

Il problema di Monge-Kantorovich è definito nella seguente maniera

$$\inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} c(x, T(x))\rho_0(x)\mathrm{d}x : T_{\#}\rho_0 = \rho_1 \right\}. \tag{3.25}$$

Grazie al teorema di McCann 6.0.31, possiamo supporre che la nostra mappa ottima T sia il gradiente di una funzione ψ convessa su $\mathbb{R}^n$. Siano ora $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ e consideriamo T la mappa di trasporto ottimo (push-forward) del problema di Monge-Kantorovich, con funzione di costo $c(x, y) = \frac{|x-y|^2}{2}$, tra ρ_0 e ρ_1, ossia $T_{\#}\rho_0 = \rho_1$.

Definizione 3.2.41. Siano $t \in [0, 1]$ e $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Si definisce l'interpolazione per spostamenti $\rho_t \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tra ρ_0 e ρ_1 nella seguente maniera

$$\rho_t = (T_t)_{\#}\rho_0, \qquad T_t = (1-t)Id + tT.$$

Osservazione 3.2.42. La traiettoria di $t \mapsto \rho_t$ è il minimo percorso che congiunge ρ_0 e ρ_1 in $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n), d_2)$, nel senso che $d_2(\rho_0, \rho_1) = d_2(\rho_0, \rho_t) + d_2(\rho_t, \rho_1)$, mentre per ogni altra traiettoria $\tilde{\rho}_t \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ che congiunge le due densità vale la disuguaglianza stretta $d_2(\rho_0, \rho_1) < d_2(\rho_0, \tilde{\rho}_t) + d_2(\tilde{\rho}_t, \rho_1)$.

Definizione 3.2.43. Sia $\mathcal{F} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ un funzionale. Diremo che $\mathcal{F}$ è convesso per spostamenti se la funzione $\tilde{\mathcal{F}} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tale che $\tilde{\mathcal{F}}(t) = \mathcal{F}(\rho_t)$ è convessa per ogni scelta di $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Osservazione 3.2.44. In particolare, se l'energia è rappresentata dal funzionale $H^F(\rho) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\rho(x))\mathrm{d}x$, esso è convesso per spostamenti se la funzione $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ è tale che $F(0) = 0$ e la mappa $x \mapsto x^n F(x^{-n})$ è convessa e non crescente.

Proposizione 3.2.45. *Siano $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ con $\rho_0 \in \mathcal{P}_{ac}(\mathbb{R}^n)$. Allora per ogni $t \in [0, 1]$ l'interpolazione per spostamenti ρ_t tra ρ_0 e ρ_1 è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.*

Dimostrazione. Poniamo $\phi(x) = (1-t)\frac{|x|^2}{2} + t\psi(x)$: ϕ è la funzione il cui gradiente è la mappa di push-forward da ρ_0 a ρ_t. L'affermazione da provare è la seguente: se $M \subset \mathbb{R}^n$ (insieme di Borel) è trascurabile secondo Lebesgue, tale è $(\nabla\phi)^{-1}(M)$; ρ_t allora si annulla sul primo perché ρ_0 si annulla sul secondo. Poniamo dunque che $\mu(\nabla\phi^{-1}(M)) = 0$: la convessità di ψ implica la convessità stretta di ϕ, così che $(\nabla\phi)^{-1}$ deve essere una funzione sul suo dominio. Inoltre dato che

$$\begin{aligned}|\nabla\phi(x) - \nabla\phi(y)||x-y| \geq \langle \nabla\phi(x) - \nabla\phi(y), x-y \rangle = \\ = (1-t)|x-y|^2 + t\langle \nabla\psi(x) - \nabla\psi(y), x-y \rangle,\end{aligned}$$

$$\langle \nabla\psi(x) - \nabla\psi(y), x - y\rangle \geq 0; \tag{3.26}$$

la relazione (3.26) mostra che $(\nabla\phi)^{-1}$ è lipschitziana con costante non più grande di $(1-t)^{-1}$. La tesi è una conseguenza della seguente disuguaglianza

$$\mu((\nabla\phi)^{-1}(M)) \leq (1-t)^{-n}\mu(M). \tag{3.27}$$

Dimostriamo l'ultima disuguaglianza citata. Sia $L = (\nabla\phi)^{-1}(M)$; la mappa $\varphi(z) = \nabla\phi(z)$ è iniettiva. Dato che ψ è convessa, otteniamo che H_ψ è semidefinita positiva e quindi, detti λ_i gli autovalori di $J_\varphi = H_\psi$, abbiamo $\det J_\varphi = \prod_{i=1}^n (1 - t + t\lambda_i) \geq (1-t)^n$. Di conseguenza otteniamo

$$\mu(M) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_M(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_L(z)\det J_\varphi \mathrm{d}z \geq (1-t)^n \mu(L)$$

e moltiplicando entrambi i membri per $(1-t)^{-n}$ otteniamo la relazione (3.27). □

Proposizione 3.2.46. *Siano $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto e sia il funzionale $H^F(\rho) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\rho(x))\mathrm{d}x$ definito su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Assumendo che valgano le seguenti condizioni:*

1. *$F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ è tale che $F(0) = 0$;*

2. *la mappa $x \mapsto x^n F(x^{-n})$ è convessa e non crescente per ogni $x > 0$,*

allora l'energia interna $H^F(\rho_t)$ è una funzione convessa su $[0, 1]$.

Dimostrazione. La proposizione 3.2.45 mostra che ρ_t è assolutamente continua (rispetto alla misura di Lebesgue). Per la proposizione 3.2.36, l'insieme X, sul quale $\nabla^2\psi(x) > 0$ e la sua inversa esiste, ha massa unitaria secondo ρ_0 e inoltre

$$H^F(\rho_t) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\rho_t(x))\mathrm{d}x = \int_X F\left(\frac{\rho_0(x)}{\det[(1-t)I + t\nabla^2\psi(x)]}\right)\det[(1-t)I + t\nabla^2\psi(x)]\mathrm{d}x. \tag{3.28}$$

Fissiamo $x \in X$, e siano $\Lambda = \nabla^2\psi(x)$ e $v(t) := \det[(1-t)I + t\Lambda]$. Dato che Λ è positivo, la proposizione 3.2.40 mostra che $v^{\frac{1}{n}}(t)$ è concava. Per ogni $x \in X$ fissato, grazie al lemma 3.2.19, componendo la funzione convessa non crescente $h(\lambda) := \lambda^n F(\rho_0(x)\lambda^{-n})$ con la funzione concava $g(t) := v^{\frac{1}{n}}(t)$ otteniamo la funzione convessa $h \circ g(t)$, l'integrando di (3.28). Integrando rispetto ad x, si ottiene la convessità di $H^F(\rho_t)$. □

Teorema 3.2.47. *Siano $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}_{ac}(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto, allora vale la seguente disuguaglianza sull'energia*

$$H^F(\rho_1) - H^F(\rho_0) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x)\langle \nabla(F'(\rho_0(x))), T(x) - x\rangle \mathrm{d}x \tag{3.29}$$

Dimostrazione. Grazie alla proposizione 3.2.46, sappiamo che $H^F(\rho_t)$ è una funzione convessa su $[0,1]$, perciò vale

$$H^F(\rho_1) - H^F(\rho_0) \geq \left[\frac{d}{dt} H^F(\rho_t)\right]_{|t=0}. \tag{3.30}$$

Dal momento che $\rho_t = (T_t)_\# \rho_0$, per il teorema di cambio di variabile otteniamo che vale per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\rho_t(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(T_t(x))\rho_0(x)\mathrm{d}x.$$

Derivando entrambi i membri rispetto a t e, grazie alle proprietà di regolarità delle funzioni in esame, portando la derivata dentro il segno di integrale, otteniamo

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\rho_t(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla\varphi(T_t(x)), T(x) - x\rangle \rho_0(x)\mathrm{d}x,$$

cioè

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\frac{\partial \rho_t(y)}{\partial t}\Big|_{t=0}\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla\varphi(x), T(x) - x\rangle \rho_0(x)\mathrm{d}x.$$

Utilizzando sull'ultima relazione trovata la formula di integrazione per parti 6.0.27 ricaviamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\frac{\partial \rho_t(y)}{\partial t}\Big|_{t=0}\mathrm{d}y = -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,\mathrm{div}(\rho_0(x)(T(x) - x))\mathrm{d}x,$$

da cui possiamo asserire che

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\,\mathrm{div}(\rho_0(T - Id)).$$

Ritornando alla (3.30) possiamo continuare la catena di disuguaglianze in questo modo

$$H^F(\rho_1) - H^F(\rho_0) \geq \left[\frac{d}{dt} H^F(\rho_t)\right]_{|t=0} = \int_{\mathbb{R}^n} F'(\rho_0(x))\frac{\partial \rho_t(x)}{\partial t}\Big|_{t=0}\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n} F'(\rho_0(x))\,\mathrm{div}(\rho_0(x)(T(x) - x))\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x)\langle \nabla(F'(\rho_0(x))), T(x) - x\rangle\mathrm{d}x,$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la formula di integrazione per parti 6.0.27, ottenendo la (3.29). □

Corollario 3.2.48. *Siano $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}_{ac}(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto, allora vale la seguente disuguaglianza sull'energia*

$$H^{F+nP_F}(\rho_0) - H^F(\rho_1) \leq -\int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x)\langle \nabla(F'(\rho_0(x))), T(x)\rangle \mathrm{d}x \tag{3.31}$$

dove $P_F(t) = tF'(t) - F(t)$.

Dimostrazione. La disuguaglianza (3.31) segue direttamente da (3.29) semplicemente riscrivendo il termine di destra in questa maniera

$$H^F(\rho_1) - H^F(\rho_0) \geq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x)\langle \nabla(F'(\rho_0(x))), T(x) - x\rangle \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x)\langle \nabla(F'(\rho_0(x))), T(x)\rangle \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x)\langle \nabla(F'(\rho_0(x))), x\rangle \mathrm{d}x.$$

Notiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla(P_F(\rho_0(x))), x\rangle \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} P_F(\rho_0(x)) x_i \mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_0(x)F'(\rho_0(x)) - F(\rho_0(x))) x_i \mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial \rho_0(x)}{\partial x_i} F'(\rho_0(x)) x_i + \rho_0(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(F'(\rho_0(x))) x_i - \frac{\partial}{\partial x_i}(F(\rho_0(x))) x_i \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial \rho_0(x)}{\partial x_i} F'(\rho_0(x)) x_i - \frac{\partial}{\partial x_i}(F(\rho_0(x))) x_i \right) \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x)\langle \nabla(F'(\rho_0(x)), x)\rangle \mathrm{d}x.$$

Inoltre, il primo addendo dell'ultima riga è nullo. Di conseguenza, grazie all'ultima osservazione, otteniamo

$$\begin{aligned}
H^F(\rho_1) - H^F(\rho_0) \geq & \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x)\langle \nabla(F'(\rho_0(x))), T(x)\rangle \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla(P_F(\rho_0(x))), x\rangle \mathrm{d}x = \\
= & \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x)\langle \nabla(F'(\rho_0(x))), T(x)\rangle \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_i} P_F(\rho_0(x)) x_i \mathrm{d}x = \\
= & \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x)\langle \nabla(F'(\rho_0(x))), T(x)\rangle \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} P_F(\rho_0(x)) \partial_{x_i} x_i \mathrm{d}x = \\
= & \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x)\langle \nabla(F'(\rho_0(x))), T(x)\rangle \mathrm{d}x + nH^{P_F}(\rho_0)
\end{aligned}$$

da cui si ricava la tesi notando che $H^F(\rho_0) + nH^{P_F}(\rho_0) = H^{F+nP_F}(\rho_0)$. □

3.2.3 Collegamento tra la GN ottimale e la Teoria del Trasporto Ottimo

Grazie agli strumenti appena sviluppati, in questa sottosezione mostreremo la stretta connessione che intercorre tra la teoria del trasporto ottimo e la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg. Grazie al corollario 3.2.48, per ogni $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{P}_{ac}(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto, possiamo scrivere

$$-H^F(\rho_1) \leq -H^{F+nP_F}(\rho_0) - \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x)\langle \nabla(F'(\rho_0(x))), T(x)\rangle \mathrm{d}x. \tag{3.32}$$

Sia $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente convessa che soddisfa $c(0) = 0$ e che sia un infinito di ordine superiore rispetto a $|x|$, per $|x| \to \infty$; allora, se c^* denota la trasformata di Legendre di c, grazie alla disuguaglianza di Young-Legendre 3.2.23 otteniamo

$$-\langle \nabla(F'(\rho_0(x))), T(x)\rangle \leq c(T(x)) + c^*(-\nabla(F'(\rho_0(x)))). \tag{3.33}$$

Mettendo insieme le (3.32) e (3.33) possiamo ricavare

$$-H^F(\rho_1) \leq -H^{F+nP_F}(\rho_0) + \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x)c^*(-\nabla(F'(\rho_0(x))))\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x)c(T(x))\mathrm{d}x.$$

Ricordando che $T_\#\rho_0 = \rho_1$ possiamo riscrivere l'ultima disuguaglianza in questa maniera

$$-H^F(\rho_1) \leq -H^{F+nP_F}(\rho_0) + \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x)c^*(-\nabla(F'(\rho_0(x))))\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \rho_1(y)c(y)\mathrm{d}y,$$

dalla quale, ponendo $H_c(\rho_1) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_1(y)c(y)\mathrm{d}y$ e $H_c^F = H^F + H_c$, otteniamo

$$-H_c^F(\rho_1) \leq -H^{F+nP_F}(\rho_0) + \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x)c^*(-\nabla(F'(\rho_0(x))))\mathrm{d}x. \tag{3.34}$$

Inoltre, se $\rho_0 = \rho_1$, allora $T = Id$ e vale l'uguaglianza in (3.32). Grazie alla proposizione 3.2.25 possiamo ricavare che vale

$$\langle \nabla c(x), x\rangle = c(x) + c^*(\nabla c(x)), \tag{3.35}$$

e se $\rho_0 = \rho_1$,

$$\langle \nabla c(x), T(x)\rangle = c(T(x)) + c^*(\nabla c(x)). \tag{3.36}$$

Sfruttando la (3.36), se $\rho_0 = \rho_1$ soddisfa nel suo supporto

$$-\nabla(F'(\rho_0(x))) = \nabla c(x) \qquad \text{ossia} \qquad \nabla(F'(\rho_0(x)) + c(x)) = 0,$$

allora vale l'uguaglianza in (3.33) e di conseguenza in (3.34). Abbiamo in questa maniera stabilito la seguente relazione di dualità

$$\sup\{-H_c^F(\rho_1) : \rho_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\} = \inf\{J(\rho_0) : \rho_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\} \tag{3.37}$$

dove il funzionale su cui facciamo l'estremo inferiore è

$$J(\rho_0) = -H^{F+nP_F}(\rho_0) + \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x)c^*(-\nabla(F'(\rho_0(x))))\mathrm{d}x$$

e la funzione ottimale $\rho_0 = \rho_1 := \rho_\infty$ che risolve (3.37) è una soluzione della seguente equazione

$$\nabla(F'(\rho_\infty(x)) + c(x)) = 0. \tag{3.38}$$

Dalla formulazione di dualità (3.37) e da (3.38), appare chiaro che per ottenere la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg dalla teoria del trasporto ottimo, è sufficiente scegliere appropriatamente

- la funzione di Young c;
- la funzione densità di energia F;
- un cambio di variabile ψ con $\rho_0 = \psi(u)$, per cui $J(\rho_0) = J(\psi(u))$ sia uguale, a meno di costanti, a un funzionale del tipo $E(u)$ in (3.4).

Nel caso $q = 1 + \frac{p}{2}$ in (3.5) le scelte giuste sono $c(x) = \frac{|x|^2}{2}$, $F(x) = -x^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}}$ e il cambio di variabile $\psi(u) = u^p$. Come conseguenza di ciò, una funzione ottimale u_∞ per la corrispondente disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg può essere calcolata esplicitamente usando (3.38)

$$\nabla(F'(u_\infty^p(x)) + c(x)) = 0, \qquad u_\infty^p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),$$

e la (3.37) fornisce una dualità tra il funzionale associato alla disuguaglianza $E(u) = J(u^p)$, e il funzionale entropia $-H_c^F(\rho_1)$ per la seguente equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta \rho^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} + \mathrm{div}(x\rho).$$

Lo stesso approccio può essere seguito per il caso $q = 2(p-1)$ in (3.5). Negli altri casi la difficoltà sta nel fatto che le classiche funzioni convesse per spostamenti $F(x) = x \log x$ e $F(x) = \frac{x^m}{m-1}$ con $1 \neq m \geq 1 - \frac{1}{n}$, non sono appropriate per i nostri scopi. Punto di partenza della nostra analisi è l'equazione (3.38) che ci dà le funzioni ottimali per la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg. Osserviamo che se $\rho_0 = \psi(u)$ e $c(x) = \frac{|x|^2}{2}$ otteniamo

$$\nabla(F'(\psi(u))) = -\nabla c(x) = -x \Longrightarrow F'(\psi(u)) = -\frac{|x|^2}{2} + \gamma$$

per una certa $\gamma \in \mathbb{R}$, il che implica che la funzione ottimale in (3.5) e (3.37) è di tipo radiale, cioè per una certa funzione $\tilde{H}$ vale

$$\frac{|x|^2}{2} = \gamma - F'(\psi(u))(x) = \tilde{H}(u(x)). \tag{3.39}$$

Definiamo $H(w) = \tilde{H}(w^{\frac{1}{p}})$. Appare chiaro che per determinare le funzioni ottimali per tutte le disuguaglianze di Gagliardo-Nirenberg (al variare di p e q), e per fare la scelta giusta delle funzioni F e ψ necessarie per l'utilizzo della teoria del trasporto ottimo, abbiamo bisogno di trovare esplicitamente l'espressione della funzione $\tilde{H}$ in (3.39) e quindi di H.

3.3 Un'equazione differenziale ordinaria per la minimizzazione

Dobbiamo quindi determinare la funzione $\tilde{H}$ di cui abbiamo parlato prima. In questa sezione mostreremo che la funzione $\tilde{H}'$ soddisfa un'equazione differenziale ordinaria non lineare, che può essere risolta esplicitamente per ogni valore di p e q quando siamo in dimensione 1, dal momento che l'equazione diventa lineare. Come conseguenza di ciò, in tali casi, otterremo esplicitamente la funzione ottimale di (3.5) e usando (3.39) potremo determinare, in alcuni casi, la giusta funzione F necessaria per derivare la nostra disuguaglianza dalla teoria del trasporto ottimo. Assumiamo quindi $1 < q < p < 2^*$ e consideriamo il seguente problema variazionale

$$\inf \left\{ E(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^q \mathrm{d}x : \quad \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1 \right\}. \tag{3.40}$$

Questo problema ammette un elemento minimizzante u, il quale risolve in modo unico l'equazione di Eulero-Lagrange associata al problema (3.40), cioè

$$-\Delta u + |u|^{q-2}u - \lambda |u|^{p-2}u = 0,$$

dove $\lambda > 0$ è il moltiplicatore di Lagrange associato al vincolo. Senza perdere di generalità, possiamo assumere che u sia non negativa, quindi risolve

$$-\Delta u + u^{q-1} - \lambda u^{p-1} = 0, \tag{3.41}$$

e ponendo $\tilde{v}(x) = \lambda^{\frac{1}{p-q}} u(\lambda^{\frac{q-2}{2(p-q)}} x)$ e svolgendo i conti ricaviamo

$$-\Delta \tilde{v} + \tilde{v}^{q-1} - \tilde{v}^{p-1} = 0. \tag{3.42}$$

Il teorema 6.0.32 di P.Pucci e J.Serrin ci assicura che l'equazione (3.42) possiede un unico ground state radiale, ossia una soluzione $\tilde{v}$ distribuzionale C^1 non banale dell'equazione (3.42), non negativa, radiale e infinitesima all'infinito. Dal momento che la soluzione è di tipo radiale, posto $\tilde{v}(x) = v(|x|) = v(r)$, dall'equazione (3.42) ricaviamo la seguente equazione differenziale ordinaria

$$v''(r) + (n-1)\frac{v'(r)}{r} - v^{q-1}(r) + v^{p-1}(r) = 0, \tag{3.43}$$

che in dimensione 1 diventa

$$v''(r) = v^{q-1}(r) - v^{p-1}(r). \tag{3.44}$$

con $v(r) = v(|x|) = v\left(g\left(\frac{|x|^2}{2}\right)\right)$ dove $g(t) = \sqrt{2t}$. Questo mostra che u è non negativa e decrescente. Inoltre, u tende a 0 per $|x|$ che tende a ∞. Ponendo $\tilde{H} = (v \circ g)^{-1} : (0, v(0)) \to \mathbb{R}$ otteniamo che

$$\tilde{H}(v(r)) = \frac{r^2}{2}. \tag{3.45}$$

Grazie alle considerazioni fatte, mostreremo che la nostra funzione $\tilde{H}$ soddisfa la seguente equazione differenziale ordinaria non lineare

$$2\left(\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right)\tilde{H}''(t) + (t^{q-1} - t^{p-1})\tilde{H}'(t) - 2(n-1)\tilde{H}''(t)\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\tilde{H}'(s)} = n \tag{3.46}$$

le cui soluzioni danno un elemento minimizzante esplicito di (3.40) grazie a (3.41), (3.45), e inoltre determina la costante e le funzioni ottimali nella disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg. A causa del termine non lineare $2(n-1)\tilde{H}''(t)\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\tilde{H}'(s)}$ nell'equazione (3.46), non siamo in grado di risolverla esplicitamente per ogni valore di p e q quando $n \geq 2$. Supponiamo però che valga $\tilde{H}''(t)\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\tilde{H}'(s)} = k$; allora (3.46) prende la forma

$$2\left(\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right)\tilde{H}''(t) + (t^{q-1} - t^{p-1})\tilde{H}'(t) = n + 2(n-1)k, \tag{3.47}$$

che invece può essere risolta esplicitamente per ogni valore di p e q. Mostreremo che quando $n \geq 2$ e $q = 1 + \frac{p}{2}$ oppure $q = 2(p-1)$ allora saremo nei casi in cui vale (3.47).

3.3.1 Dimensione 1: il caso lineare

Analizziamo ora la situazione monodimensionale, determinando qual è l'equazione differenziale ordinaria lineare che soddisfa $\tilde{H}$. Enunciamo e dimostriamo il seguente teorema, che ne fornisce anche una soluzione esplicita:

Teorema 3.3.1. *Siano $p, q \in \mathbb{R}$ per cui $1 < q < p$ e sia $\tilde{H} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione in $C^2(0, \infty)$ che soddisfa $\tilde{H}(v(r)) = \frac{r^2}{2}$, con $v \in C^2(\mathbb{R})$ non negativa, radiale e soluzione di $-v'' + v^{q-1} - v^{p-1} = 0$. Allora $\tilde{H}$ è soluzione della seguente equazione differenziale ordinaria*

$$2\left(\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right) H''(t) + (t^{q-1} - t^{p-1})H'(t) = 1. \tag{3.48}$$

Inoltre la derivata $\tilde{H}'$ di $\tilde{H}$ è esplicitamente espressa da

$$\tilde{H}'(t) = \frac{p}{2t^{\frac{q}{2}}\sqrt{\left|\frac{p}{q} - t^{p-q}\right|}} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{q}{2}} \operatorname{sign}\left(\frac{p}{q} - t^{p-q}\right) \sqrt{\left|\frac{p}{q} - t^{p-q}\right|}}. \tag{3.49}$$

Dimostrazione. Derivando per due volte rispetto ad r l'uguaglianza (3.45), otteniamo

$$v''(r)\tilde{H}'(v(r)) + (v'(r))^2\tilde{H}''(v(r)) = 1. \tag{3.50}$$

Dal momento che $E(v) = \frac{1}{2}\|v'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{q}\|v\|^q_{L^q(\mathbb{R})} < \infty$, allora sia v che $|v'|$ sono infinitesime all'infinito. Moltiplicando la (3.44) per v' e integrando su (r, ∞) ricaviamo

$$(v')^2 = 2\left(\frac{v^q}{q} - \frac{v^p}{p}\right). \tag{3.51}$$

Ora, inseriamo in (3.50) le informazioni ottenute da (3.51), ottenendo

$$2\left(\frac{v^q(r)}{q} - \frac{v^p(r)}{p}\right) H''(v(r)) + H'(v(r))(v^{q-1}(r) - v^{p-1}(r)) = 1.$$

Ponendo in questa ultima uguaglianza $t = v$ otteniamo la (3.48). Per dimostrare la (3.49), è conveniente riscrivere l'equazione differenziale ordinaria (3.48) nella forma compatta

$$H''(t) + A(t)H'(t) = B(t), \tag{3.52}$$

dove i coefficienti dell'equazione valgono

$$A(t) = \frac{t^{q-1} - t^{p-1}}{2\left(\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right)}, \qquad B(t) = \frac{1}{2\left(\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right)}.$$

La soluzione di un'equazione ordinaria del tipo (3.52) è data dalla seguente formula

$$\tilde{H}'(t) = \mathrm{e}^{-\int A(t)\mathrm{d}t} \int \left[B(t)\mathrm{e}^{\int A(t)\mathrm{d}t}\right] \mathrm{d}t, \tag{3.53}$$

quindi, calcoliamo gli integrali presenti nella (3.53). Per il primo integrale basta notare che il numeratore è la derivata del denominatore e quindi

$$\int A(t)\mathrm{d}t = \log \sqrt{\left|\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right|},$$

$$\mathrm{e}^{-\int A(t)\mathrm{d}t} = \left|\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right|^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{p}}{t^{\frac{q}{2}}\sqrt{\left|\frac{p}{q} - t^{p-q}\right|}}. \tag{3.54}$$

Notando che $\frac{p}{q} - t^{p-q} = \operatorname{sign}\left(\frac{p}{q} - t^{p-q}\right)\left|\frac{p}{q} - t^{p-q}\right|$, abbiamo

$$B(t)\mathrm{e}^{\int A(t)\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{\left|\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right|}}{2\left(\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right)} = \frac{\left|\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right|}{2\left(\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right)\sqrt{\left|\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right|}} =$$

$$= \frac{1}{2\operatorname{sign}\left(\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right)\sqrt{\left|\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right|}} = \frac{1}{2\frac{t^{\frac{q}{2}}}{\sqrt{p}}\operatorname{sign}\left(\frac{p}{q} - t^{p-q}\right)\sqrt{\left|\frac{p}{q} - t^{p-q}\right|}} \tag{3.55}$$

Combinando insieme la (3.53), (3.54) e la (3.55) otteniamo la relazione (3.49) e concludiamo il teorema. □

3.3.2 Funzioni ottimali in dimensione 1

In questa sottosezione, useremo il teorema 3.3.1 per trovare una funzione ottimale che risolve il problema (3.5) implicando la validità della disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg in dimensione 1 per ogni valore di p e q per cui $1 < q < p$. Per semplicità ci focalizzeremo su quattro esempi guida, il resto dei casi può essere affrontato utilizzando lo stesso metodo.

Corollario 3.3.2 (Caso $1 < q = 1 + \frac{p}{2} < p$)**.** *Sia $q = 1 + \frac{p}{2} < p$, allora la seguente funzione risolve l'equazione differenziale ordinaria* (3.48)

$$\tilde{H}(t) = \frac{2(p+2)}{(p-2)^2}t^{1-\frac{p}{2}} + \alpha. \tag{3.56}$$

Inoltre, una funzione ottimale del problema di minimizzazione (3.40) *in questo caso è*

$$u(x) = \left[\frac{(p-2)^2}{4(p+2)}\right]^{\frac{1}{1-\frac{p}{2}}}\left(|x|^2 + \beta\right)^{\frac{1}{1-\frac{p}{2}}} = \left[\frac{(p-2)^2}{4(p+2)}\right]^{\frac{1}{1-\frac{p}{2}}}\left(|x|^2 + \frac{2\lambda(p+2)^2}{p(p-2)^2}\right)^{\frac{1}{1-\frac{p}{2}}} \tag{3.57}$$

dove $\beta = -2\alpha$ o λ è univocamente determinato da $\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} = 1$.

Dimostrazione. Se $q = 1 + \frac{p}{2} < p$, allora la soluzione (3.49) dell'equazione differenziale ordinaria (3.48) prende la forma

$$\tilde{H}'(t) = \frac{p}{2t^{\frac{p}{4}+\frac{1}{2}}\sqrt{\left|\frac{2p}{p+2} - t^{\frac{p}{2}-1}\right|}} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{p}{4}+\frac{1}{2}} \operatorname{sign}\left(\frac{2p}{p+2} - t^{\frac{p}{2}-1}\right)\sqrt{\left|\frac{2p}{p+2} - t^{\frac{p}{2}-1}\right|}}. \tag{3.58}$$

Notando che vale a meno di costanti

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{p}{4}+\frac{1}{2}} \operatorname{sign}\left(\frac{2p}{p+2} - t^{\frac{p}{2}-1}\right)\sqrt{\left|\frac{2p}{p+2} - t^{\frac{p}{2}-1}\right|}} = \frac{2(p+2)}{p(2-p)} t^{\frac{1}{2}-\frac{p}{4}} \sqrt{\left|\frac{2p}{p+2} - t^{\frac{p}{2}-1}\right|} \tag{3.59}$$

otteniamo, dopo aver usato (3.59) e (3.58), che

$$\tilde{H}'(t) = \frac{p}{2t^{\frac{p}{4}+\frac{1}{2}}\sqrt{\left|\frac{2p}{p+2} - t^{\frac{p}{2}-1}\right|}} \cdot \frac{2(p+2)}{p(2-p)} t^{\frac{1}{2}-\frac{p}{4}} \sqrt{\left|\frac{2p}{p+2} - t^{\frac{p}{2}-1}\right|} = \frac{p+2}{2-p} t^{-\frac{p}{2}}. \tag{3.60}$$

Integrando la (3.60) otteniamo la relazione (3.56). Combinando la relazione (3.45) e la (3.56) otteniamo

$$u(x) = \left[\frac{(p-2)^2}{4(p+2)}\right]^{\frac{1}{1-\frac{p}{2}}} \left(|x|^2 + \beta\right)^{\frac{1}{1-\frac{p}{2}}} \tag{3.61}$$

dove $\beta = -2\alpha > 0$ se si sceglie $\alpha < 0$. Sostituiamo la (3.61) nell'equazione di Eulero-Lagrange (3.41) del problema di minimizzazione (3.40) e otteniamo dopo alcuni calcoli

$$\beta = \frac{2\lambda(p+2)^2}{p(p-2)^2}. \tag{3.62}$$

Combiniamo le relazioni (3.61) e (3.62) per ottenere (3.57). La costante β o λ in (3.57) è univocamente determinata dal vincolo $\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} = 1$ di minimizzazione del problema (3.40). $\square$

Corollario 3.3.3 (Caso $1 < q = 2(p-1) < p$)**.** *Sia $q = 2(p-1) < p$, allora la seguente funzione risolve l'equazione differenziale ordinaria* (3.48)

$$\tilde{H}(t) = \frac{-p}{(p-2)^2} t^{2-p} + \alpha. \tag{3.63}$$

Inoltre, una funzione ottimale del problema di minimizzazione (3.40) *in questo caso è*

$$u(x) = \left[\frac{\lambda(p-2)^2}{2p}\right]^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p^2}{\lambda^2(p-1)(2-p)^2} - |x|^2\right)_+^{\frac{1}{2-p}} \tag{3.64}$$

dove λ è univocamente determinato da $\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} = 1$.

Dimostrazione. Se $q = 2(p-1) < p$, allora la soluzione (3.49) dell'equazione differenziale ordinaria (3.48) prende la forma

$$\tilde{H}'(t) = \frac{p}{2t^{p-1}\sqrt{\left|\frac{p}{2(p-1)} - t^{2-p}\right|}} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^{p-1}\,\mathrm{sign}\left(\frac{p}{2(p-1)} - t^{p-1}\right)\sqrt{\left|\frac{p}{2(p-1)} - t^{2-p}\right|}}. \tag{3.65}$$

Notando che vale a meno di costanti

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^{p-1}\,\mathrm{sign}\left(\frac{p}{2(p-1)} - t^{2-p}\right)\sqrt{\left|\frac{p}{2(p-1)} - t^{2-p}\right|}} = \frac{2}{p-2}\sqrt{\left|\frac{p}{2(p-1)} - t^{2-p}\right|}, \tag{3.66}$$

otteniamo dopo aver usato (3.66) e (3.65) che

$$\tilde{H}'(t) = \frac{p}{2t^{p-1}\sqrt{\left|\frac{p}{2(p-1)} - t^{2-p}\right|}} \cdot \frac{2}{p-2}\sqrt{\left|\frac{p}{2(p-1)} - t^{2-p}\right|} = \frac{p}{p-2}t^{1-p}. \tag{3.67}$$

Integrando la (3.67) otteniamo la relazione (3.63). Combinando la relazione (3.45) e (3.63) otteniamo

$$u(x) = \left[\frac{(p-2)^2}{p}\right]^{\frac{1}{2-p}} \left(\beta - |x|^2\right)_+^{\frac{1}{2-p}}, \tag{3.68}$$

dove $\beta = 2\alpha$ e scegliamo $\alpha > 0$. Sostituiamo la (3.68) nell'equazione di Eulero-Lagrange (3.41) del problema di minimizzazione (3.40) e otteniamo dopo alcuni calcoli

$$\beta = \frac{p^2}{\lambda^2(p-1)(p-2)^2}. \tag{3.69}$$

Combiniamo le relazioni (3.68) e (3.69) per ottenere (3.64). La costante β o λ in (3.64) è univocamente determinata dal vincolo $\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} = 1$ di minimizzazione del problema (3.40). □

Corollario 3.3.4 (Caso $q = 2 < p$)**.** *Sia $q = 2 < p$. Allora, definito $\Omega = \{t : t^{p-2} > \frac{p}{2}\}$, la seguente funzione risolve l'equazione differenziale ordinaria* (3.48)*:*

$$\tilde{H}(t) = \frac{-2}{(p-2)^2}\left(\arctan\sqrt{\frac{t^{p-2} - \frac{p}{2}}{\frac{p}{2}}}\right)^2 \chi_\Omega(t) + \frac{2}{(p-2)^2}\left(\mathrm{arctanh}\sqrt{\frac{\frac{p}{2} - t^{p-2}}{\frac{p}{2}}}\right)^2 \chi_{\Omega^c}(t). \tag{3.70}$$

Inoltre, una funzione ottimale del problema di minimizzazione (3.40) *in questo caso è*

$$u(x) = \left(\frac{p}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{p-2}} \left[\cosh\left(\frac{p-2}{2}|x|\right)\right]^{-\frac{2}{p-2}}, \tag{3.71}$$

dove λ è univocamente determinato da $\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} = 1$.

Dimostrazione. Se $q = 2 < p$, allora la soluzione (3.49) dell'equazione differenziale ordinaria (3.48) prende la forma

$$\tilde{H}'(t) = \frac{p}{2t\sqrt{\left|\frac{p}{2} - t^{p-2}\right|}} \int \frac{\mathrm{d}t}{t \operatorname{sign}\left(\frac{p}{2} - t^{p-2}\right)\sqrt{\left|\frac{p}{2} - t^{p-2}\right|}}. \tag{3.72}$$

Ora calcoleremo la primitiva richiesta a seconda dei casi,

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t \operatorname{sign}\left(\frac{p}{2} - t^{p-2}\right)\sqrt{\left|\frac{p}{2} - t^{p-2}\right|}} = \begin{cases} -\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^{p-2}-\frac{p}{2}}}, & t \in \Omega \\ \int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\frac{p}{2}-t^{p-2}}}, & t \in \Omega^c. \end{cases} \tag{3.73}$$

Sia $t \in \Omega$, allora effettuando il cambio di variabile $z = \sqrt{t^{p-2} - \frac{p}{2}}$, ossia $\mathrm{d}t = 2(p-2)^{-1} z \left(z^2 + \frac{p}{2}\right)^{\frac{3-p}{p-2}} \mathrm{d}z$, a meno di costante otteniamo

$$-\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^{p-2} - \frac{p}{2}}} = -\frac{2}{p-2} \int \frac{z\left(z^2 + \frac{p}{2}\right)^{\frac{3-p}{p-2}}}{z\left(z^2 + \frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}}} \mathrm{d}z = -\frac{2}{p-2} \int \frac{1}{z^2 + \frac{p}{2}} \mathrm{d}z =$$

$$= -\frac{2}{p-2}\sqrt{\frac{2}{p}} \arctan\left[\sqrt{\frac{2}{p}} z\right] = -\frac{2}{p-2}\sqrt{\frac{2}{p}} \arctan\left[\sqrt{\frac{t^{p-2} - \frac{p}{2}}{\frac{p}{2}}}\right]. \tag{3.74}$$

Sia $t \in \Omega^c$, allora effettuando il cambio di variabile $z = \sqrt{\frac{p}{2} - t^{p-2}}$, ossia $\mathrm{d}t = -2(p-2)^{-1} z \left(\frac{p}{2} - z^2\right)^{\frac{3-p}{p-2}} \mathrm{d}z$, a meno di costante otteniamo

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\frac{p}{2} - t^{p-2}}} = -\frac{2}{p-2} \int \frac{z\left(\frac{p}{2} - z^2\right)^{\frac{3-p}{p-2}}}{z\left(\frac{p}{2} - z^2\right)^{\frac{1}{p-2}}} \mathrm{d}z = -\frac{2}{p-2} \int \frac{1}{\frac{p}{2} - z^2} \mathrm{d}z =$$

$$= -\frac{2}{p-2}\sqrt{\frac{2}{p}} \operatorname{arctanh}\left[\sqrt{\frac{2}{p}} z\right] = -\frac{2}{p-2}\sqrt{\frac{2}{p}} \operatorname{arctanh}\left[\sqrt{\frac{\frac{p}{2} - t^{p-2}}{\frac{p}{2}}}\right]. \tag{3.75}$$

Mettendo insieme (3.72), (3.73), (3.74) e (3.75) otteniamo

$$\tilde{H}'(t) = \frac{-p\sqrt{\frac{2}{p}}}{(p-2)t} \left(\frac{\arctan\left[\sqrt{\frac{t^{p-2}-\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}}}\right]}{\sqrt{\left|\frac{p}{2} - t^{p-2}\right|}} \chi_{\Omega} + \frac{\operatorname{arctanh}\left[\sqrt{\frac{\frac{p}{2}-t^{p-2}}{\frac{p}{2}}}\right]}{\sqrt{\left|\frac{p}{2} - t^{p-2}\right|}} \chi_{\Omega^c} \right). \tag{3.76}$$

Integriamo ora la (3.76). Per il primo addendo effettuiamo il cambio di variabile $\sqrt{\frac{t^{p-2}-\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}}}=z$, ossia $\mathrm{d}t=\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}}\frac{2z}{p-2}(z^2+1)^{\frac{3-p}{p-2}}\mathrm{d}z$, e otteniamo

$$\int\frac{\arctan\left[\sqrt{\frac{t^{p-2}-\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}}}\right]}{t\sqrt{t^{p-2}-\frac{p}{2}}}\mathrm{d}t=\int\frac{\arctan z\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}}\frac{2z}{p-2}(z^2+1)^{\frac{3-p}{p-2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}z\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}}(z^2+1)^{\frac{1}{p-2}}}\mathrm{d}z=$$

$$=\frac{2\sqrt{\frac{2}{p}}}{p-2}\int\frac{\arctan z}{z^2+1}\mathrm{d}z=\frac{\sqrt{\frac{2}{p}}}{p-2}\arctan^2 z. \tag{3.77}$$

Effettuiamo lo stesso calcolo con il secondo addendo con il cambio di variabile $\sqrt{\frac{\frac{p}{2}-t^{p-2}}{\frac{p}{2}}}=z$, ossia $\mathrm{d}t=\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}}\frac{(-2z)}{p-2}(z^2+1)^{\frac{3-p}{p-2}}\mathrm{d}z$, e otteniamo

$$\int\frac{\operatorname{arctanh}\left[\sqrt{\frac{\frac{p}{2}-t^{p-2}}{\frac{p}{2}}}\right]}{t\sqrt{\frac{p}{2}-t^{p-2}}}\mathrm{d}t=\int\frac{\operatorname{arctanh} z\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}}\frac{(-2z)}{p-2}(1-z^2)^{\frac{3-p}{p-2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}z\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}}(1-z^2)^{\frac{1}{p-2}}}\mathrm{d}z=$$

$$=\frac{-2\sqrt{\frac{2}{p}}}{p-2}\int\frac{\operatorname{arctanh} z}{1-z^2}\mathrm{d}z=\frac{-\sqrt{\frac{2}{p}}}{p-2}\operatorname{arctanh}^2 z. \tag{3.78}$$

Grazie alle relazioni (3.76), (3.77) e (3.78) otteniamo la relazione (3.70)

$$\tilde{H}(t)=\frac{2}{(p-2)^2}\left[-\left(\arctan\sqrt{\frac{t^{p-2}-\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}}}\right)^2\chi_\Omega(t)+\left(\operatorname{arctanh}\sqrt{\frac{\frac{p}{2}-t^{p-2}}{\frac{p}{2}}}\right)^2\chi_{\Omega^c}(t)\right]+\alpha. \tag{3.79}$$

Combiniamo ora la relazione (3.45) e la (3.56) distinguendo i due casi possibili. Supponiamo per assurdo che l'insieme $\left\{x : u^{p-2}(x)>\frac{p}{2}\right\}$ sia non vuoto. Allora su questo insieme la relazione (3.45) diventa

$$\tilde{H}(u(x))=\frac{-2}{(p-2)^2}\left(\arctan\left[\sqrt{\frac{u^{p-2}(x)-\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}}}\right]\right)^2+\alpha=\frac{|x|^2}{2},$$

quindi ricaviamo che vale

$$\arctan\left[\sqrt{\frac{u^{p-2}(x)-\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}}}\right]=\frac{p-2}{2}\sqrt{2\alpha-|x|^2}<\frac{\pi}{2},$$

dove l'ultima disuguaglianza deriva dalla definizione della funzione arcotangente. Di conseguenza otteniamo

$$u(x)=\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}}\left[1+\tan^2\left(\frac{p-2}{2}\sqrt{2\alpha-|x|^2}\right)\right]^{\frac{1}{p-2}}\chi_{\left\{|x|^2>2\alpha-\left(\frac{\pi}{p-2}\right)^2\right\}}=$$

$$= \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}} \left[\cos\left(\frac{p-2}{2}\sqrt{2\alpha - |x|^2}\right)\right]^{\frac{-2}{p-2}} \chi_{\left\{|x|^2 > 2\alpha - \left(\frac{\pi}{p-2}\right)^2\right\}}. \tag{3.80}$$

Ora determiniamo il valore di α nella (3.80). Dal momento che u è soluzione del problema di minimizzazione (3.40), allora u risolve l'equazione di Eulero-Lagrange (3.41) e anche l'equazione (3.51). Quindi, sostituendo la (3.80) nella (3.51), otteniamo dopo alcuni calcoli che $\alpha = 0$, che è assurdo dato che $\sqrt{2\alpha - |x|^2}$ perderebbe di significato. Allora deve contemporaneamente essere $\left\{x : u^{p-2}(x) > \frac{p}{2}\right\} = \emptyset$ e $\left\{x : u^{p-2}(x) \le \frac{p}{2}\right\} = \mathbb{R}$. Ora, risolviamo di nuovo la (3.45) usando il secondo termine di $H(u(x))$. Abbiamo

$$\tilde{H}(u(x)) = \frac{2}{(p-2)^2}\left(\operatorname{arctanh}\left[\sqrt{\frac{\frac{p}{2} - u^{p-2}(x)}{\frac{p}{2}}}\right]\right)^2 + \alpha = \frac{|x|^2}{2},$$

quindi ricaviamo

$$\operatorname{arctanh}\left[\sqrt{\frac{\frac{p}{2} - u^{p-2}(x)}{\frac{p}{2}}}\right] = \frac{p-2}{p}\sqrt{|x|^2 - 2\alpha}.$$

Di conseguenza, otteniamo

$$u(x) = \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}} \left[1 - \tanh^2\left(\frac{p-2}{2}\sqrt{|x|^2 - 2\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{p-2}} =$$

$$= \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-2}} \left[\cosh\left(\frac{p-2}{2}\sqrt{|x|^2 - 2\alpha}\right)\right]^{\frac{-2}{p-2}}. \tag{3.81}$$

Come prima sostituiamo (3.81) nell'equazione (3.51) e troveremo dopo alcuni calcoli che $\alpha = 0$. Finalmente, inserendo $\alpha = 0$ nella (3.79) e nella (3.81) troviamo la relazione (3.70) e (3.71). Questo completa la prova. □

Corollario 3.3.5 (Caso $1 < q < p = 2$)**.** *Sia $p = 2 > q$. Allora, definito $\Omega = \left\{t : t^{2-q} > \frac{2}{q}\right\}$, la seguente funzione risolve l'equazione differenziale ordinaria* (3.48)

$$\tilde{H}(t) = \frac{-2}{(2-q)^2}\left(\operatorname{arcsinh}\sqrt{\frac{t^{2-q} - \frac{2}{q}}{\frac{2}{q}}}\right)^2 \chi_{\Omega}(t) + \frac{2}{(2-q)^2}\left(\arcsin\sqrt{\frac{\frac{2}{q} - t^{2-q}}{\frac{2}{q}}}\right)^2 \chi_{\Omega^c}(t). \tag{3.82}$$

Inoltre, una funzione ottimale del problema di minimizzazione (3.40) *in questo caso è*

$$u(x) = \left(\frac{2}{q\lambda}\right)^{\frac{1}{2-q}} \left[\cos\left(\frac{2-q}{2}\sqrt{\lambda}|x|\right)\right]^{\frac{2}{2-q}} \chi_{\left\{|x| \le \frac{\pi}{(2-q)\sqrt{\lambda}}\right\}} \tag{3.83}$$

dove λ è univocamente determinato da $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$.

Dimostrazione. Se $p = 2 > q$, allora la soluzione (3.49) dell'equazione differenziale ordinaria (3.48) prende la forma

$$\tilde{H}'(t) = \frac{1}{t^{\frac{q}{2}}\sqrt{\left|\frac{2}{q} - t^{2-q}\right|}} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{q}{2}} \operatorname{sign}\left(\frac{2}{q} - t^{2-q}\right)\sqrt{\left|\frac{2}{q} - t^{2-q}\right|}}. \tag{3.84}$$

Ora calcoleremo la primitiva richiesta a seconda dei casi,

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{q}{2}} \operatorname{sign}\left(\frac{2}{q} - t^{2-q}\right)\sqrt{\left|\frac{2}{q} - t^{2-q}\right|}} \begin{cases} -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{q}{2}}\sqrt{t^{2-q}-\frac{2}{q}}} & t \in \Omega \\ \int \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{q}{2}}\sqrt{\frac{2}{q}-t^{2-q}}} & t \in \Omega^c \end{cases}. \tag{3.85}$$

Sia $t \in \Omega$, allora effettuando il cambio di variabile $z = \sqrt{t^{2-q} - \frac{2}{q}}$, ossia $\mathrm{d}t = 2z(2-q)^{-1}\left(z^2 + \frac{2}{q}\right)^{\frac{q-1}{2-q}}\mathrm{d}z$, a meno di costante otteniamo

$$-\int \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{q}{2}}\sqrt{t^{2-q} - \frac{2}{q}}} = -\frac{2}{2-q}\int \frac{z\left(z^2+\frac{2}{q}\right)^{\frac{q-1}{2-q}}}{z\left(z^2+\frac{2}{q}\right)^{\frac{q}{2(2-q)}}}\mathrm{d}z = -\frac{2}{2-q}\int \frac{1}{\sqrt{z^2+\frac{2}{q}}}\mathrm{d}z =$$

$$= -\frac{2}{2-q}\operatorname{arcsinh}\left[\sqrt{\frac{q}{2}}z\right] = -\frac{2}{2-q}\operatorname{arcsinh}\left[\sqrt{\frac{t^{2-q}-\frac{2}{q}}{\frac{2}{q}}}\right]. \tag{3.86}$$

Sia $t \in \Omega^c$, allora effettuando il cambio di variabile $z = \sqrt{\frac{2}{q} - t^{2-1}}$, ossia $\mathrm{d}t = -2(2-q)^{-1}z\left(\frac{2}{q} - z^2\right)^{\frac{q-1}{2-q}}\mathrm{d}z$, a meno di costante otteniamo

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{q}{2}}\sqrt{\frac{2}{q} - t^{2-q}}} = -\frac{2}{2-q}\int \frac{z\left(\frac{2}{q}-z^2\right)^{\frac{q-1}{2-q}}}{z\left(\frac{2}{q}-z^2\right)^{\frac{q}{2(2-q)}}}\mathrm{d}z = -\frac{2}{2-q}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{q}-z^2}}\mathrm{d}z =$$

$$= -\frac{2}{2-q}\arcsin\left[\sqrt{\frac{q}{2}}z\right] = -\frac{2}{2-q}\arcsin\left[\sqrt{\frac{\frac{2}{q}-t^{2-q}}{\frac{2}{q}}}\right]. \tag{3.87}$$

Mettendo insieme (3.84), (3.85), (3.86) e (3.87) otteniamo

$$\tilde{H}'(t) = \frac{-2}{(2-q)t^{\frac{q}{2}}}\left(\frac{\operatorname{arcsinh}\left[\sqrt{\frac{t^{2-q}-\frac{2}{q}}{\frac{2}{q}}}\right]}{\sqrt{\left|\frac{2}{q}-t^{2-q}\right|}}\chi_\Omega + \frac{\arcsin\left[\sqrt{\frac{\frac{2}{q}-t^{2-q}}{\frac{2}{q}}}\right]}{\sqrt{\left|\frac{2}{q}-t^{2-q}\right|}}\chi_{\Omega^c}\right). \tag{3.88}$$

Ora integriamo la (3.88). Per il primo addendo effettuiamo il cambio di variabile $\sqrt{\frac{t^{2-q}-\frac{2}{q}}{\frac{2}{q}}} = z$, ossia $\mathrm{d}t = \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{2-q}} \frac{2z}{2-q}(z^2+1)^{\frac{q-1}{2-q}}\mathrm{d}z$, e otteniamo

$$\int \frac{\operatorname{arcsinh}\left[\sqrt{\frac{t^{2-q}-\frac{2}{q}}{\frac{2}{q}}}\right]}{t^{\frac{q}{2}}\sqrt{t^{2-q}-\frac{2}{q}}}\mathrm{d}t = \int \frac{\operatorname{arcsinh} z \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{2-q}} \frac{2z}{2-q}(1+z^2)^{\frac{q-1}{2-q}}}{\sqrt{\frac{2}{q}}z\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{2-q}}(1+z^2)^{\frac{q}{2(2-q)}}}\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{q}{2}}}{2-q}\int \frac{\operatorname{arcsinh} z}{\sqrt{1+z^2}}\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\frac{q}{2}}}{2-q}\operatorname{arcsinh}^2 z. \tag{3.89}$$

Effettuiamo lo stesso calcolo con il secondo addendo con il cambio di variabile $\sqrt{\frac{\frac{2}{q}-t^{2-q}}{\frac{2}{q}}} = z$, ossia $\mathrm{d}t = \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{2-q}} \frac{(-2z)}{2-q}(1-z^2)^{\frac{q-1}{2-q}}\mathrm{d}z$, e otteniamo

$$\int \frac{\arcsin\left[\sqrt{\frac{\frac{2}{q}-t^{2-q}}{\frac{2}{q}}}\right]}{t^{\frac{q}{2}}\sqrt{\frac{2}{q}-t^{2-q}}}\mathrm{d}t = \int \frac{\arcsin z \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{2-q}} \frac{(-2z)}{2-q}(1-z^2)^{\frac{q-1}{2-q}}}{\sqrt{\frac{2}{q}}z\left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{2-q}}(1-z^2)^{\frac{q}{2(2-q)}}}\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{-2\sqrt{\frac{q}{2}}}{2-q}\int \frac{\arcsin z}{\sqrt{1-z^2}}\mathrm{d}z = \frac{-\sqrt{\frac{q}{2}}}{2-q}\arcsin^2 z. \tag{3.90}$$

Grazie alle relazioni (3.88), (3.89) e (3.90), otteniamo la relazione (3.82)

$$\tilde{H}(t) = \frac{2}{(2-q)^2}\left[-\left(\operatorname{arcsinh}\sqrt{\frac{t^{2-q}-\frac{2}{q}}{\frac{2}{q}}}\right)^2 \chi_\Omega(t) + \left(\arcsin\sqrt{\frac{\frac{2}{q}-t^{2-q}}{\frac{2}{q}}}\right)^2 \chi_{\Omega^c}(t)\right] + \alpha. \tag{3.91}$$

Combiniamo ora la relazione (3.45) e la (3.56) distinguendo i due casi possibili. Supponiamo per assurdo che l'insieme $\left\{x : u^{2-q}(x) > \frac{2}{q}\right\}$ sia non vuoto. Allora su questo insieme la relazione (3.45) diventa

$$\tilde{H}(u(x)) = \frac{-2}{(2-q)^2}\left(\operatorname{arcsinh}\left[\sqrt{\frac{u^{2-q}(x)-\frac{2}{q}}{\frac{2}{q}}}\right]\right)^2 + \alpha = \frac{|x|^2}{2},$$

quindi ricaviamo che vale

$$\operatorname{arcsinh}\left[\sqrt{\frac{u^{2-q}(x)-\frac{2}{q}}{\frac{2}{q}}}\right] = \frac{2-q}{2}\sqrt{2\alpha-|x|^2}.$$

Di conseguenza otteniamo

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{2-q}} \left[1+\sinh^2\left(\frac{2-q}{2}\sqrt{2\alpha-|x|^2}\right)\right]^{\frac{1}{2-q}} = \\
&= \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{2-q}} \left[\cosh\left(\frac{2-q}{2}\sqrt{2\alpha-|x|^2}\right)\right]^{\frac{2}{2-q}}. \qquad (3.92)
\end{aligned}
$$

Ora, determiniamo il valore di α nella (3.92). Dal momento che u è soluzione del problema di minimizzazione (3.40), allora u risolve l'equazione di Eulero-Lagrange (3.41) e anche l'equazione (3.51). Quindi, sostituendo la (3.92) nella (3.51), otteniamo dopo alcuni calcoli che $\alpha = 0$, che è assurdo dato che $\sqrt{2\alpha - |x|^2}$ perderebbe di significato. Allora deve contemporaneamente essere $\left\{x : u^{p-2}(x) > \frac{p}{2}\right\} = \emptyset$ e $\left\{x : u^{p-2}(x) \leq \frac{p}{2}\right\} = \mathbb{R}$. Ora, risolviamo di nuovo la (3.45) usando il secondo termine di $H(u(x))$. Abbiamo

$$
\tilde{H}(u(x)) = \frac{2}{(2-q)^2}\left(\arcsin\left[\sqrt{\frac{\frac{2}{q}-u^{2-q}(x)}{\frac{2}{q}}}\right]\right)^2 + \alpha = \frac{|x|^2}{2},
$$

quindi ricaviamo

$$
\arcsin\left[\sqrt{\frac{\frac{2}{q}-u^{2-q}(x)}{\frac{2}{q}}}\right] = \frac{2-q}{2}\sqrt{|x|^2-2\alpha} \leq \frac{\pi}{2},
$$

dove l'ultima disuguaglianza discende dalla definizione della funzione arcoseno. Di conseguenza otteniamo

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{2-q}} \left[1-\sin^2\left(\frac{2-q}{2}\sqrt{|x|^2-2\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{2-q}} \chi_{\left\{|x|^2 \leq \frac{\pi^2}{(2-q)^2}+2\alpha\right\}} = \\
&= \left(\frac{2}{q}\right)^{\frac{1}{2-q}} \left[\cos\left(\frac{2-q}{2}\sqrt{|x|^2-2\alpha}\right)\right]^{\frac{2}{2-q}} \chi_{\left\{|x|^2 \leq \frac{\pi^2}{(2-q)^2}+2\alpha\right\}}. \qquad (3.93)
\end{aligned}
$$

Come prima sostituiamo (3.93) nell'equazione (3.51) e troveremo dopo alcuni calcoli che $\alpha = 0$. Finalmente, inserendo $\alpha = 0$ nella (3.91) e nella (3.93) troviamo la relazione (3.82) e (3.83). Questo completa la prova. $\square$

3.3.3 Dimensione maggiore di 1

Come descritto in precedenza, nel caso multidimensionale considereremo i valori $q = 1+\frac{p}{2}$ o $q = 2(p-1)$. Descriviamo quindi cosa accade in dimensione maggiore di 1.

Teorema 3.3.6. *Sia $n > 2$ e $1 < q < p < 2^*$. Allora il problema variazionale* (3.40) *ha un elemento minimizzante u_∞, che è non negativo, radiale, decrescente e infinitesimo all'infinito. Inoltre, u_∞ è l'unico ground state radiale che corrisponde all'equazione alle derivate parziali* (3.41). *Perciò, l'unica soluzione di* (3.41) *(per ogni scelta di λ per cui valga la condizione di normalizzazione $\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$=1) è un elemento minimizzante del problema* (3.40).

Dimostrazione. Denotiamo con E_∞ il minimo valore del problema (3.40) ossia

$$E_\infty := \inf \left\{ E(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^q \mathrm{d}x : \quad \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1 \right\}. \tag{3.94}$$

Dal momento che $\{u \in D^{1,q}(\mathbb{R}^n) : \quad \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1\}$ è non vuoto e $E(u) \geq 0$, allora E_∞ è finito. Ora, consideriamo una successione minimizzante $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ per il problema (3.40), ossia, $u_k \in D^{1,q}(\mathbb{R}^n)$, $\|u_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 1$, e tale che $E(u_k) \to E_\infty$ per $k \to \infty$. Dato che E_∞ è finito, allora la successione $\{E(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata in $\mathbb{R}$, e dalle disuguaglianze $\|u_k\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq qE(u_k)$ e $\|\nabla u_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 2E(u_k)$ abbiamo che $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata in $L^q(\mathbb{R}^n)$ e $\{\nabla u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Perciò, esiste una sottosuccessione di $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ che converge debolmente a u_∞ in $L^q(\mathbb{R}^n)$, e $\{\nabla u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge debolmente a ∇u_∞ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dalla debole semicontinuità inferiore della norma p e del funzionale $u \mapsto E(u)$ su $D^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ deduciamo che

$$\|u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{3.95}$$

e

$$E(u_\infty) \leq \liminf_{k\to\infty} E(u_k) = E_\infty. \tag{3.96}$$

Rimane da mostrare che $\|u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1$ per dedurre che u_∞ è un elemento minimizzante per (3.40). Per dimostrare ciò, possiamo ripercorrere le stesse tecniche utilizzate da Del Pino [12], ma per $1 < q \leq 2$ daremo una dimostrazione alternativa. Infatti, se $n > 2$ e $q < 2^*$ abbiamo $q \leq 2 < 2^*$, e quindi, dato che $\{\nabla u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata in $L^2(\mathbb{R}^n)$, il teorema di Sobolev 6.0.23 ci dice che $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata in $L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$. Usando il fatto che $q \leq 2 < 2^*$, e che $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata in $L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ e $L^q(\mathbb{R}^n)$, per interpolazione otteniamo che $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Segue quindi che $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata in $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, perciò converge debolmente, a meno di sottosuccessioni, a u_∞ in $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Possiamo usare il teorema di Rellich 6.0.25 per ottenere che la successione converge fortemente a u_∞ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ perché $p < 2^*$. Concludiamo che

$$\|u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1$$

che mostra che u_∞ è un elemento minimizzante per il problema (3.40). A meno di rimpiazzare u nel problema di minimizzazione (3.40) con il suo riordinamento decrescente definito nel capitolo 5

$$u^\star(x) = \int_0^\infty \chi_{\{u(x)>t\}^\star}(x)\mathrm{d}t \qquad \text{(definizione 5.1.2)}$$

possiamo assumere, senza perdita di generalità, che l'elemento minimizzante u_∞ sia non negativo, radiale e decrescente. Inoltre, dato che $\|u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1$, allora u_∞ tende a 0 per $|x| \to \infty$. Questo prova che l'elemento minimizzante u_∞ può essere scelto non negativo, radiale, decrescente e infinitesimo all'infinito. Ora, consideriamo l'equazione di Eulero-Lagrange del problema (3.40), ossia

$$-\Delta u + u^{q-1} - \lambda u^{p-1} = 0 \tag{3.97}$$

dove $\lambda > 0$ è il moltiplicatore di Lagrange associato al vincolo $\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1$. Allora, u_∞ è una soluzione distribuzionale C^1 di (3.97). Definendo

$$\bar{u}(x) = \lambda^{\frac{1}{p-q}} u(\lambda^{\frac{q-2}{2(p-q)}} x) \tag{3.98}$$

otteniamo che $\bar{u}$ risolve la seguente equazione alle derivate parziali

$$-\Delta \bar{u} + \bar{u}^{q-1} - \bar{u}^{p-1} = 0, \tag{3.99}$$

e c'è, tramite (3.98), una corrispondenza biunivoca tra le soluzione delle due equazioni (3.97) e (3.99). Applicando il teorema 6.0.32 (per $m = 2$, $P = q-1$ e $Q = p-1$) possiamo ricavare che l'equazione (3.99) ha al più una ground state radiale $\bar{u}_\infty$. Perciò, l'equazione (3.97) ha al più un ground state radiale $\bar{u}(x) = \lambda^{\frac{1}{p-q}} \bar{u}_\infty(\lambda^{\frac{q-2}{2(p-q)}} x)$ che è nient'altro che l'elemento minimizzante u_∞ di (3.40). Questo completa la dimostrazione del teorema. □

Il prossimo teorema estende il teorema 3.3.1 al caso multidimensionale, quando $q = 1 + \frac{p}{2}$ o $q = 2(p-1)$.

Teorema 3.3.7. *Sia $n > 2$ e $1 < q < p < 2^*$ (per $n = 2$ assumiamo $1 < q < p$). Sia $\tilde{H}$ una funzione $C^2(0, v(0))$ che soddisfa $\tilde{H}(v(r)) = \frac{r^2}{2}$ dove v è una soluzione non negativa, decrescente, non identicamente nulla e C^2 dell'equazione*

$$v''(r) + (n-1)\frac{v'(r)}{r} - v^{q-1}(r) + v^{p-1}(r) = 0, \tag{3.100}$$

tale che siano essa stessa e la sua derivata infinitesime all'infinito. Allora $\tilde{H}$ soddisfa l'equazione differenziale ordinaria non lineare

$$2\left(\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right)\tilde{H}''(t) + (t^{q-1} - t^{p-1})\tilde{H}'(t) - 2(n-1)\tilde{H}''(t)\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\tilde{H}'(s)} = n, \tag{3.101}$$

per ogni $t \in (0, v(0))$, e $\lim_{t\to 0^+} \tilde{H}(t) = \infty$ e $\lim_{t\to 0^+} \tilde{H}'(t) = -\infty$.

Dimostrazione. Come prima cosa, notiamo che $v(0) \neq 0$: se così non fosse, la funzione $v(r)$ sarebbe identicamente nulla in quanto decrescente e infinitesima all'infinito e quindi avrebbe norma $p-$esima nulla contro le nostre ipotesi. Perciò $(0, v(0))$ è non vuoto. Dalle relazioni $\tilde{H}(v(r)) = \frac{r^2}{2}$ e $\lim_{r\to\infty} v(r) = 0$ otteniamo $\lim_{t\to 0^+} \tilde{H}(t) = \infty$. Differenziando la relazione (3.45) rispetto ad r otteniamo $\tilde{H}'(v(r))v'(r) = r$ ossia

$$\frac{v'(r)}{r} = \frac{1}{\tilde{H}'(v(r))}. \tag{3.102}$$

Allora $\tilde{H}'(t) < 0$ per ogni $t \in (0, v(0))$ dato che $v(r)$ è decrescente su $(0,\infty)$ e $\lim_{r\to\infty} v(r) = 0$. Inoltre, $\lim_{r\to 0^+} \tilde{H}'(t) = -\infty$ perché $\lim_{r\to\infty} v'(r) = 0$ e $v'(r) < 0$. Inseriamo la relazione (3.102) all'interno di (3.100) per ottenere

$$-v''(r) = \frac{n-1}{\tilde{H}'(v(r))} - v^{q-1}(r) + v^{p-1}(r). \tag{3.103}$$

Moltiplicando (3.103) per $v'(r)$ e integrando entrambi i membri su (r,∞), ricordando che $v(r)$ è infinitesima all'infinito e che $\lim_{r\to\infty}(v'(r))^2 = 0$, otteniamo

$$\frac{(v'(r))^2}{2} = (n-1)\int_r^\infty \frac{v'(r)}{\tilde{H}'(v(r))}\mathrm{d}r + \frac{v^q(r)}{q} - \frac{v^p(r)}{p}.$$

Utilizziamo la sostituzione $s = v(r)$ nell'integrale e ricaviamo

$$(v'(r))^2 = 2\left(\frac{v^q(r)}{q} - \frac{v^p(r)}{p}\right) - 2(n-1)\int_0^{v(r)} \frac{\mathrm{d}s}{\tilde{H}'(s)}. \tag{3.104}$$

Differenziando ora la (3.45) due volte rispetto ad r abbiamo che

$$v''(r)\tilde{H}'(v(r)) + (v'(r))^2\tilde{H}''(v(r)) = 1. \tag{3.105}$$

Inserendo allora la (3.103) e la (3.104) nella (3.105) otteniamo che

$$(v^{q-1}(r) - v^{p-1}(r))\tilde{H}'(v(r)) + \tilde{H}''(v(r))\left[2\left(\frac{v^q(r)}{q} - \frac{v^p(r)}{p}\right) - 2(n-1)\int_0^{v(r)} \frac{\mathrm{d}s}{\tilde{H}'(s)}\right] = n.$$

Questo prova (3.101) e completa la dimostrazione del teorema. □

3.3.4 Alcune funzioni ottimali in dimensione maggiore di 1

A questo punto, useremo il teorema 3.3.7 per trovare una funzione ottimale che risolve il problema (3.5) dando validità alla disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg in dimensione maggiore di 1, ovviamente per i casi particolari di cui prima abbiamo parlato.

Corollario 3.3.8. *Sotto le ipotesi del teorema* 3.3.7, *assumiamo che valga* $\tilde{H}'(t) = \pm(Ct)^{\frac{k}{k+1}}$ *con* $C, k > 0$. *Allora essa soddisfa la seguente relazione*

$$\tilde{H}''(t) \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\tilde{H}'(s)} = k. \tag{3.106}$$

Inoltre, $\tilde{H}$ *risolve l'equazione differenziale ordinaria* (3.101) *se e soltanto se* $q = 1 + \frac{p}{2}$ *o* $q = 2(p-1)$. *Nello specifico,*

1. *se* $q = 1 + \frac{p}{2}$ *con* $p > 2$, *allora*

$$\tilde{H}(t) = \frac{2(2n - p(n-2))}{(p-2)^2} t^{1-\frac{p}{2}} + \gamma, \qquad \gamma \in \mathbb{R} \tag{3.107}$$

e la disuguaglianza ottimale di Gagliardo-Nirenberg è

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_{GN} \|\nabla u\|^{\theta}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u\|^{1-\theta}_{L^{1+\frac{p}{2}}(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall u \in D^{1,q}(\mathbb{R}^n) \tag{3.108}$$

con costante ottima esplicitamente data da (3.7), *e le funzioni ottimali* $u_{\sigma,\bar{x}}(x) = C u_\infty(\sigma(x - \bar{x}))$ *sono tali che*

$$u_\infty(x) = \left[\frac{(p-2)^2}{4(2n - p(n-2))}\right]^{\frac{1}{1-\frac{p}{2}}} \left(|x|^2 + \frac{2\lambda(2n - p(n-2))^2}{p(p-2)^2}\right)^{\frac{1}{1-\frac{p}{2}}} \tag{3.109}$$

dove $\lambda > 0$ *è univocamente determinato dalla condizione di normalizzazione* $\|u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1$, *mentre* $C > 0$, $\sigma \neq 0$ *e* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *sono arbitrari.*

2. *se* $q = 2(p-1)$ *con* $1 < p < 2$, *allora*

$$\tilde{H}(t) = -\frac{2(n-1) - p(n-2)}{(p-2)^2} t^{2-p} + \gamma, \qquad \gamma \in \mathbb{R} \tag{3.110}$$

e la disuguaglianza ottimale di Gagliardo-Nirenberg è

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_{GN} \|\nabla u\|^{\theta}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u\|^{1-\theta}_{L^{2(p-1)}(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall u \in D^{1,q}(\mathbb{R}^n) \tag{3.111}$$

con costante ottima esplicitamente data da (3.7), *e le funzioni ottimali* $u_{\sigma,\bar{x}}(x) = C u_\infty(\sigma(x - \bar{x}))$ *sono tali che*

$$u_\infty(x) = \left[\frac{\lambda(p-2)^2}{2(2(n-1) - p(n-2))}\right]^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{(2(p-1) + n(2-p))^2}{\lambda^2(p-1)(p-2)^2} - |x|^2\right)_+^{\frac{1}{2-p}} \tag{3.112}$$

dove $\lambda > 0$ *è univocamente determinato dalla condizione di normalizzazione* $\|u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1$, *mentre* $C > 0$, $\sigma \neq 0$ *e* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *sono arbitrari.*

Dimostrazione. Poniamo $G(t) = \int_0^t \frac{ds}{\tilde{H}'(s)}$. Abbiamo che $G(0) = 0$ e anche $G'(t) = \frac{1}{\tilde{H}'(t)}$. Quindi la relazione (3.106) diventa

$$\frac{G''(t)}{G'(t)} = -k\frac{G'(t)}{G(t)},$$

da cui ricaviamo dopo un' integrazione

$$G'(t)(G(t))^k = A, \tag{3.113}$$

per una certa costante A. Osserviamo che $k \neq -1$, altrimenti avremmo $G(t) = G(0)e^{At}$=0 dato che $G(0) = 0$. Ora, integriamo la (3.113) e usiamo il fatto che $G(0) = 0$, per ottenere $G(t) = (A(k+1)t)^{\frac{1}{k+1}}$. Allora

$$\tilde{H}'(t) = -Bt^{\frac{k}{k+1}}, \tag{3.114}$$

dove $B = -\frac{1}{A}[A(k+1)]^{\frac{k}{k+1}}$, perché $\tilde{H}'(t) < 0$ per $t > 0$. Inseriamo la relazione (3.114) nella (3.101) per ottenere che

$$\left(\frac{2k}{q(k+1)}+1\right)t^{q-\frac{1}{k+1}} - \left(1+\frac{2k}{p(k+1)}+1\right)t^{p-\frac{1}{k+1}} = -\frac{n+2(n-1)k}{B} \tag{3.115}$$

per ogni $t \in (0, v(0))$. Dato che $p \neq q$, allora (3.115) è valida per ogni t, se e solo se

$$q - \frac{1}{k+1} = 0, \qquad 1 + \frac{2k}{p(k+1)} = 0, \tag{3.116}$$

o

$$1 + \frac{2k}{q(k+1)} = 0, \qquad p - \frac{1}{k+1=0}. \tag{3.117}$$

È di verifica immediata che (3.116) ci fornisce $q = 1 + \frac{p}{2}$, mentre (3.117) da $p = 1 + \frac{q}{2}$, ossia, $q = 2(p-1)$. Ora assumiamo che $q = 1 + \frac{p}{2}$. Dalle relazioni (3.115) e (3.116) abbiamo che

$$B = -\frac{n+2(n-1)k}{1+\frac{2k}{q(k+1)}} = \frac{2n-p(n-2)}{p-2},$$

e allora la (3.114) combinata con la (3.116) ci fornisce

$$\tilde{H}'(t) = -\frac{2n-p(n-2)}{p-2}t^{-\frac{p}{2}}. \tag{3.118}$$

Integriamo la relazione (3.118) per ottenere la (3.107). Per provare la (3.109), usiamo la (3.45) e la (3.107) per ottenere

$$v(r) = \left[\frac{(p-2)^2}{4(2n-p(n-2))}\right]^{\frac{1}{1-\frac{p}{2}}} (r^2+\delta)^{\frac{1}{1-\frac{p}{2}}}, \tag{3.119}$$

dove $\delta = -2\gamma$ e scegliamo $\gamma < 0$. Inserendo la (3.119) in (3.100), abbiamo, dopo alcuni calcoli

$$\delta = \frac{2(2n - p(n-2))^2}{p(p-2)^2}. \tag{3.120}$$

Ora, possiamo dedurre dalla relazione $v(r) = \lambda^{\frac{1}{p-q}} u_\infty(\lambda^{\frac{q-2}{2(p-q)}} x)$ che vale $u_\infty(x) = \lambda^{-\frac{1}{p-q}} v(\lambda^{-\frac{q-2}{2(p-q)}} x) = \lambda^{-\frac{1}{p-q}} \bar{u}_\infty(\lambda^{-\frac{q-2}{2(p-q)}} x)$, allora combiniamo la relazione $u_\infty(x) = v(r)$ con la (3.119) e (3.120) per concludere la (3.109). La costante λ è univocamente determinata dal vincolo $\|u_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1$.
Se $q = 2(p-1)$, procediamo in modo simile. Usiamo la (3.115) e (3.117) per ottenere

$$B = \frac{n + 2(n-1)k}{1 + \frac{2k}{p(k+1)}} = \frac{2(n-1) - p(n-2)}{2-p},$$

e la (3.114) ci fornisce

$$\tilde{H}'(t) = -\frac{2(n-1) - p(n-2)}{2-p} t^{1-p}.$$

Allora, integriamo l'ultima espressione trovata per ottenere (3.110). Per provare (3.112), prima usiamo (3.45) e (3.110) per ottenere

$$v(r) = \left[\frac{(2-p)^2}{2(2(n-1) - p(n-2))}\right]^{\frac{1}{2-p}} (\delta - r^2)^{\frac{1}{2-p}}$$

dove $\delta = 2\gamma$ e scegliamo $\gamma \leq 0$. Dato che $1 < p < 2$, allora $v(r)$ ha supporto compatto. Perciò

$$v(r) = \left[\frac{(2-p)^2}{2(2(n-1) - p(n-2))}\right]^{\frac{1}{2-p}} (\delta - r^2)_+^{\frac{1}{2-p}}. \tag{3.121}$$

Inserendo la relazione (3.121) in (3.100), otteniamo dopo alcuni calcoli che

$$\delta = \frac{(2(p-1) + n(2-p))^2}{(p-1)(2-p)^2}. \tag{3.122}$$

Infine, combiniamo la relazione $v(r) = \lambda^{\frac{1}{p-q}} u_\infty(\lambda^{\frac{q-2}{2(p-q)}} x)$ con (3.121) e (3.122) per concludere (3.112). Questo conclude la prova. □

3.4 La disuguaglianza di GN e la teoria del trasporto ottimo

In questa sezione, discuteremo il legame tra la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg e la teoria del trasporto ottimo. Dimostreremo che alcune delle disuguaglianze di Gagliardo-Nirenberg possono essere ottenute dal principio di dualità (3.37) derivato dalla teoria del trasporto ottimo. Gli ingredienti necessari per utilizzare la teoria del trasporto ottimo sono la scelta adeguata dell'energia interna H^F in (3.37), e un cambiamento di variabile $\rho_0 = \psi(u)$. Utilizzando le espressioni della funzione $\tilde{H}$, ottenuta nei corollari 3.3.2 e 3.3.3 (che sono i casi in cui le funzioni ottimali per (3.40) hanno la stessa forma in qualsiasi dimensione $n \geq 1$), deriveremo le funzioni ψ e F necessarie al fine di ottenere la corrispondente disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg ottimale dal principio di dualità (3.37). Per comodità, ridefiniremo la dualità (3.37) in una forma diversa.

Teorema 3.4.1. *Sia $n \geq 1$ e sia $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $F \in C[0,\infty) \cap C^2(0,\infty)$, $F(0) = 0$ e la funzione $x \mapsto x^n F(x^{-n})$ sia convessa e non crescente su $(0,\infty)$. Denotiamo con $P_F(x) = xF'(x) - F(x)$ la funzione della pressione associata. Sia $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente convessa per cui $c(0) = 0$ e $\lim_{|x|\to\infty} \frac{c(x)}{|x|} = \infty$. Allora per ogni coppia di densità di probabilità ρ_0 e ρ_1 su $\mathbb{R}^n$ per cui $\rho_0 \in C(\mathbb{R}^n)$, abbiamo*

$$- H_c^F(\rho_1) \leq -H^{F+nP_F}(\rho_0) + \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(x) c^*(-\nabla(F'(\rho_0(x))))\mathrm{d}x. \tag{3.123}$$

Inoltre, se $\psi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ è una funzione differenziabile e $c(x) = \frac{|x|^2}{2}$, allora vale il seguente principio di dualità

$$\sup\{-H^F_{\frac{|x|^2}{2}}(\rho_1) : \rho_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\} = \inf\{J(\psi(u)) : \|\psi\|_{L^1} = 1\}, \tag{3.124}$$

$$J(\psi(u)) = -H^{F+nP_F}(\psi(u)) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(u)|\nabla(F' \circ \psi)(u(x))|^2 \mathrm{d}x, \tag{3.125}$$

e le funzioni ottimali $\rho = \psi(u)$ in entrambi i problemi, soddisfano nel loro supporto

$$\nabla\left((F' \circ \psi)(u) + \frac{|x|^2}{2}\right) = 0. \tag{3.126}$$

Dimostrazione. Abbiamo già mostrato questo teorema nella sezione precedente con le varie casistiche. □

Utilizzeremo il teorema 3.4.1 nei casi $q = 1 + \frac{p}{2} < p$ e $q = 2(p-1) < p$ per trovare le appropriate funzioni F e ψ necessarie per derivare la corrispondente disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg dalle dualità (3.124) e (3.126). Per utilizzare i risultati delle sezioni precedenti ci restringeremo al caso $n = 1$, sebbene sia generalizzabile in dimensione più alta.

Corollario 3.4.2. *Se $n = 1$ e $1 < q = 1 + \frac{p}{2} < p$, allora, scelte*

$$\psi(x) = x^p, \qquad F(x) = \frac{-4p}{(p-2)^2} x^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} \tag{3.127}$$

la dualità (3.124) assume questo aspetto

$$\sup\{-H^F_{\frac{|x|^2}{2}}(\rho_1) : \rho_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\} =$$

$$= \inf\left\{ J(|u|^p) = \frac{2(p+2)}{(p-2)^2}\int_{\mathbb{R}} |u|^q \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(\frac{p+2}{p-2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} |u''|^2 \mathrm{d}x : \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} = 1 \right\} \tag{3.128}$$

con funzione ottimale $\rho_1 = u^p$ data da

$$u(x) = \left[\frac{(p-2)^2}{4(p+2)}\right]^{\frac{2}{2-p}} (|x|^2 + K)^{\frac{2}{2-p}} \tag{3.129}$$

dove K è univocamente determinata dal vincolo $\|u\|_{L^p(\mathbb{R})}$.

Dimostrazione. Per il corollario 3.3.2 vale la relazione

$$H(u^p) = \tilde{H}(u) = \frac{2(p+2)}{(p-2)^2} u^{1-\frac{p}{2}} + \alpha = \frac{|x|^2}{2},$$

e dalla (3.126), abbiamo che $F'(\psi(u)) = \gamma - \frac{|x|^2}{2}$, con γ costante. Allora da ciò otteniamo

$$F'(\psi(u)) = \gamma - H(u^p) = -\frac{2(p+2)}{(p-2)^2} u^{1-\frac{p}{2}} + (\gamma - \alpha). \tag{3.130}$$

Sostituendo (3.130) all'interno di (3.125), e ricordando che $n = 1$ otteniamo

$$J(\psi(u)) = -\int_{\mathbb{R}} \psi(u) F'(\psi(u)) \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(\frac{p+2}{p-2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} \psi(u) u^{-p} |u''|^2 \mathrm{d}x. \tag{3.131}$$

Poniamo $\psi(u)u^{-p} = 1$, cioè $\psi(u) = u^p$. Il vincolo $\|\psi\|_{L^1} = 1$ della relazione (3.124) diviene $\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} = 1$, e la relazione (3.130)

$$F'(v) = -\frac{2(p+2)}{(p-2)^2} v^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} + (\gamma - \alpha), \qquad v = u^p.$$

Allora dopo aver integrato, otteniamo

$$F(v) = -\frac{4p}{(p-2)^2} v^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} + (\gamma - \alpha)v + \delta, \qquad v = u^p,$$

dove γ è una costante arbitraria. Scegliamo $\gamma = \alpha$ e $\delta = 0$. Questo prova (3.127) e (3.128). La relazione (3.129) è una diretta conseguenza delle relazioni (3.126) e (3.127). □

Corollario 3.4.3. *Se $n = 1$ e $1 < q = 2(p-1) < p$, allora*

$$\psi(x) = |x|^q, \qquad F(x) = \frac{2(p-1)}{\lambda(p-2)^2} x^{\frac{p}{q}} \tag{3.132}$$

e la dualità (3.124) *assume questo aspetto*

$$\sup\{-H^F_{\frac{|x|^2}{2}}(\rho_1) : \rho_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\} =$$

$$= \inf\left\{ J(|u|^q) = \frac{-p}{\lambda(p-2)^2}\int_{\mathbb{R}} |u|^p \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\lambda(2-p)}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} |u''|^2 \mathrm{d}x : \|u\|_{L^q(\mathbb{R})} = 1 \right\} \tag{3.133}$$

con funzione ottimale $\rho_1 = u^q$ data da

$$u(x) = \left[\frac{\lambda(p-2)^2}{2p}\right]^{\frac{1}{2-p}} (K - |x|^2)_+^{\frac{1}{2-p}} \tag{3.134}$$

dove K è univocamente determinata (come funzione di λ) da $\|u\|_{L^q(\mathbb{R})} = 1$.

Dimostrazione. La dimostrazione è simile al precedente corollario. Infatti dal corollario 3.3.3 e da (3.126) abbiamo

$$F'(\psi(u)) = \gamma - H(u^p) = \frac{p}{\lambda(2-p)^2} u^{2-p} + (\gamma - \alpha). \tag{3.135}$$

Sostituendo (3.135) nella (3.125) otteniamo

$$J(\psi(u)) = -\int_{\mathbb{R}} \psi(u) F'(\psi(u)) \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\lambda(2-p)}\right)^2 \int_{\mathbb{R}} \psi(u) u^{2(1-p)} |u''|^2 \mathrm{d}x. \tag{3.136}$$

Poniamo $\psi(u)u^{2(1-p)} = 1$, cioè $\psi(u) = u^{2(p-1)} = u^q$. Il vincolo $\|\psi\|_{L^1} = 1$ diventa $\|u\|_{L^q(\mathbb{R})} = 1$, e la (3.135) ci fornisce

$$F'(v) = \frac{p}{\lambda(2-p)^2} v^{\frac{2-p}{q}} + (\gamma - \alpha),$$

e integrando

$$F(v) = \frac{2(p-1)}{\lambda(2-p)^2} v^{\frac{p}{q}} + (\gamma - \alpha)v + \delta.$$

Come prima, scegliamo $\gamma = \alpha$ e $\delta = 0$ per ottenere (3.132) e (3.133). La relazione (3.134) segue direttamente da (3.126) e (3.132). $\square$

Osservazione 3.4.4. In dimensione maggiore, possiamo fare le stesse scelte delle funzioni ψ e F (o multipli scalari positivi di queste funzioni). Di conseguenza, per $n \geq 2$, possiamo derivare dalle dualità (3.126) e (3.124) la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg ottimale

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_{GN} \|\nabla u\|^{\theta}_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \qquad q = 1 + \frac{p}{2} \text{ o } q = 2(p-1).$$

Capitolo 4

Equazioni r-Laplaciane e costante ottima

In questo capitolo estenderemo, seppur brevemente, ciò che abbiamo fatto nel capitolo precedente. Ottimizzeremo la nostra disuguaglianza nel caso della norma del gradiente in L^r con l'indice r che rispetta le ormai note condizioni di Gagliardo-Nirenberg. Considerando nella disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg (1.4), e nell'associata uguaglianza (1.5), i parametri $j = 0$ e $m = 1$ otteniamo

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_{GN} \|\nabla u\|^{\alpha}_{L^r(\mathbb{R}^n)} \|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall \alpha \in [0,1], \quad \forall u \in D^{r,q}(\mathbb{R}^n), \tag{4.1}$$

$$\alpha = \frac{nr(p-q)}{p[nr - q(n-r)]} \qquad D^{r,q}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^q(\mathbb{R}^n) : \nabla u \in L^r(\mathbb{R}^n)\}. \tag{4.2}$$

Dalla relazione (4.2) possiamo ricavare le relazioni tra p e q. E quindi otteniamo

$$\begin{aligned} &n > 1, \quad 1 < r < n, \qquad && 1 \leq q < p < r^* = \frac{nr}{n-r}; \\ &n = 1, \qquad r > 1, && 1 \leq q < r < \infty. \end{aligned}$$

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, una maniera di ottenere la costante migliore è quella di trovare esplicitamente un elemento minimizzante u_∞ del problema variazionale

$$E : D^{r,q}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \qquad M_p = \{u \in D^{r,q}(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1\},$$

$$\inf \left\{ E(u) := \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^r \mathrm{d}x + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^q \mathrm{d}x : \quad u \in M_p \right\}. \tag{4.3}$$

Analogamente al caso $r = 2$, il problema precedente si riconduce alla soluzione dell'equazione di Eulero-Lagrange associata al problema (4.3), che in tal caso è una equazione r-Laplaciana

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{r-2}\nabla u) + |u|^{q-2}u = \lambda|u|^{p-2}u, \tag{4.4}$$

dove λ è il solito moltiplicatore di Lagrange associato al vincolo M_p. Alla stessa maniera del precedente capitolo, possiamo supporre che u_∞ sia non negativa, radiale, non crescente e infinitesima all'infinito. Grazie al teorema 6.0.32, possiamo asserire che u_∞ è l'unica con le proprietà precedenti che risolve (4.4). Allora, esiste una funzione non crescente $v : [0,\infty) \to [0,\infty)$ infinitesima all'infinito, per cui

$$u_\infty(x) = v(d), \qquad d = |x|. \tag{4.5}$$

A meno di riscalare u_∞ in questa maniera

$$\bar{u}_\infty(x) = \lambda^{\frac{1}{p-q}} u_\infty(\lambda^{\frac{q-r}{r(p-q)}} x), \tag{4.6}$$

possiamo assumere che u_∞ risolva l'equazione r-Laplaciana

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{r-2}\nabla u) + u^{q-1} = u^{p-1}.$$

Ciò implica che vale

$$\frac{d^{\bar{r}}}{\bar{r}} = \tilde{H}(v(d)) = \tilde{H}(u_\infty(x)), \tag{4.7}$$

dove $\tilde{H} = (v \circ g)^{-1}$, $g(t) = (\bar{r}t)^{\frac{1}{\bar{r}}}$ e r e $\bar{r}$ coniugati. Un altro argomento, che giustifica l'introduzione della funzione $\tilde{H}$, è il rapporto che intercorre tra la teoria del trasporto ottimo e la nostra disuguaglianza, infatti possiamo scrivere la seguente dualità

$$\sup\left\{-H^F_{\frac{|x|^{\bar{r}}}{\bar{r}}}(\rho_1) : \rho_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\right\} = \inf\{J_F(\rho_0) : \rho_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\}, \tag{4.8}$$

dove il funzionale su cui facciamo l'estremo inferiore è

$$J_F(\rho_0) = -H^{F+nP_F}(\rho_0) + \frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(F'(\rho_0(x)))|\mathrm{d}x,$$

e le funzioni ottimali in entrambi i problemi sono raggiunte da $\rho_0 = \rho_1 = \rho_\infty$ soluzione di

$$\nabla\left(F'(\rho_\infty(x)) + \frac{|x|^{\bar{r}}}{\bar{r}}\right) = 0. \tag{4.9}$$

In questo contesto assumeremo le seguenti condizioni

- $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ soddisfa $F(0) = 0$ e la funzione $x \mapsto x^n F(x^{-n})$ è convessa e non crescente;

- la funzione pressione è definita come $P_F(x) = xF'(x) - F(x)$;

- $H^F_{\frac{|x|^{\bar{r}}}{\bar{r}}}(\rho) = H_F(\rho) + H_{\frac{|x|^{\bar{r}}}{\bar{r}}}(\rho) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\rho(x))\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{\bar{r}}}{\bar{r}}\rho(x)\mathrm{d}x$;

- $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ rappresenta lo spazio delle densità di probabilità su $\mathbb{R}^n$ dotate di momento $\bar{r}$-esimo finito.

Quindi, come nel precedente capitolo, è sufficiente scegliere appropriatamente il cambio di variabile $\rho_0 = \psi(u)$, e la funzione F di modo che il funzionale $J_F(\rho_0) = J_F(\psi(u))$ sia del tipo $E(u)$ in (4.3). Una volta fatto ciò, la soluzione ρ_∞ dell'equazione alle derivate parziali (4.9) determinerà la soluzione dell'equazione (4.4) tramite la trasformazione $u_\infty = \psi^{-1}(\rho_\infty)$. In altre parole, u_∞ è soluzione di

$$F'(\psi(u_\infty)) + \frac{|x|^{\bar{r}}}{\bar{r}} = \gamma, \tag{4.10}$$

o equivalentemente

$$\frac{d^{\bar{r}}}{\bar{r}} = \frac{|x|^{\bar{r}}}{\bar{r}} = \gamma - F'(\psi(u_\infty) := \tilde{H}(u_\infty(x)), \tag{4.11}$$

dove γ è una costante. Appare chiaro che per ottenere un elemento minimizzante per il funzionale $J_F(\rho_0) = J_F(\psi(u)) = E(u)$ abbiamo bisogno della funzione $\tilde{H}$ che soddisfa (4.11) e (4.7). Notiamo anche che dopo aver trovato $\tilde{H}$, possiamo usare di nuovo (4.11) per trovare le appropriate funzioni ψ e F per collegare la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg con la teoria del trasporto ottimo tramite la dualità (4.8). Possiamo, come per il capitolo precedente, trovare l'equazione che $\tilde{H}$ deve soddisfare. Posto $G'(t) = \frac{|\tilde{H}'(t)|^{r-2}\tilde{H}'(t)}{r-1}$, allora esso soddisfa la seguente equazione differenziale ordinaria non lineare

$$r\left(\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right)G''(t) + (r-1)(t^{q-1} - t^{p-1})G'(t) - \frac{r(n-1)}{r-1}G''(t)\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{G'(\tau)} = n, \tag{4.12}$$

la cui soluzione G' determina esplicitamente un elemento minimizzante u_∞ per il problema (4.3). Anche in questo contesto si nota che per $n = 1$ l'equazione (4.12) diviene lineare e quindi possiamo ottenere esplicitamente le funzioni ottimali per ogni scelta di p, q e r. Enunciamo quindi il seguente teorema:

Teorema 4.0.5. *Siano n, r, q tali che*

$$1 < r < n, \qquad 1 \leq q < p < r^* = \frac{nr}{n-r}, \qquad se\ n > 1, \tag{4.13}$$

$$r > 1, \qquad 1 \leq q < r < \infty, \qquad se\ n = 1. \tag{4.14}$$

Assumiamo che il problema variazionale (4.3) *abbia elemento minimizzante u_∞; allora la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg* (4.1) *ammette costante ottima esplicitamente espressa da*

$$K_{GN} = \left[\frac{K(n,p,q,r)}{E(u_\infty)}\right]^{\frac{nr+pr-nq}{p[nr-q(n-r)]}},$$

dove

$$K(n,p,q,r) = \frac{\gamma+\delta}{(q\gamma)^{\frac{\gamma}{\gamma+\delta}}(r\delta)^{\frac{\delta}{\gamma+\delta}}}, \qquad \gamma = nr - p(n-r), \qquad \delta = n(p-q).$$

Inoltre, $u_{a,b}(x) = Cu_\infty(a(x-b))$ sono funzioni ottimali per la nostra disuguaglianza, per $C \neq 0$, $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}^n$.

4.1 Risultati in dimensione maggiore di 1

Estendiamo in questa sezione, senza dimostrare nulla, ciò che abbiamo fatto nella sezione 3.3.3 del precedente capitolo.

Teorema 4.1.1. *Supponiamo che n, p, q e r soddisfino* (4.13). *Sia $\tilde{H}$ una funzione C^2 su $(0, v(0))$ che soddisfa $\tilde{H}(v(d)) = \frac{d^{\bar{r}}}{\bar{r}}$ con r e $\bar{r}$ coniugati, dove v è una funzione C^2 non negativa, non crescente, soluzione di*

$$(r-1)|v'(d)|^{r-2}v''(d) + \frac{n-1}{d}|v'(d)|^{r-2}v'(d) - v^{q-1}(d) + v^{p-1}(d) = 0$$

con $v(d)$ e $v'(d)$ infinitesime all'infinito. Allora $\tilde{H}(t)$ soddisfa la seguente equazione differenziale ordinaria non lineare

$$r|\tilde{H}'(t)|^{r-2}\tilde{H}''(t)\left(\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right) + |\tilde{H}'(t)|^{r-2}\tilde{H}'(t)(t^{q-1} - t^{p-1}) + \\ - r(n-1)|\tilde{H}'(t)|^{r-2}\tilde{H}''(t)\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{|\tilde{H}'(\tau)|^{r-2}\tilde{H}'(\tau)} = n, \tag{4.15}$$

per ogni $t \in (0, v(0))$. *Perciò, se* G *è una funzione* C^2 *su* $(0, v(0))$ *per cui*

$$G'(t) = \frac{|\tilde{H}'(t)|^{r-2}\tilde{H}'(t)}{r-1}, \tag{4.16}$$

allora G' *risolve l'equazione differenziale ordinaria non lineare*

$$r\left(\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right)G''(t) + (r-1)(t^{q-1} - t^{p-1})G'(t) - \frac{r(n-1)}{r-1}G''(t)\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{G'(\tau)} = n. \tag{4.17}$$

Corollario 4.1.2. *Sotto le ipotesi del teorema* 4.1.1, *assumiamo che valga* $G'(t) = \pm(Ct)^{\frac{k}{k+1}}$ *con* $C, k > 0$. *Allora* G *risolve l'equazione differenziale ordinaria* (4.17) *se e solo se* $q = 1 + \frac{p}{\bar{r}}$ *oppure* $q = \bar{r}(p-1)$. *Perciò*

1. *se* $q = 1 + \frac{p}{\bar{r}}$, *allora*

$$\tilde{H}(t) = \frac{r}{p-r}\left(\frac{nr - p(n-r)}{p-r}\right)^{\frac{1}{r}-1} t^{\frac{r-p}{r}} - \gamma$$

è soluzione di (4.15) *per una certa costante* γ. *Allora la disuguaglianza ottimale di Gagliardo-Nirenberg vale*

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_{GN}\|\nabla u\|^{\theta}_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\theta}_{L^{1+\frac{p}{\bar{r}}}(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall u \in D^{r,q}(\mathbb{R}^n)$$

con $\theta = \frac{nr(p-q)}{p[nr-q(n-r)]}$, *la costante ottima esplicitamente data da* 4.0.5, *e le funzioni ottimali della forma* $u_{a,b}(x) = Cu_\infty(a(x-b))$ *dove*

$$u_\infty(x) = \frac{1}{(1+|x|^{\bar{r}})^{\frac{r}{p-r}}}$$

con $C > 0$, $a \neq 0$ *e* $b \in \mathbb{R}^n$ *arbitrari.*

2. *se* $q = \bar{r}(p-1)$, *allora*

$$\tilde{H}(t) = -\frac{r-1}{r-p}\left(\frac{(n-1)(r-p)+p(r-1)}{r-p}\right)^{\frac{1}{r}-1} t^{\frac{r-p}{r-1}} + \gamma$$

è soluzione di (4.15) *per una certa costante* γ. *Allora la disuguaglianza ottimale di Gagliardo-Nirenberg vale*

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq K_{GN}\|\nabla u\|^{\theta}_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\theta}_{L^{\bar{r}(p-1)}(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall u \in D^{r,q}(\mathbb{R}^n)$$

con $\theta = \frac{nr(p-q)}{p[nr-q(n-r)]}$, *la costante ottima esplicitamente data da* 4.0.5, *e le funzioni ottimali della forma* $u_{a,b}(x) = Cu_\infty(a(x-b))$ *dove*

$$u_\infty(x) = \frac{1}{(1+|x|^{\bar{r}})_+^{\frac{r-1}{r-p}}},$$

con $C > 0$, $a \neq 0$ *e* $b \in \mathbb{R}^n$ *arbitrari.*

4.2 Risultati in dimensione 1

Estendiamo anche in questa sezione, ciò che abbiamo fatto nella sezione 3.3.1 del precedente capitolo.

Teorema 4.2.1. *Supponiamo che n, p, q e r soddisfino* (4.14)*; allora*

$$G'(t) = \frac{1}{r\left|\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right|^{\frac{1}{r}}} \int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sign}\left(\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right)\left|\frac{t^q}{q} - \frac{t^p}{p}\right|^{\frac{1}{r}}}$$

è una soluzione dell'equazione differenziale ordinaria (4.17)*. Perciò, l'elemento minimizzante u_∞ del problema* (4.3) *può essere calcolato esplicitamente grazie a* (4.5)*,* (4.7)*,* (4.6) *e* (4.16)*, e il teorema* 4.0.5 *ci dà la costante ottima K_{GN} e le funzioni ottime $u_{a,b}(x) = Cu_\infty(a(x-b))$.*

Corollario 4.2.2. *Sia $n = 1$, $q = 1$ e $p = r = 2$, allora*

$$\tilde{H}(t) = 2\left(\arcsin\sqrt{\frac{2-t}{2}}\right)^2 \chi_{[t\geq 2]}(t) - 2\left(\mathrm{arcsinh}\sqrt{\frac{2-t}{2}}\right)^2 \chi_{[t>2]}(t)$$

è soluzione dell'equazione differenziale ordinaria (4.15)*. Allora la disuguaglianza ottimale di Nash*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^3 \leq (K_{GN})^6 \int_{\mathbb{R}} |u'(x)|^2 \mathrm{d}x \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x)| \mathrm{d}x\right)^4$$

è valida, con costante ottima K_{GN} calcolabile grazie al teorema 4.0.5*, e le funzioni ottimali sono date da $u_{a,b}(x) = Cu_\infty(a(x-b))$ dove*

$$u_\infty(x) = (1 + \cos|x|)\chi_{|x|\leq\pi}(x),$$

e $C \neq 0$, $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

Capitolo 5

Applicazioni alle PDE

In questo ultimo capitolo, utilizzeremo la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg, dimostrata nel capitolo 1, per affrontare lo studio di un'equazione alle derivate parziali parabolica non lineare, nello specifico l'equazione di Schrödinger non lineare (NLS). Il nostro approccio sarà quello di passare dalla (NLS) a un'equazione alle derivate parziali ellittica, nella quale impiegheremo il nostro teorema 1.0.4.

5.1 Strumenti preliminari

Avremo bisogno, come negli altri capitoli, di sviluppare degli strumenti preliminari, che serviranno nel corso della risoluzione della nostra (NLS).

5.1.1 Disuguaglianza di Pólya-Szegő

Il primo strumento di cui abbiamo bisogno è la disuguaglianza di Pólya-Szegő. Essa esprime il rapporto tra la norma p-esima del gradiente di una funzione e la stessa norma del gradiente del riordinamento decrescente della funzione stessa. Iniziamo quindi con la seguente definizione:

Definizione 5.1.1. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile. Diremo che è nulla all'infinito se vale la seguente condizione

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > t\}) < \infty, \qquad \forall t > 0.$$

Definizione 5.1.2. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, definiamo il suo riordinamento simmetrico il seguente insieme

$$A^\star = \{x \in \mathbb{R}^n : \omega_n |x|^n < \mu(A)\},$$

dove ω_n rappresenta la misura $(n-1)$-dimensionale della sfera in $\mathbb{R}^n$ e μ misura di Lebesgue. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ non negativa nulla all'infinito. Definiamo poi $u^\star$ il riordinamento simmetrico decrescente di u:

$$u^\star(x) = \int_0^\infty \chi_{\{u(x)>t\}^\star}(x)\mathrm{d}t.$$

Osservazione 5.1.3. Il riordinamento simmetrico decrescente $u^\star$ è semicontinuo inferiormente, ed è univocamente determinato dalla funzione di distribuzione $m(t,u) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) > t\})$. Inoltre u e $u^\star$ sono equimisurabili nel senso che vale $m(t,u) = m(t,u^\star)$ per ogni $t > 0$.

Dopo aver definito i riordinamenti decrescenti, definiremo ora il riordinamento polare di una funzione, che chiameremo semplicemente polarizzata, ne esamineremo il rapporto col primo ordinamento definito, e dimostreremo una sorta di disuguaglianza di Pólya-Szegő sulle polarizzate, dalla quale ricaveremo la nostra versione.

Definizione 5.1.4. Siano $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile e $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ un iperpiano affine non contenente l'origine. Posti rispettivamente X_+ il semispazio contenente l'origine individuato da X_0, X_- quello rimanente, e σ la riflessione che permuta i due semispazi, definiamo u^σ, e la chiameremo polarizzazione della funzione u, la seguente funzione

$$u^\sigma(x) = \begin{cases} \max\{u(x), u(\sigma x)\} & x \in X_+, \\ \min\{u(x), u(\sigma x)\} & x \in X_-, \\ u(x) & x \in X_0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Lemma 5.1.5. *Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua. Allora, per ogni riflessione σ, la polarizzazione u^σ è uniformemente continua con lo stesso modulo di continuità.*

Dimostrazione. Per ipotesi sappiamo che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ per cui per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |u(x) - u(y)| < \epsilon.$$

Vogliamo dimostrare che vale

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |u^\sigma(x) - u^\sigma(y)| < \epsilon.$$

Sia allora $\epsilon > 0$ e consideriamo due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ per cui $|x - y| < \delta$. Se $x, y \in X_+$, allora

$$|u^\sigma(x) - u^\sigma(y)| = |\max\{u(x), u(\sigma x)\} - \max\{u(y), u(\sigma y)\}| \leq$$

$$\leq \max\{|u(x)-u(y)|, |u(\sigma x)-u(\sigma y)|\} < \epsilon$$

perché σ preserva le distanze e quindi $|\sigma x - \sigma y| = |x-y| < \delta$. Se invece $x, y \in X_-$ possiamo rimpiazzare il massimo con il minimo nel ragionamento precedente ed ottenere lo stesso risultato. Se i due punti, infine, stanno da parti opposte, allora $|\sigma x - y| \leq |x-y|$, $|x-\sigma y| \leq |x-y|$, mentre $|\sigma x - \sigma y| = |x-y|$; dunque se $|x-y| < \delta$ abbiamo

$$|u^\sigma(x) - u^\sigma(y)| \leq \max\{|u(x)-u(y)|, |u(\sigma x)-u(y)|, |u(x)-u(\sigma y)|, |u(\sigma x)-u(\sigma y)|\} < \epsilon.$$

□

Proposizione 5.1.6. *Siano $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ non negative misurabili; allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} u^\sigma(x)v^\sigma(x)\mathrm{d}x \tag{5.2}$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $(u(x)-u(\sigma x))(v(x)-v(\sigma x)) \geq 0$ q.o. in $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Dimostriamo la (5.2) per le funzioni caratteristiche; poi la tesi si estende per linearità alle funzioni caratteristiche e infine con il teorema di Beppo Levi 6.0.22 otteniamo il caso generale. Nella dimostrazione, percorreremo i seguenti step:

- $(\chi_A)^\sigma = \chi_{A^\sigma}$, ove $A^\sigma = [(A \cup \sigma(A)) \cap X_+] \cup [A \cap X_0] \cup [(A \cap \sigma(A)) \cap X_-]$;
- $\mu(A^\sigma \cap B^\sigma) \geq \mu((A \cap B)^\sigma)$ per tutti gli insiemi misurabili $A, B \subset \mathbb{R}^n$;
- $\mu(A^\sigma) = \mu(A)$ per ogni insieme misurabile $A \subset \mathbb{R}^n$;
- $\mu(A^\sigma \cap B^\sigma) \geq \mu(A \cap B)$ per tutti gli insiemi misurabili $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

Mostriamo, come prima cosa, che vale $(\chi_A)^\sigma(x) = \chi_{A^\sigma}(x)$. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile; allora per definizione abbiamo

$$(\chi_A)^\sigma(x) = \begin{cases} \max\{\chi_A(x), \chi_A(\sigma x)\} & x \in X_+ \\ \min\{\chi_A(x), \chi_A(\sigma x)\} & x \in X_+ \\ \chi_A(x) & x \in X_0 \end{cases}$$

quindi $(\chi_A)^\sigma(x) = 1 \Leftrightarrow x \in (A \cap X_+) \cup (\sigma A \cap X_+) \cup (A \cap X_0) \cup (A \cap \sigma A \cap X_-)$. Quindi effettuando le operazioni di unione otteniamo che l'asserzione precedente è valida se e solo se $x \in [(A \cup \sigma A) \cap X_+] \cup [A \cap X_0] \cup [(A \cap \sigma A) \cap X_-] = A^\sigma$. Passiamo al secondo step della nostra dimostrazione. Questo step mostra la tesi per le funzioni caratteristiche, infatti

$$\mu(A^\sigma \cap B^\sigma) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A^\sigma \cap B^\sigma}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A^\sigma}\chi_{B^\sigma}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} (\chi_A)^\sigma(\chi_B)^\sigma(x)\mathrm{d}x$$

$$\mu(A \cap B) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)\chi_B(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A\cap B}(x)\mathrm{d}x.$$

Siano $A, B \subset \mathbb{R}^n$ misurabili. Notiamo che valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}
(A\cap B)^\sigma \cap X_+ &= [(A\cap B) \cup (\sigma A \cap \sigma B)] \cap X_+ = \\
&= [(A\cap B) \cup \sigma A] \cap [(A \cap B) \cup \sigma B] \cap X_+ = \\
&= (A \cup \sigma A) \cap (B \cup \sigma A) \cap (A \cup \sigma B) \cap (B \cup \sigma B) \cap X_+ = \\
&= (A^\sigma \cap X_+) \cap (B^\sigma \cap X_+) \cap (B \cup \sigma A) \cap (A \cup \sigma B) = \\
&= (A^\sigma \cap B^\sigma) \cap X_+ \cap [(B \cup \sigma A) \cap (A \cup \sigma B)],
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
(A\cap B)^\sigma \cap X_- &= (A \cap B) \cap (\sigma A \cap \sigma B) \cap X_- = \\
&= (A \cap \sigma A) \cap (B \cap \sigma B) \cap X_- = \\
&= (A^\sigma \cap X_-) \cap (B^\sigma \cap X_-) = A^\sigma \cap B^\sigma \cap X_-.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Mettendo insieme (5.3) e (5.4) ricaviamo $\mu(A^\sigma \cap B^\sigma \cap X_+) \geq \mu((A\cap B)^\sigma \cap X_+)$ e $\mu(A^\sigma \cap B^\sigma \cap X_-) = \mu((A\cap B)^\sigma \cap X_-)$, quindi, dato che $\mu(X_0) = 0$, otteniamo

$$\mu(A^\sigma \cap B^\sigma) = \mu(A^\sigma \cap B^\sigma \cap X_+) + \mu(A^\sigma \cap B^\sigma \cap X_-) \geq$$

$$\geq \mu((A\cap B)^\sigma \cap X_+) + \mu((A \cap B)^\sigma \cap X_-) = \mu((A\cap B)^\sigma)$$

e questo conclude il secondo step. Sia ora $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, e dimostriamo $\mu(A^\sigma) = \mu(A)$. Notiamo che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\mu(A \cap X_+) = \mu(\sigma A \cap X_-) \tag{5.5}$$

$$\mu(A \cap \sigma A \cap X_+) = \mu(A \cap \sigma A \cap X_-), \tag{5.6}$$

dove la prima è valida per costruzione e la seconda perché $A\cap\sigma A$ è un insieme simmetrico rispetto a X_0; quindi abbiamo

$$\begin{aligned}
\mu(A^\sigma) &= \mu(A^\sigma \cap X_+) + \mu(A^\sigma \cap X_-) = \\
&= \mu((A \cup \sigma A) \cap X_+) + \mu(A \cap \sigma A \cap X_-) = \\
&= \mu((A \cap X_+) \cup (\sigma A \cap X_+)) + \mu(A \cap \sigma A \cap X_-) = \\
&= \mu(A \cap X_+) + \mu(\sigma A \cap X_+) - \mu(A \cap \sigma A \cap X_+) + \mu(A \cap \sigma A \cap X_-) = \\
&= \mu(A \cap X_+) + \mu(A \cap X_-) = \mu(A),
\end{aligned}$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo utilizzato (5.5) e (5.6). L'ultimo passo è una conseguenza dei due passi precedenti. Questo completa la prima parte della tesi.

Mostriamo ora la seconda parte. Supponiamo valga

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u(x)v(x) - u^\sigma(x)v^\sigma(x))\mathrm{d}x = 0.$$

Allora

$$\int_{X_-}(u(x)v(x) - \min\{u(x), u(\sigma x)\}\min\{v(x), v(\sigma x)\})\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{X_+}(\max\{u(x), u(\sigma x)\}\max\{v(x), v(\sigma x)\} - u(x)v(x))\mathrm{d}x. \tag{5.7}$$

Supponiamo per assurdo che $U = \{x : (u(x) - u(\sigma x))(v(x) - v(\sigma x)) < 0\}$ abbia misura positiva: si noti che $U = \sigma(U)$. Nel caso $u(x) > u(\sigma x)$ e $v(x) < v(\sigma x)$ dalla (5.7) avremmo

$$\int_{X_-\cap U}(u(x)v(x) - u(\sigma x)v(x))\mathrm{d}x = \int_{X_+\cap U}(u(x)v(\sigma x) - u(x)v(x))\mathrm{d}x,$$

da cui ricaveremmo

$$\int_{X_+\cap U}(u(\sigma x)v(\sigma x) - u(x)v(\sigma x))\mathrm{d}x = \int_{X_+\cap U}(u(x)v(\sigma x) - u(x)v(x))\mathrm{d}x,$$

che equivale a

$$\int_{X_+\cap U}(v(\sigma x)[u(\sigma x) - u(x)] + u(x)[v(x) - v(\sigma x)])\mathrm{d}x = 0.$$

Per le supposizioni fatte l'integrando è una funzione non positiva, che pertanto deve essere nulla quasi ovunque; quindi se $x \in U \cap X_+$

$$0 < \frac{v(\sigma x)}{u(x)} = \frac{v(\sigma x) - v(x)}{u(\sigma x) - u(x)} < 0,$$

che è assurdo. Il caso $u(x) < u(\sigma x)$ e $v(x) > v(\sigma)$ si fa alla stessa maniera. Ciò prova che $[u(x) - u(\sigma x)][v(x) - v(\sigma x)] \geq 0$. Viceversa, supponiamo valga $(u(x) - u(\sigma x))(v(x) - v(\sigma x)) \geq 0$ q.o., allora nel caso $u(x) \leq u(\sigma x)$ e $v(x) \leq v(\sigma x)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u^\sigma(x)v^\sigma(x)\mathrm{d}x \quad &= \int_{X_+} u^\sigma(x)v^\sigma(x)\mathrm{d}x + \int_{X_-} u^\sigma(x)v^\sigma(x)\mathrm{d}x = \\
&= \int_{X_+} u(\sigma x)v(\sigma x)\mathrm{d}x + \int_{X_-} u(x)v(x)\mathrm{d}x \leq \\
&\leq \int_{X_+} u(\sigma x)v(\sigma x)\mathrm{d}x + \int_{X_-} u(\sigma x)v(\sigma x)\mathrm{d}x = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(\sigma x)v(\sigma x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Nel caso $u(x) \geq u(\sigma x)$ e $v(x) \geq v(\sigma x)$ invece ricaviamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u^\sigma(x)v^\sigma(x)\mathrm{d}x &= \int_{X_+} u^\sigma(x)v^\sigma(x)\mathrm{d}x + \int_{X_-} u^\sigma(x)v^\sigma(x)\mathrm{d}x = \\
&= \int_{X_-} u(\sigma x)v(\sigma x)\mathrm{d}x + \int_{X_+} u(x)v(x)\mathrm{d}x \leq \\
&\leq \int_{X_+} u(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_{X_-} u(x)v(x)\mathrm{d}x = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

Lemma 5.1.7. *Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile che si annulla all'infinito. Allora*

$$u = u^\star \iff u = u^\sigma \qquad \forall \sigma$$

$$u = u^\star \circ \tau \text{ per qualche traslazione } \tau \iff u = u^\sigma \text{ o } u = u^\sigma \circ \sigma \qquad \forall \sigma.$$

Dimostrazione. In entrambi i casi, le implicazioni $\Rightarrow$ sono semplici. Per dimostrare l'implicazione inversa nel primo caso, supponiamo per assurdo che u non sia radialmente decrescente e fissiamo due punti x_1, x_2 con $|x_1| < |x_2|$ ma $|u(x_1)| < |u(x_2)|$. Sia σ la riflessione che mappa x_1 su x_2, e lascia invariato l'iperpiano X. Allora $x_1 \in X_+$ che contiene l'origine e $x_2 \in X_-$. Dalla definizione segue che $u^\sigma(x_1) = u(x_2)$ e $u^\sigma(x_2) = u(x_1)$, mostrando che $u^\sigma \neq u$, ma questo è assurdo. Per il secondo caso, assumiamo che u sia limitata e integrabile (grazie all'approssimazione con fat layer $f_\epsilon = \min\{\epsilon^{-1}, [f-\epsilon]_+\}$). Dopo un'opportuna traslazione, il suo centro di massa starà nell'origine. Dato che il centro di massa di u^σ sta in X_+, concludiamo che $u^\sigma = u$ per ogni σ. Utilizziamo ora la prima parte della tesi per ottenere la seconda. □

Lemma 5.1.8. *Supponiamo che $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sia non negativa, continua e nulla all'infinito, e sia*

$$\mathrm{Pol}_u = \{u^{\sigma_1,\dots,\sigma_k} : k \geq 0, \sigma_i \text{ riflessioni}\}$$

ossia l'insieme di tutte le funzioni ottenibili con una successione finita di polarizzazioni di u. Allora esiste una successione $\{u_k\} \subseteq \mathrm{Pol}_u$ per cui

$$u_k \xrightarrow{k\to\infty} u^\star \text{ uniformemente.} \tag{5.8}$$

Dimostrazione. Sia H una funzione strettamente decrescente e limitata su $\mathbb{R}_+$ con $H(t) \to 0$ quando $t \to \infty$; definiamo il funzionale ausiliario

$$I(v) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x)H(|x|)\mathrm{d}x, \qquad v \in \mathrm{Pol}_u.$$

Grazie al lemma 5.1.5 e al teorema di Ascoli-Arzelà, Pol_u è relativamente compatto nello spazio delle funzioni continue che si annullano all'infinito, quindi I assume il suo massimo in una certa funzione $g \in \overline{\mathrm{Pol}_u}$. Mostreremo che $g = u^\star$. Sia $\{u_k\} \subset \mathrm{Pol}_u$ una successione che converge uniformemente a g. Anche ogni polarizzata g^σ sta nella chiusura di Pol_u perché u_k^σ converge uniformemente a g^σ, e quindi $I(g) \geq I(g^\sigma)$ per la massimalità di g. D'altro canto, per la proposizione 5.1.6 vale $I(g) \leq I(g^\sigma)$, e quindi $I(g) = I(g^\sigma)$. La proposizione 5.1.6 inoltre implica che $(g(x) - g(\sigma x))(H(|x|) - H(|\sigma x|)) \geq 0$, che vuol dire $g(x) = g^\sigma$. Dato che x e σ erano arbitrari, possiamo usare il lemma 5.1.7 per vedere che g è radiale decrescente. Dato che g è equimisurabile a u (essendo limite uniforme di tali funzioni), concludiamo che $g = u^\star$, dimostrando il lemma. □

Lemma 5.1.9. *Siano $p \in [1, \infty]$ e sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Detta σ una riflessione di polarizzazione, allora $|\nabla u^\sigma|$ e $|\nabla u|$ sono equimisurabili. In particolare,*

$$\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|\nabla u^\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Dimostrazione. Dal momento che il massimo o il minimo di funzioni in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ è ancora in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, la polarizzata u^σ sta in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Grazie a un classico argomento di densità, è sufficiente calcolare il gradiente per funzioni lineari a tratti lontano dalle singolarità. Se $x \in X_+$, otteniamo per $u(x) \geq u(\sigma x)$

$$\nabla u^\sigma(x) = \nabla u(x), \qquad \nabla u^\sigma(\sigma x) = \nabla u(\sigma x),$$

e per $u(x) \leq u(\sigma x)$

$$\nabla u^\sigma(x) = \sigma \nabla u(\sigma x), \qquad \nabla u^\sigma(\sigma x) = \sigma \nabla u(x).$$

Se $x \in X_-$, otteniamo per $u(x) \geq u(\sigma x)$

$$\nabla u^\sigma(x) = \sigma \nabla u(\sigma x), \qquad \nabla u^\sigma(\sigma x) = \sigma \nabla u(x),$$

e per $u(x) \leq u(\sigma x)$

$$\nabla u^\sigma(x) = \nabla u(x), \qquad \nabla u^\sigma(\sigma x) = \nabla u(\sigma x).$$

Quindi, posto $U_+ = \{x : u(x) \geq u(\sigma x)\}$, $U_- = \{x : u(x) \leq u(\sigma x)\}$ e $X_\cdot^\cdot = X_\cdot \cap U_\cdot$, ricaviamo

$$\|\nabla u^\sigma\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^\sigma(x)|^p \mathrm{d}x = \int_{X_+} |\nabla u^\sigma(x)|^p \mathrm{d}x + \int_{X_-} |\nabla u^\sigma(x)|^p \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{X_+^+} |\nabla u(x)|^p \mathrm{d}x + \int_{X_+^-} |\nabla u(\sigma x)|^p \mathrm{d}x + \int_{X_-^+} |\nabla u(\sigma x)|^p \mathrm{d}x + \int_{X_-^-} |\nabla u(x)|^p \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{X_+^+} |\nabla u(x)|^p \mathrm{d}x + \int_{X_-^+} |\nabla u(y)|^p \mathrm{d}y + \int_{X_+^-} |\nabla u(y)|^p \mathrm{d}y + \int_{X_-^-} |\nabla u(x)|^p \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p \mathrm{d}x = \|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Per concludere la sezione, visti i risultati ottenuti fino ad ora, enunciamo e dimostriamo la disuguaglianza di Pólya-Szegő.

Teorema 5.1.10 (Disuguaglianza di Pólya-Szegő)**.** *Sia* $p \in [1, \infty]$ *e sia* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$*. Allora* $u^\star \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\|\nabla u^\star\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Dimostrazione. Per $p = \infty$, u è lipschitziana, e $\|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ è la sua costante di Lipschitz. Dal momento che la polarizzazione per il lemma 5.1.5 preserva i moduli di continuità, $u^\star$ è ancora lipschitziana con la stessa costante, e in questo caso il teorema è provato. Sia ora $p \in [1, \infty)$. Allora per il lemma 5.1.8, esiste $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Pol}_u$ tale che

$$u_k \to u^\star \text{ uniformemente}, \quad \|u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|u^\star\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sia $B = B(0, r)$ la palla di centro 0 e raggio r; allora esiste una sottosuccessione $\{u_{k_h}\} \subset \{u_k\}$ per cui

$$u_k \to u^\star \text{ in } L^p(B), \qquad \nabla u_{k_h} \rightharpoonup v \text{ in } L^p(B),$$

e dunque per unicità del limite $v = \nabla u^\star$ in B q.o.. Per la semicontinuità inferiore della norma otteniamo

$$\|\nabla u^\star\|_{L^p(B)} \leq \liminf_{k\to\infty} \|\nabla u_k\|_{L^p(B)} = \|\nabla u\|_{L^p(B)}.$$

Mandando $r \to \infty$ otteniamo la tesi. □

5.1.2 Compattezza e disuguaglianza di Strauss

In questa sottosezione mostreremo, grazie al lemma di Strauss, un'interessante proprietà delle funzioni in $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$, ossia le funzioni radiali in $H^1(\mathbb{R}^n)$, e grazie a un lemma di compattezza determineremo quando tale spazio si immerge con compattezza in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per qualche p (teorema di Lions).

Lemma 5.1.11 (Lemma di Strauss). *Sia $n \geq 2$ e $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$. Allora esiste una funzione $U(x)$ continua fuori dall'origine tale che*

- *$U(x) = u(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$;*
- *esiste $\alpha_n > 0$ per cui per ogni $|x| \geq \alpha_n$ valga*

$$|U(x)| \leq C_n |x|^{\frac{1-n}{2}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Dimostrazione. Sia $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e sia $m = \frac{n-1}{2}$. Consideriamo $n \geq 3$, allora

$$-\frac{d}{dr}(r^{2m}u^2(r)) = -2r^m u(r)[mr^{m-1}u(r) + r^m \frac{du}{dr}(r)] = -2r^m u(r)\frac{d}{dr}(r^m u(r)) \leq$$

$$\leq \left[\frac{d}{dr}(r^m u(r))\right]^2 + (r^m u(r))^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{du}{dr}(r)\right)^2 + u^2(r)\right] r^{2m} + mr^{2m-1}u(r)\left[m\frac{u(r)}{r} + 2\frac{du}{dr}(r)\right] =$$

$$= \left[\left(\frac{du}{dr}(r)\right)^2 + u^2(r)\right] r^{2m} + mr^{2m-1}u(r)\left[(2m-1)\frac{u(r)}{r} + 2\frac{du}{dr}(r) - (m-1)\frac{u(r)}{r}\right].$$

Notando che

$$(2m-1)r^{2m-2}u^2(r) + 2r^{2m-1}u(r) = \frac{d}{dr}(r^{2m-1}u^2(r)),$$

otteniamo

$$-\frac{d}{dr}(r^{2m}u^2(r)) \leq \left[\left(\frac{du}{dr}(r)\right)^2 + u^2(r)\right] r^{2m} + m\frac{d}{dr}(r^{2m-1}u^2(r)) - m(m-1)r^{2m-2}u^2(r) \leq$$

$$\leq \left[\left(\frac{du}{dr}(r)\right)^2 + u^2(r)\right] r^{2m} + m\frac{d}{dr}(r^{2m-1}u^2(r))$$

Integrando i membri più estremi di questa catena di disuguaglianze su $[r, \infty]$ otteniamo

$$r^{n-1}u^2(r) \leq \int_r^\infty \left[\left(\frac{du}{d\rho}(\rho)\right)^2 + u^2(\rho)\right] \rho^{n-1}\mathrm{d}\rho - mr^{n-2}u^2(r),$$

da cui portando il secondo addendo di destra nel membro sinistro

$$r^{n-1}u^2(r) \leq \left(1 + \frac{m}{r}\right) r^{n-1}u^2(r) \leq \int_r^\infty \left[\left(\frac{du}{d\rho}(\rho)\right)^2 + u^2(\rho)\right] \rho^{n-1}\mathrm{d}\rho \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \left[\left(\frac{du}{d\rho}(\rho) \right)^2 + u^2(\rho) \right] \rho^{n-1} \mathrm{d}\rho \leq C_n \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Pertanto

$$|U(x)| = |u(|x|)| \leq C_n |x|^{\frac{1-n}{2}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Trattiamo ora il caso $n = 2$. Ripetendo lo stesso conto fatto all'inizio otteniamo

$$-\frac{d}{dr}(ru^2(r)) = -\frac{d}{dr}((r^{\frac{1}{2}}u(r))^2) = -2r^{\frac{1}{2}}u(r)\frac{d}{dr}(r^{\frac{1}{2}}u(r)) \leq$$

$$\leq \left[\frac{d}{dr}(r^{\frac{1}{2}}u(r)) \right]^2 + (r^{\frac{1}{2}}u(r))^2 = r \left[\left(\frac{du}{dr}(r) \right)^2 + u^2(r) \right] + \frac{1}{2}\frac{d}{dr}(u^2(r)) + \frac{u^2(r)}{4r},$$

da cui, integrando i membri più estremi di questa catena di disuguaglianze su $[r, \infty]$, otteniamo

$$ru^2(r) \leq \int_r^\infty \left[\left(\frac{du}{d\rho}(\rho) \right)^2 + u^2(\rho) \right] \rho \mathrm{d}\rho - \frac{1}{2}u^2(r) + \int_r^\infty \frac{u^2(\rho)}{4\rho} \mathrm{d}\rho.$$

Grazie all'ultima disuguaglianza possiamo ricavare

$$ru^2(r) \leq \left(r + \frac{1}{2} \right) u^2(r) \leq \int_r^\infty \left[\left(\frac{du}{d\rho}(\rho) \right)^2 + u^2(\rho) \right] \rho \mathrm{d}\rho + \int_r^\infty \frac{u^2(\rho)}{4\rho} \mathrm{d}\rho.$$

Consideriamo $r \geq 1$ (ossia $\rho \geq r \geq 1$); allora

$$ru^2(r) \leq \int_r^\infty \left[\left(\frac{du}{d\rho}(\rho) \right)^2 + u^2(\rho) \right] \rho \mathrm{d}\rho + \int_r^\infty \frac{u^2(\rho)}{4\rho} \mathrm{d}\rho \leq$$

$$\leq \frac{5}{4} \int_r^\infty \left[\left(\frac{du}{d\rho}(\rho) \right)^2 + u^2(\rho) \right] \rho \mathrm{d}\rho \leq \frac{5}{4} \int_0^\infty \left[\left(\frac{du}{d\rho}(\rho) \right)^2 + u^2(\rho) \right] \rho \mathrm{d}\rho =$$

$$= \frac{5}{8\pi} \int_{\partial B(0,1)} \int_0^\infty \left[\left(\frac{du}{d\rho}(\rho) \right)^2 + u^2(\rho) \right] \rho \mathrm{d}\rho = \frac{5}{8\pi} \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)},$$

da cui si ottiene la tesi

$$|U(x)| = |u(|x|)| \leq \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{\pi}} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}}{\sqrt{|x|}}.$$

□

Proposizione 5.1.12 (Teorema di compattezza di Strauss)**.** *Consideriamo due funzioni continue $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfano*

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{P(s)}{Q(s)} = 0. \tag{5.9}$$

Sia $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili definite su $\mathbb{R}^n$ a valori reali per cui valgano

$$\sup_k \int_{\mathbb{R}^n} |Q(u_k(x))| \mathrm{d}x < \infty,$$

$$P(u_k(x)) \xrightarrow{k\to\infty} v(x) \text{ q.o. in } \mathbb{R}^n.$$

Allora per ogni insieme misurabile limitato B si ha

$$\int_B |P(u_k(x)) - v(x)| \mathrm{d}x \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Se assumiamo le seguenti ipotesi aggiuntive

1. $\lim_{s\to 0} \frac{P(s)}{Q(s)} = 0$,
2. $\lim_{|x|\to\infty} u_k(x) = 0$ *uniformemente rispetto ad k,*

allora $\{P(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a v in $L^1(\mathbb{R}^n)$ per $k \to \infty$.

Dimostrazione. Sia $M = \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} |Q(u_k(x))| \mathrm{d}x$. Poiché $\lim_{s\to\infty} \frac{P(s)}{Q(s)} = 0$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $H_\epsilon > 0$ tale che

$$|P(s)| < \epsilon |Q(s)| \qquad \forall |s| \geq H_\epsilon.$$

Quindi

$$|P(u_k(x))| \leq \begin{cases} \epsilon |Q(u_k(x))| & \text{se } |u_k(x)| \geq H_\epsilon \\ \sup_{|y|\leq H_\epsilon} |P(y)| =: c_\epsilon & \text{se } |u_k(x)| \leq H_\epsilon. \end{cases}$$

Dunque, poiché $P(u_k(x)) \to v(x)$ q.o. dal lemma di Fatou 6.0.20 segue

$$\int_B |v(x)| \mathrm{d}x \leq \liminf_{k\to\infty} \int_B |P(u_k(x))| \mathrm{d}x \leq c_\epsilon \mu(B) + \epsilon M$$

per ogni $B \subset \mathbb{R}^n$ limitato e misurabile. In particolare, $\{P(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(B)$ e $v \in L^1(B)$. Proviamo che $P(u_k) \to v$ in misura su $L^1(B)$.
Per il teorema di Egorov 6.0.37, per ogni $\delta > 0$ esiste $E_\delta \subset B$, misurabile, tale che

$$\mu(E_\delta) < \delta, \qquad P(u_k) \to v \text{ uniformemente in } B \setminus E_\delta.$$

Allora, fissato $\eta > 0$, e detto $\tilde{P}_k(x) = |P(u_k(x)) - v(x)|$, scriviamo

$$\mu(\{x \in B : \tilde{P}_k(x) > \eta\}) = \mu(\{x \in E_\delta : \tilde{P}_k(x) > \eta\}) + \mu(\{x \in B \setminus E_\delta : \tilde{P}_k(x) > \eta\});$$

il secondo insieme però è definitivamente vuoto: infatti, scelto $\epsilon < \eta$, abbiamo

$$|P(u_k(x)) - v(x)| < \epsilon \qquad \forall k \geq k_{\epsilon,\delta}, \quad \forall x \in B \setminus E_\delta,$$

dunque se $k \geq k_{\epsilon,\delta}$ in $B \setminus E_\delta$ non abbiamo mai $\tilde{P}_k(x) > \eta$. Ne segue

$$\mu(\{x \in B : \tilde{P}_k(x) > \eta\}) = \mu(\{x \in E_\delta : \tilde{P}_k(x) > \eta\}) < \delta$$

per ogni $k \geq k_{\epsilon,\delta}$. Cioè, per ogni $\delta > 0$ abbiamo ottenuto che vale definitivamente $\mu(\{x \in B : \tilde{P}_k(x) > \eta\}) < \delta$, ossia $P(u_k) \to v$ in misura.
Proviamo ora che $\{P(u_k)\}$ è uniformemente integrabile in $L^1(B)$. Per ogni $j \in \mathbb{N}$, poniamo

$$\varphi(j) = \inf \left\{ R > 0 : \sup_{|y| \leq R} |P(y)| > j \right\}.$$

Osserviamo che $\varphi(j)$ è monotona crescente; proviamo che $\varphi(j) \to \infty$ per $j \to \infty$. Se fosse $\varphi(j) \leq N$ per ogni $j \in \mathbb{N}$, per ogni $\epsilon \in]0,1]$ troveremmo $R_{\epsilon,j} \in [\varphi(j), \varphi(j) + \epsilon]$ tale che $\sup_{|y| \leq R_{\epsilon,j}} |P(y)| > j$. Ma allora, essendo $R_{\epsilon,j} \leq N + 1$ per ogni j, avremmo

$$\sup_{|y| \leq N+1} |P(y)| \geq \sup_{|y| \leq R_{\epsilon,j}} |P(y)| > j \qquad \forall j \in \mathbb{N},$$

ossia $\sup_{|y| \leq N+1} |P(y)| = \infty$, il che è assurdo perché P è continua su $\mathbb{R}^n$. Dunque $\varphi(j) \to \infty$ per $j \to \infty$. Dato che

$$B_1 =: \{x \in B : |P(u_k(x))| > j\} \subseteq \{x \in B : |u_k(x)| \leq \varphi(j)\} =: B_2,$$

abbiamo

$$\int_{B_1} |P(u_k(x))| \mathrm{d}x \leq \int_{B_2} |P(u_k(x))| \mathrm{d}x \leq \epsilon \int_B |Q(u_k(x))| \mathrm{d}x \leq \epsilon M.$$

Sia adesso, $\sigma > 0$ e scegliamo $\delta > 0$ (vedremo quanto piccolo). Prendiamo $\epsilon > 0$, tale che $\epsilon M < \frac{\sigma}{2}$, fissiamo $j_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi(j_\epsilon) \geq H_\epsilon$, e consideriamo $E \subseteq B$, misurabile, con $\mu(E) < \delta$. Posto $E_\epsilon = \{x \in E : |P(u_k(x))| > j_\epsilon\}$, otteniamo

$$\int_E |P(u_k(x))| \mathrm{d}x = \int_{E_\epsilon} |P(u_k(x))| \mathrm{d}x + \int_{E \setminus E_\epsilon} |P(u_k(x))| \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \int_{\{x\in E:|u_k(x)|\geq\varphi(j_\epsilon)\}} |P(u_k(x))|\mathrm{d}x + j_\epsilon\mu(E) \leq \epsilon M + j_\epsilon\delta.$$

Dunque se $\delta < \frac{\sigma}{2j_\epsilon}$ abbiamo per $\mu(E) < \delta$

$$\int_E |P(u_k(x))|\mathrm{d}x \leq \epsilon M + j_\epsilon\delta < \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ciò prova l'uniforme integrabilità.
Si conclude che esiste $w \in L^1(B)$ tale che $P(u_k) \to w$ in $L^1(B)$. Ma allora per una sottosuccessione abbiamo $P(u_{k_h}(x)) \to w(x)$ q.o., da cui (essendo $P(u_k(x)) \to v(x)$ q.o.) $w = v$ q.o. in B, e pertanto $P(u_k) \to v$ in $L^1(B)$.
Aggiungiamo le ipotesi

$$\lim_{s\to 0} \frac{P(s)}{Q(s)} = 0, \quad u_k(x) \to 0 \text{ per } |x| \to \infty \text{ uniformemente in } k.$$

Dunque, dato $\epsilon > 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} &|P(s)| \leq \epsilon|Q(s)| && \forall|s| \geq H_\epsilon \text{ e } \forall|s| \leq \delta_\epsilon \\ &|u_k(x)| < \delta_\epsilon && \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall|x| \geq H_\epsilon. \end{aligned}$$

Allora, posto $B_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq H_\epsilon\}$, e fissato $\sigma > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P(u_k(x))-v(x)|\mathrm{d}x = \int_{B_\epsilon} |P(u_k(x))-v(x)|\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\epsilon} |P(u_k(x))-v(x)|\mathrm{d}x.$$

Il primo termine è minore di σ per $k \geq k_\sigma$, per la prima parte già dimostrata. Per il secondo termine abbiamo, scelto ϵ tale che $\epsilon M < \frac{\sigma}{2}$,

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\epsilon} |v(x)|\mathrm{d}x \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\epsilon} |P(u_k(x))|\mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \epsilon \limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\epsilon} |Q(u_k(x))|\mathrm{d}x \leq \epsilon M < \frac{\sigma}{2},$$

e dunque $\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\epsilon} |P(u_k(x)) - v(x)|\mathrm{d}x \leq 2\frac{\sigma}{2} = \sigma$ per ogni $k \geq k_\sigma$. Perciò $P(u_k) \to v$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$. □

Teorema 5.1.13. *Sia $n > 2$; allora l'iniezione $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ è compatta per ogni $2 < p < 2^*$.*

Dimostrazione. L'inclusione $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $2 < p < 2^*$ è una conseguenza del teorema di Sobolev 6.0.23. Sia allora $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ una successione di funzioni radiali per cui $\|u_k\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$ è limitata. Dal lemma di Strauss 5.1.11 possiamo dedurre che $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione costituita da funzioni infinitesime all'infinito. Possiamo estrarre una sottosuccessione $\{u_{k_h}\}_{h\in\mathbb{N}}$ che converge a una funzione radiale u q.o. in $\mathbb{R}^n$ e debolmente in $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$. Applicando la proposizione 5.1.12, con la scelta $P(s) = |s|^p$ e $Q(s) = s^2 + |s|^{2^*}$, che è lecito applicare perché $\frac{|s|^p}{s^2+|s|^{2^*}} \to 0$ quando $|s| \to 0$ o $|s| \to \infty$, e $\sup_k(\|u_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u_k\|^{2^*}_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}) < \infty$, otteniamo la convergenza $\|u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Da questa ultima relazione e dalla convergenza $u_k \to u$ q.o. ricaviamo che $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge fortemente a u in $L^p(\mathbb{R}^n)$. $\square$

5.1.3 Identità di Pohozaev

Analizziamo ora un importante risultato, che va sotto il nome di identità di Pohozaev. Essa esprime il rapporto tra le soluzioni di un'equazione ellittica non lineare e un'identità di tipo integrale che dovranno soddisfare i termini della nostra equazione. Ne formuleremo prima una versione per gli insiemi $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitati, dalla quale ricaveremo quella in $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5.1.14 (Identità di Pohozaev)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato regolare con normale uscente ν. Sia $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ la soluzione di*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) \\ u_{|\partial\Omega} = 0; \end{cases}$$

e poniamo $G(s) = \int_0^s g(t)dt$. Allora

$$n \int_\Omega G(u(x))\mathrm{d}x - \frac{n-2}{n} \int_\Omega u(x)g(u(x))\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\right|^2 \langle x, \nu\rangle \mathrm{d}\sigma$$

Dimostrazione. Vale la seguente serie di uguaglianze

$$\mathrm{div}(\langle x, \nabla u\rangle \nabla u) = \Delta u \langle x, \nabla u\rangle + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \Delta u \langle x, \nabla u\rangle + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \sum_{i=1}^n \delta_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} =$$

$$= \Delta u \langle x, \nabla u\rangle + |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} |\nabla u|^2.$$

Integriamo su Ω entrambi i membri più estremi e applichiamo il teorema della divergenza 6.0.26:

$$\int_\Omega \Delta u \langle x, \nabla u\rangle \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega \mathrm{div}(\langle x, \nabla u\rangle \nabla u)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \langle x, \nabla u\rangle\langle \nabla u, \nu\rangle \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Omega} \langle x, \frac{\partial u}{\partial \nu}\nu\rangle\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}\nu, \nu\rangle \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 \langle x, \nu\rangle \mathrm{d}\sigma, \tag{5.10}$$

dove abbiamo usato il fatto che, essendo $u \in H_0^1(\Omega)$, la componente tangenziale di ∇u su $\partial\Omega$ è nulla (visto come elemento di $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$). Notiamo ora che vale la seguente identità

$$\operatorname{div}\left(\frac{x}{2}|\nabla u|^2\right) = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}|\nabla u|^2 = \frac{n}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}|\nabla u|^2$$

integriamo su Ω e usiamo nuovamente il teorema della divergenza 6.0.26 ottenendo

$$\frac{n}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega x_i \frac{\partial}{\partial x_i}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega \operatorname{div}\left(\frac{x}{2}|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \langle x, \nu\rangle \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 \langle x, \nu\rangle \mathrm{d}\sigma. \tag{5.11}$$

Sottraendo (5.11) a (5.10) otteniamo

$$\int_\Omega \Delta u \langle x, \nabla u\rangle \mathrm{d}x + \left(1 - \frac{n}{2}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 \langle x, \nu\rangle \mathrm{d}\sigma. \tag{5.12}$$

Sfruttando ora le ipotesi e, grazie a 6.0.27, integrando per parti ricaviamo, osservando che $G(u) = 0$ su $\partial\Omega$

$$\int_\Omega \Delta u\langle x, \nabla u\rangle \mathrm{d}x = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega g(u) x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\mathrm{d}x = -\sum_{x=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(G(u)) x_i \mathrm{d}x =$$

$$= -\sum_{i=0}^n \left[\int_{\partial\Omega} G(u) x_i \nu_i \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega G(u)\mathrm{d}x\right] = n\int_\Omega G(u)\mathrm{d}x \tag{5.13}$$

mentre per l'altro termine vale

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u\langle \nabla u, \nu\rangle \mathrm{d}\sigma - \int_\Omega \Delta u \cdot u \mathrm{d}x = \int_\Omega g(u) u \mathrm{d}x. \tag{5.14}$$

Sostituendo la (5.13) e (5.14) in (5.12) otteniamo la tesi. □

Teorema 5.1.15 (Identità di Pohozaev in $\mathbb{R}^n$)**.** *Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ che risolve $-\Delta u = g(u)$ su $\mathbb{R}^n$. Allora posto $G(s) = \int_0^s g(t)\mathrm{d}t$ abbiamo*

$$n\int_{\mathbb{R}^n} G(u(x))\mathrm{d}x = \frac{n-2}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u(x) g(u(x))\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Poniamo $\Omega = B(0,r)$ con $r > 0$ e utilizziamo l'identità di Pohozaev 5.1.14 su Ω

$$n \int_\Omega G(u(x))\mathrm{d}x - \frac{n-2}{n} \int_\Omega u(x)g(u(x))\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 \langle x, \nu \rangle \mathrm{d}\sigma.$$

Vogliamo mostrare la seguente asserzione che implicherà la tesi

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 \langle x, \nu \rangle \mathrm{d}\sigma = 0.$$

Notiamo

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 \langle x, \nu \rangle \mathrm{d}\sigma = 0 \leq \liminf_{r\to\infty} \int_{\partial\Omega} r|\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}\sigma = \alpha,$$

ed inoltre

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_0^\infty r^{n-1} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}\sigma\mathrm{d}r = \int_0^\infty r^{n-2} \left[r \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}\sigma \right] \mathrm{d}r.$$

Se fosse per assurdo $\alpha > 0$, esisterebbe un $r_0 > 0$ per cui

$$r \int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}\sigma \geq \frac{\alpha}{2} \qquad \forall r \geq r_0$$

allora per ogni $n \geq 2$

$$\infty > \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_0^\infty r^{n-1} \int_{\partial\Omega} |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}\sigma\mathrm{d}r \geq \int_{r_0}^\infty r^{n-2} \tfrac{\alpha}{2} \mathrm{d}r = \left[\tfrac{r^{n-1}}{n-1} \cdot \tfrac{\alpha}{2} \right]_0^\infty = \infty,$$

che è assurdo. □

5.1.4 Operatore di Nemytskii

Proseguiamo i nostri risultati, con una sottosezione dedicata all'operatore di Nemytskii. Daremo la definizione di funzione di Carathéodory, con la quale definiremo un operatore non lineare, appunto quello di Nemytskii, che gode di interessanti proprietà di continuità e differenziabilità negli spazi di Lebesgue.

Definizione 5.1.16. Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach e sia $U \subseteq X$ aperto. Dato $I : U \to \mathbb{R}$ continuo, diremo che I è differenziabile secondo Fréchét in $u_0 \in U$ se esiste $A \in X'$ per cui valga

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{I(u_0 + v) - I(u_0) - A(v)}{\|v\|} = 0.$$

A è detto differenziale di Fréchét di I nel punto u_0 e lo indicheremo con il simbolo $I'_F(u_0)$.

Definizione 5.1.17. Sia $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ spazio di Hilbert e $I : H \to \mathbb{R}$ Fréchét differenziabile. Definiamo gradiente di I in $u \in H$ (e lo indicheremo con $\nabla_{\langle , \rangle} I(u)$), l'elemento di H che verifica

$$\langle \nabla_{\langle , \rangle} I(u), v \rangle_H = I'(u)[v].$$

Definizione 5.1.18. Data $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, diremo che F è una funzione di Carathéodory se valgono le seguenti condizioni:

1. $s \longmapsto F(x, s)$ è continua per quasi ogni $x \in \Omega$,
2. $x \longmapsto F(x, s)$ è misurabile per ogni $s \in \mathbb{R}$.

Proposizione 5.1.19. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory per cui esistano $a, b > 0$ e $p, q \geq 1$ tali che*

$$|F(x, s)| < a + b|s|^{\frac{p}{q}};$$

allora l'operatore di Nemytskii $\eta_F : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ definito dalla relazione $\eta_F(u) = F(x, u(x))$ è ben definito e continuo.

Dimostrazione. Mostriamo che è ben definito:

$$\int_\Omega |F(x, u(x))|^q \mathrm{d}x < a^q \mu(\Omega) + b\|u\|^p_{L^p(\Omega)} < \infty.$$

Mostriamo ora la continuità. Vogliamo far vedere che se prendiamo una successione $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ per cui $u_k \to u$ in $L^p(\Omega)$, allora $F(\cdot, u_k) \to F(\cdot, u)$ in $L^q(\Omega)$. Prendiamo una tal successione, e fissiamo un'arbitraria sottosuccessione $\{u_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Allora esiste un'ulteriore sottosuccessione $\{u_{k_{j_h}}\}_{h \in \mathbb{N}}$ per cui $u_{k_{j_h}} \to u$ q.o. in modo dominato: cioè esiste $v \in L^p(\Omega)$ tale che

$$|u_{k_{j_h}}(x)| \leq v(x) \qquad q.o. \text{ in } \Omega, \forall h \in \mathbb{N}.$$

Quindi per le proprietà di F

$$F(x, u_{k_{j_h}}(x)) \to F(x, u(x)) \qquad \tilde{\forall} x \in \Omega,$$

e inoltre

$$|F(x, u_{k_{j_h}}(x))| \leq a + b|u_{k_{j_h}}(x)| \leq a + bv^q(x).$$

Ne segue, per convergenza dominata 6.0.21

$$F(x, u_{k_{j_h}}(x)) \xrightarrow{L^q(\Omega)} F(x, u(x)).$$

Dunque, ogni sottosuccessione $\{u_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ di $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ha un'ulteriore sottosuccessione $\{u_{k_{j_h}}\}_{h \in \mathbb{N}}$ tale che

$$F(\cdot, u_{k_{j_h}}) \xrightarrow{L^q(\Omega)} F(\cdot, u). \tag{5.15}$$

Ne segue che per l'intera successione $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ vale (5.15). $\square$

Proposizione 5.1.20. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory per cui esistano $a, b > 0$ e $p \geq 1$ tali che*

$$|f(x,s)| < a + b|s|^{p-1} \qquad \tilde{\forall} x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Definita $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in questa maniera

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\mathrm{d}t,$$

l'operatore di Nemytskii $\eta_F : L^p(\Omega) \to L^1(\Omega)$ è ben definito, continuo e differenziabile secondo Fréchét con differenziale $d\eta_F(u)[v] = f(x,u(x))v(x)$.

Dimostrazione. Dimostriamo che η_F è ben definito e continuo. Notiamo che

$$|F(x,s)| = \left|\int_0^s f(x,t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^s |f(x,t)|\mathrm{d}t \leq \int_0^s (a + b|t|^{p-1})\mathrm{d}t \leq a|s| + b|s|^p \leq a_0 + b_0|s|^p$$

dove $a_0 = aM$ e $b_0 = 2b$, con $M > \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p-1}}$. Utilizzando la proposizione 5.1.19 con $q = 1$ otteniamo che il nostro operatore è continuo da $L^p(\Omega)$ in $L^1(\Omega)$. Grazie alla stessa proposizione possiamo mostrare che, scelto $q = p'$, l'operatore di Nemytskii η_f è continuo da $L^p(\Omega)$ in $L^{p'}(\Omega)$. Mostriamo ora la differenziabilità secondo Fréchét. Dobbiamo mostrare la validità di

$$\|F(\cdot, u+v) - F(\cdot, u) - f(\cdot, u)v\|_{L^1(\Omega)} = o(\|v\|_{L^p(\Omega)}).$$

Per il teorema di Lagrange per ogni $x \in \Omega$ esiste $0 \leq \theta(x) \leq 1$ tale che

$$|F(x,u(x)+v(x)) - F(x,u(x)) - f(x,u(x))v(x)| \leq |f(x,u(x)+\theta(x)v(x)) - f(x,u(x))||v(x)|.$$

Integrando su Ω e utilizzando la disuguaglianza di Hölder, otteniamo

$$\|F(\cdot, u+v)) - F(\cdot, u) - f(\cdot, u)v\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f(\cdot, u+\theta v) - f(\cdot, u)\|_{L^{p'}(\Omega)}\|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Vorremmo che $\|f(\cdot, u+\theta v) - f(\cdot, u)\|_{L^{p'}(\Omega)} \to 0$ per $\|v\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, ma ciò è vero perché se $\|v\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ allora $\|\theta v\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ e otteniamo la tesi grazie alla continuità di η_f da $L^p(\Omega)$ a $L^{p'}(\Omega)$. □

5.1.5 Principio Variazionale di Ekeland

Ora è la volta del famoso principio variazionale di Ekeland, importante risultato che analizza, in un certo senso, l'esistenza di successioni minimizzanti per funzionali semicontinui inferiormente su spazi metrici completi.

Teorema 5.1.21 (Principio variazionale di Ekeland)**.** *Sia* (M, d) *uno spazio metrico completo e sia* $\phi : M \to]-\infty, +\infty]$ *una funzione semicontinua inferiormente, limitata inferiormente e non identicamente uguale a* $+\infty$*. Siano* $\epsilon > 0$ *e* $u \in M$ *per cui*

$$\phi(u) \leq \inf_M \phi + \epsilon.$$

Allora per ogni $\lambda > 0$ *esiste* $u_\lambda \in M$ *per cui*

$$\phi(u_\lambda) \leq \phi(u), \tag{5.16}$$

$$\mathrm{d}(u, u_\lambda) \leq \lambda, \tag{5.17}$$

$$\phi(w) \geq \phi(u_\lambda) - \frac{\epsilon}{\lambda}\mathrm{d}(u_\lambda, w), \qquad \forall w \in M. \tag{5.18}$$

Dimostrazione. La relazione

$$x \leq y \iff \phi(x) \leq \phi(y) - \frac{\epsilon}{\lambda}\mathrm{d}(x, y)$$

definisce un ordine su M:

- $x \leq y$ e $y \leq x \Longrightarrow x = y$:

  $$\phi(x) \leq \phi(y) - \frac{\epsilon}{\lambda}\mathrm{d}(x, y),$$
  $$\phi(y) \leq \phi(x) - \frac{\epsilon}{\lambda}\mathrm{d}(y, x),$$

  sommiamo le due relazioni e otteniamo

  $$-\frac{2\epsilon}{\lambda}\mathrm{d}(x, y) \leq 0 \Longrightarrow \mathrm{d}(x, y) \leq 0 \Longrightarrow x = y$$

- $x \leq y$ e $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$:

  $$\phi(x) \leq \phi(y) - \frac{\epsilon}{\lambda}\mathrm{d}(x, y),$$
  $$\phi(y) \leq \phi(z) - \frac{\epsilon}{\lambda}\mathrm{d}(y, z),$$

  quindi

  $$\phi(x) \leq \phi(y) - \frac{\epsilon}{\lambda}\mathrm{d}(x, y) \leq$$
  $$\leq \phi(z) - \frac{\epsilon}{\lambda}\mathrm{d}(y, z) - \frac{\epsilon}{\lambda}\mathrm{d}(x, y) \leq \phi(z) - \frac{\epsilon}{\lambda}\mathrm{d}(x, z).$$

Introduciamo ricorsivamente una successione $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq M$ e una successione $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi di M ponendo:

$$\begin{aligned} &u_1 = u, && S_1 = \{w \in M : w \leq u_1\}, \\ &u_{k+1} \in S_k \text{ tale che } \phi(u_{k+1}) < \inf_{S_k} \phi + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}, && S_{k+1} = \{w \in M : w \leq u_{k+1}\}. \end{aligned}$$

Chiaramente $S_{k+1} \subseteq S_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ per la transitività dell'ordinamento: sia $w \in S_{k+1}$, allora

$$\phi(w) + \frac{\epsilon}{\lambda}\mathrm{d}(w, u_k) \leq \phi(w) + \frac{\epsilon}{\lambda}\mathrm{d}(w, u_{k+1}) + \frac{\epsilon}{k}\mathrm{d}(u_{k+1}, u_k) \leq$$
$$\leq \phi(u_{k+1}) + \frac{\epsilon}{\lambda}\mathrm{d}(u_{k+1}, u_k) \leq \phi(u_k).$$

Gli insiemi S_k sono chiusi: in effetti dato $w \in M$ l'insieme $\{w' \in M : w' \leq w\}$ è chiuso poiché ϕ è semicontinua inferiormente. Mostriamo che vale per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\sup\{\mathrm{d}(w, u_k) : w \in S_k\} \leq \frac{\lambda}{2^k}. \tag{5.19}$$

Sia infatti $w \in S_k$: allora $w \leq u_k$, ossia

$$\frac{\epsilon}{\lambda}\mathrm{d}(w, u_k) \leq \phi(u_k) - \phi(w); \tag{5.20}$$

d'altra parte $w \in S_{k-1}$, e dalla definizione di u_k otteniamo

$$\phi(u_k) < \inf_{S_{k-1}} \phi + \frac{\epsilon}{2^k} \leq \phi(w) + \frac{\epsilon}{2^k}. \tag{5.21}$$

Mettendo insieme la (5.20) e la (5.21) otteniamo la (5.19). Dalla relazione (5.19) e dalla decrescenza degli S_k segue che la successione $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in M: infatti se $k \geq h \geq \nu$ otteniamo

$$\mathrm{d}(u_k, u_h) \leq \sum_{i=h}^{k-1} \mathrm{d}(u_{i+1}, u_i) \leq \sum_{i=k}^{k-1} \frac{\lambda}{2^i} \leq \frac{\lambda}{2^{\nu-1}}.$$

Dunque per la completezza di M deve esistere $u_\lambda := \lim_{k\to\infty} u_k$. Dato che gli S_k sono chiusi deve valere $u_\lambda \in \cap_{k\in\mathbb{N}} S_k$. Di conseguenza $u_\lambda \in S_k$, e dunque $u_\lambda \leq u_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e in particolare $u_\lambda \leq u_1 = u$, ossia

$$\phi(u_\lambda) \leq \phi(u) - \frac{\epsilon}{\lambda}\mathrm{d}(u, u_\lambda) \leq \phi(u), \tag{5.22}$$

che è la relazione (5.16). Dalla (5.22) possiamo anche ricavare

$$\mathrm{d}(u_\lambda, u) \leq \frac{\lambda}{\epsilon}(\phi(u) - \phi(u_\lambda)) \leq \frac{\lambda}{\epsilon}\left(\inf_M \phi + \epsilon - \inf_M \phi\right) = \lambda, \tag{5.23}$$

che implica (5.17). Notiamo che, inoltre, se $w \leq u_\lambda$ allora $w \leq u_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e dalla (5.19) segue $w = u_\lambda$. Infine, sia $w \in M \setminus \{u_\lambda\}$; allora non può essere $w \leq u_\lambda$ (altrimenti $w = u_\lambda$) e quindi

$$\phi(w) > \phi(u_\lambda) - \frac{\epsilon}{\lambda}\mathrm{d}(w, u_\lambda),$$

che è la (5.18). □

Proposizione 5.1.22. *Siano X uno spazio di Banach e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ un funzionale limitato inferiormente e differenziabile secondo Fréchét. Allora per ogni $\epsilon > 0$ e $u \in X$ per cui*

$$\varphi(u) \leq \inf_X \varphi + \epsilon, \tag{5.24}$$

esiste $v \in X$ per cui

$$\varphi(v) \leq \varphi(u), \tag{5.25}$$

$$\|u - v\|_X \leq \sqrt{\epsilon}, \tag{5.26}$$

$$\|\varphi'(v)\|_{X'} \leq \sqrt{\epsilon}. \tag{5.27}$$

Dimostrazione. Applicando il principio di Ekeland 5.1.21 con $\lambda = \sqrt{\epsilon}$, che si può applicare grazie alla validità di (5.24), esiste $v \in X$ per cui valgono (5.25) e (5.26). Inoltre per ogni $w \neq v$ vale

$$\varphi(w) > \varphi(v) - \sqrt{\epsilon}\|v - w\|_X. \tag{5.28}$$

Sia $w = v + th$ con $t > 0$ e $h \in X$ con $\|h\|_X = 1$; da (5.28) ricaviamo

$$\frac{\varphi(v + th) - \varphi(v)}{t} > -\sqrt{\epsilon}.$$

Di conseguenza, essendo φ differenziabile, facendo tendere t a 0, otteniamo

$$\varphi'(v)[h] = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(v + th) - \varphi(v)}{t} \geq -\sqrt{\epsilon},$$

che implica la tesi. □

Lemma 5.1.23. *Sia X uno spazio di Banach e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ un funzionale inferiormente limitato e differenziabile su X. Allora per ogni successione minimizzante $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di φ esiste una successione minimizzante $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di φ tale che*

$$\varphi(v_k) \leq \varphi(u_k), \tag{5.29}$$

$$\|u_k - v_k\|_X \xrightarrow{k\to\infty} 0, \tag{5.30}$$

$$\|\varphi'(v_k)\|_{X'} \xrightarrow{k\to\infty} 0. \tag{5.31}$$

Dimostrazione. Se $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione minimizzante per φ, prendiamo

$$\epsilon_k = \begin{cases} \varphi(u_k) - \inf_X \varphi & \varphi(u_k) - \inf_x \varphi > 0, \\ \frac{1}{k} & \varphi(u_k) - \inf_x \varphi = 0. \end{cases}$$

Prendiamo $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ associata a $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e ϵ_k nella proposizione 5.1.22. □

5.2 Introduzione al problema

Tenuto conto dei risultati provati nelle precedenti sezioni, possiamo passare a descrivere il nostro problema. Consideriamo l'equazione di Schrödinger non lineare per $n \geq 3$

$$\mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta\psi + F'(|\psi|)\frac{\psi}{|\psi|} \qquad \text{dove} \qquad \psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} \tag{5.32}$$

con le seguenti imposizioni:

$$F \in C^2(\mathbb{R}) \text{ pari e } F(0) = F'(0) = F''(0) = 0; \tag{5.33}$$
$$|F'(s)| < C_1|s|^{q-1} + C_2|s|^{p-1}, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \text{ con } 2 < q \leq p < 2^*; \tag{5.34}$$
$$F(s) \geq -C_1 s^2 - C_2|s|^\alpha \text{ per ogni } s \in \mathbb{R} \text{ con } 2 < \alpha < 2 + \frac{4}{n}; \tag{5.35}$$
$$\text{esiste } s_0 \in \mathbb{R} \text{ per cui } F(s_0) < 0; \tag{5.36}$$
$$\text{esiste } \delta > 0 : \quad F(s) < -s^{2+\epsilon}, \quad 0 < s < \delta, \quad \text{con } \epsilon \in \left]0, \frac{4}{n}\right[. \tag{5.37}$$

Fissato $\omega > 0$ cerchiamo soluzioni del tipo $\psi(x,t) = u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$; sostituendo nell'equazione (5.32) otteniamo

$$\mathrm{i}(-\mathrm{i}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}u(x) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Delta u(x) + \left(F'(|u(x)|)\frac{u(x)}{|u(x)|}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{5.38}$$

Sfruttando la condizione (5.33) otteniamo che F' è dispari, quindi possiamo affermare

$$F'(|u(x)|)\frac{u(x)}{|u(x)|} = \begin{cases} F'(u(x)) \cdot 1 & u(x) \geq 0 \\ F'(-u(x)) \cdot (-1) = F'(u(x)) & u(x) < 0 \end{cases}$$

da cui, dividendo entrambi i membri di (5.38) per $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, ricaviamo la seguente equazione

$$-\Delta u + F'(u) = \omega u. \tag{5.39}$$

Questa è l'equazione che studieremo. Affinché la scrittura classica abbia un senso allora $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ oppure $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Noi in realtà ne studieremo una formulazione debole. Sia $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora moltiplicando per φ entrambi i membri della precedente equazione e integrando, otteniamo

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} F'(u(x))\varphi(x)\mathrm{d}x = \omega \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Utilizzando la formula di integrazione per parti 6.0.27 ricaviamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u(x), \nabla \varphi(x) \rangle \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} F'(u(x))\varphi(x)\mathrm{d}x = \omega \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x. \quad (5.40)$$

Diremo allora che $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ è soluzione del problema (5.39) se risolve rispettivamente (5.40) per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Definiamo il funzionale non lineare $J : H^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ in questa maniera

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + F(u(x)) \right) \mathrm{d}x = \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{2} + \int_{\mathbb{R}^n} F(u(x))\mathrm{d}x;$$

il suo differenziale $J'(u_0) : H^1(\mathbb{R}^n) \to H^1(\mathbb{R}^n)$ nel punto $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ è dato da

$$J'(u_0)[v] = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\langle \nabla u_0(x), \nabla v(x) \rangle + F'(u_0(x))v(x) \right) \mathrm{d}x.$$

In virtù delle ultime posizioni fatte, possiamo notare che, definita la varietà $M_\rho = \{u \in H^1(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \rho\}$, se l'estremo inferiore vincolato $\inf\{J(u) : u \in M_\rho\}$ fosse un minimo, allora il punto di minimo sarebbe una soluzione di (5.40). Il nostro obiettivo sarà dimostrare che tale funzionale ammette un punto di minimo.

5.3 Soluzioni di Ground State per l'equazione di Schrödinger

Avendo precisato nella sezione 5.2 in che senso vogliamo risolvere l'equazione (5.32), ci proponiamo, in questa ultima sezione, di determinare soluzioni di tipo radiale e non negativo, che chiameremo soluzioni di ground state dell'equazione. Mostreremo, grazie alla disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg, che il nostro funzionale è limitato inferiormente. Iniziamo con il seguente lemma:

Lemma 5.3.1. *Se F soddisfa* (5.36) *e* (5.37) *allora per ogni $\rho > 0$ vale*

$$\inf_{u \in M_\rho} J(u) < 0;$$

Dimostrazione. Costruiamo una successione di funzioni radiali in $H^1(\mathbb{R}^n)$ costanti sulla palla in questa maniera

$$u_k(r) = \begin{cases} s_k & r < R_k \\ s_k - \frac{s_k}{R_k}(r - R_k) & R_k \leq r \leq 2R_k \\ 0 & r > 2R_k \end{cases}$$

dove $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sono due successioni in $\mathbb{R}$, con $R_k \to \infty$ per $k \to \infty$. Determineremo le proprietà delle due successioni affinché $u_k \in M_\rho$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Calcoliamo la norma in $L^2(\mathbb{R}^n)$ della nostra successione

$$\|u_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\partial B(0,1)} \left[\int_0^{R_k} s_k^2 r^{n-1}\mathrm{d}r + \int_{R_k}^{2R_k} \left(s_k - \frac{s_k}{R_k}(r - R_k)\right)^2 r^{n-1}\mathrm{d}r\right] \mathrm{d}\Omega =$$

$$= C_1 \frac{s_k^2}{n} R_k^n + C_2 s_k^2 R_k^n = C s_k^2 R_k^n,$$

quindi $s_k^2 R_k^n = \frac{\rho}{C}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, ossia

$$s_k = \sqrt{\frac{\rho}{CR_k^n}} \quad \text{e} \quad R_k \to \infty.$$

Scegliamo R_k sufficientemente grande affinché $|s_k| < \delta$. Posto $\Omega = \partial B(0,1)$ abbiamo

$$\begin{aligned} J(u_k) =& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_k(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} F(u_k(x))\mathrm{d}x = \\ =& \int_\Omega \left[\int_{R_k}^{2R_k} \left(\frac{s_k^2}{2R_k^2} + F(u_k(r))\right) r^{n-1}\mathrm{d}r + \int_0^{R_k} F(u_k(r)) r^{n-1}\mathrm{d}r\right] \mathrm{d}\Omega \leq \\ \leq& C_0 \int_{R_k}^{2R_k} \frac{s_k^2}{2R_k^2} r^{n-1}\mathrm{d}r + C_0 \int_0^{R_k} F(u_k(r)) r^{n-1}\mathrm{d}r \leq \\ \leq& \overline{C}_0 s_k^2 R_k^{n-2} + C_0 \int_0^{R_k} F(s_k) r^{n-1}\mathrm{d}r \leq \overline{C}_0 \frac{s_k^2 R_k^n}{R_k^2} - C_0 \int_0^{R_k} s_k^{2+\epsilon} r^{n-1}\mathrm{d}r = \\ =& \overline{C}_0 \frac{s_k^2 R_k^n}{R_k^2} - \overline{\overline{C}}_0 s_k^2 R_k^n s_k^\epsilon = \overline{C}_0 \frac{\rho}{CR_k^2} - \overline{\overline{C}}_0 \frac{\rho}{C} s_k^\epsilon = \\ =& \overline{C}_0 \frac{\rho}{CR_k^2} - \overline{\overline{C}}_0 \frac{\rho}{CR_k^{\frac{n\epsilon}{2}}} \left(\frac{\rho}{C}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} = \frac{K_1}{R_k^2} - \frac{K_2}{R_k^{\frac{n\epsilon}{2}}}. \end{aligned}$$

Dal momento che $\epsilon < \frac{4}{n}$, allora esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ per cui per ogni $k \geq k_0$ vale $K_1 R_k^{-2} - K_2 R_k^{-\frac{n\epsilon}{2}}$ e in particolare quindi $J(u_k) \leq 0$. □

Proposizione 5.3.2. *Supponiamo valga la condizione* (5.35)*; allora valgono le seguenti asserzioni*

1. $\inf\{J(u) : u \in M_\rho\} > -\infty$*;*

2. ogni successione minimizzante u_k *è limitata in* $H^1(\mathbb{R}^n)$*.*

Dimostrazione. Utilizzando la disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg, con i parametri $j = 0$, $m = 1$ e $r = q = 2$, si ricava

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{n}{2}-\frac{n}{p}}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}}$$

per ogni valore $2 \leq p \leq 2^*$. Da quest'ultima stima ricordando che l'estremo inferiore è fatto su M_ρ otteniamo

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq C_\rho\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{pn}{2}-n}. \tag{5.41}$$

Quindi utilizzando (5.35) per ogni $u \in M_\rho$ otteniamo

$$\begin{aligned}
J(u) \geq & \int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|\nabla u(x)|^2}{2} - C_1 u(x)^2 - C_2|u(x)|^\alpha\right)\mathrm{d}x = \\
= & \frac{\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2}{2} - C_1\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 - C_2\|u\|_{L^\alpha(\mathbb{R}^n)}^\alpha = \\
= & = \frac{\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2}{2} - C_1\rho^2 - C_2C_\rho\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{\alpha n}{2}-n} \geq \\
\geq & \frac{\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2}{2} + O\left(\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\right)
\end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $\alpha < 2 + \frac{4}{n}$. L'ultima stima implica la tesi. □

Lemma 5.3.3. *Supponiamo valga* (5.34) *e sia* $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ *soluzione di* (5.39) *per un certo* $\bar{\omega} \in \mathbb{R}$*. Allora* $\bar{u} \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$*.*

Dimostrazione. Applichiamo un processo di bootstrap. Sia $n = 2$. Allora per il teorema di immersione di Sobolev $\bar{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p < \infty$. Grazie alla condizione (5.34) otteniamo che $F'(\bar{u}) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p < \infty$ da cui $\Delta\bar{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p < \infty$. Da ciò $\bar{u} \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p < \infty$ che dà la tesi. Sia ora $n > 2$. Per il teorema di immersione di Sobolev $\bar{u} \in L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ quindi per lo stesso ragionamento di prima $\Delta\bar{u} \in L^{\frac{2^*}{q-1}}(\mathbb{R}^n)$ e quindi $\bar{u} \in W^{2,\frac{2^*}{q-1}}(\mathbb{R}^n)$. Vorremo $\frac{2^*}{q-1} \geq 2$ così da ottenere la tesi. Questa condizione è verificata se e solo se $q < \frac{2n-2}{n-2} < 2^*$ ossia $2 < q \leq \frac{2n-2}{n-2}$; quindi in questo caso $\bar{u} \in W_{loc}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$. Sia allora $\frac{2n-2}{n-2} < q < 2^*$, quindi $t_1 = \frac{2^*}{q-1} < 2 < n$. Per il teorema di immersione di Sobolev abbiamo $\bar{u} \in W_{loc}^{1,t_1^*}(\mathbb{R}^n)$. Se vale $t_1^* = \frac{nt_1}{n-t_1} > n$ ossia $t_1 > \frac{n}{2}$, quindi $\bar{u} \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n)$ da cui $\Delta\bar{u} \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n)$ che implica $\bar{u} \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p < \infty$. Supponiamo allora $\frac{2n-2}{n-2} < q < 2^*$ e $1 < t_1 < 2 \wedge \frac{n}{2}$. Da ciò otteniamo $t_1^* < n$ e per il teorema di immersione di Sobolev $\bar{u} \in L^{t_1^{**}}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ da cui ripetendo i soliti ragionamenti $\bar{u} \in W^{2,\frac{t_1^{**}}{q-1}}(\mathbb{R}^n)$. Sia $t_2 = \frac{t_1^{**}}{q-1}$; poiché $\frac{1}{t_1^{**}} = \frac{1}{t_1} - \frac{2}{n} = \frac{n-2t_1}{nt_1}$ si ha $t_2 = \frac{nt_1}{(n-2t_1)(q-1)}$. Notiamo che $t_2 > t_1$, infatti

$$\frac{nt_1}{(n-2t_1)(q-1)} > t_1 \iff q-1 < \frac{n}{n-2t_1} = \frac{n}{n - \frac{4n}{(n-2)(q-1)}} = \frac{1}{1 - \frac{4}{(n-2)(q-1)}}$$

$$(q-1)\left(1 - \frac{4}{(n-2)(q-1)}\right) < 1 \iff q-1-\frac{4}{n-2} < 1 \iff q < 2 + \frac{4}{n-2} = 2^*.$$

Se $t_2 \geq 2$ abbiamo finito. Controlliamo

$$t_2 = \frac{nt_1}{(n-2t_1)(q-1)} = \frac{\frac{2n^2}{(n-2)(q-1)}}{n - \frac{4n^2}{(n-2)(q-1)}} \geq 2 \iff \frac{n}{(n-2)(q-1)} \geq q-1-\frac{4n}{n-2}$$

$$\iff \frac{n}{n-2} \geq (q-1)^2 - \frac{4n}{n-2}(q-1) \iff (q-1)^2 - \frac{4n}{n-2}(q-1) - \frac{n}{n-2} \leq 0$$

$$\iff \frac{2n - \sqrt{4n^2 + n(n-2)}}{n-2} \leq q-1 \leq \frac{2 + \sqrt{4n^2+n(n-2)}}{n-2}.$$

Dato che $1 < q-1 < \frac{n}{n-2}$ la relazione è rispettata in quanto

$$\frac{2n - \sqrt{4n^2+n(n-2)}}{n-2} < 0 \text{ e anche } \frac{2n + \sqrt{4n^2+n(n-2)}}{n-2} > \frac{n}{n-2}.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Lemma 5.3.4. *Supponiamo valga* (5.34) *e sia* $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ *soluzione di* (5.39) *per un certo* $\bar{\omega} \in \mathbb{R}$. *Se* $J(\bar{u}) < 0$ *allora* $\bar{\omega} < 0$.

Dimostrazione. Grazie al fatto che $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ risolve (5.39), per il lemma 5.3.3 ricaviamo che $\bar{u} \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Dal momento che $F(u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ possiamo applicare l'identità di Pohozaev 5.1.15 ricavando

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \bar{u}(x)|^2 \mathrm{d}x = \frac{2n}{n-2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\bar{\omega}\bar{u}^2(x)}{2} - F(\bar{u}(x)) \right) \mathrm{d}x. \tag{5.42}$$

Ricordiamo che $\bar{u}$ soddisfa (5.39) vuol dire che $\bar{u}$ verifica (5.40) per $\varphi = \bar{u}$, cioè

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \bar{u}(x)|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(\bar{\omega}\bar{u}(x)^2 - F'(\bar{u}(x))\bar{u}(x) \right) \mathrm{d}x; \tag{5.43}$$

sottraendo ora (5.43) a (5.42) otteniamo

$$0 > -\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \bar{u}(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{F'(\bar{u}(x))\bar{u}(x)}{2} - F(\bar{u}(x))\mathrm{d}x. \tag{5.44}$$

Ancora grazie a (5.42) e (5.43) possiamo scrivere

$$2J(\bar{u}) + \int_{\mathbb{R}^n} F'(\bar{u}(x))\bar{u}(x) - 2F(\bar{u}(x))\mathrm{d}x = \bar{\omega}\int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}^2(x)\mathrm{d}x$$

da cui ricaviamo la tesi. □

Osservazione 5.3.5. Riscriviamo la condizione (5.42) derivata dall'identità di Pohozaev 5.1.15 in questa maniera

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \bar{u}(x)|^2 \mathrm{d}x = \frac{n}{n-2}\int_{\mathbb{R}^n} \bar{\omega}\bar{u}^2(x)\mathrm{d}x - \frac{2n}{n-2}\int_{\mathbb{R}^n} F(\bar{u}(x))\mathrm{d}x.$$

Sottraendo (5.43) a quest'ultima, otteniamo, senza avere informazioni sul segno di $J(\bar{u})$

$$\frac{2}{n-2}\bar{\omega}\int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}^2(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} (2^* F(\bar{u}(x)) - F'(\bar{u}(x))\bar{u}(x))\mathrm{d}x \tag{5.45}$$

Osservazione 5.3.6. Sia $C_r = \inf\{J(u) : u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)\}$ allora vale anche che $C_r = C = \inf\{J(u) : u \in H^1(\mathbb{R}^n)\}$. Infatti, chiaramente $C \leq C_r$; ma scelta $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, con $u_k > 0$, una successione minimizzante tendente a C, detto $u_k^\star$ il riordinamento simmetrico decrescente di u_k, si ha $u_k^\star \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$, $\|u_k^\star\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \rho$ e, grazie alla disuguaglianza di Pólya-Szegő 5.1.10, vale $J(u_k^\star) \leq J(u_k)$. Quindi $\{u_k^\star\}_{k\in\mathbb{N}}$ è minimizzante, da cui $C_r \leq C$.

Definizione 5.3.7. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $J \in H'$. Diremo che una successione $\{u_k\} \subseteq H$ è una successione di Palais-Smale a livello $c \in \mathbb{R}$ se vale

1. $J(u_k) \to c$;

2. $J'(u_k) \to 0$ in H'.

Definizione 5.3.8. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $J \in C^1(H)$. Diremo che J soddisfa la condizione di Palais-Smale a livello $c \in \mathbb{R}$ (e scriveremo $(PS)_c$) se le successioni di Palais-Smale a livello c convergono in H (a meno di sottosuccessioni). Diremo invece che soddisfa la condizione di Palais-Smale su $[a,b] \subset \mathbb{R}$ (e scriveremo $(PS)_{[a,b]}$) se vale $(PS)_c$ per ogni $c \in [a,b]$.

Proposizione 5.3.9. *Supponiamo valgano* (5.34) *e* (5.35)*, e sia* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una successione minimizzante di Palais-Smale per cui valga la seguente condizione:* $J(u_k) \to c = \inf\{J(u) : u \in M_\rho\}$*. Allora esiste una successione* $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *limitata in* $\mathbb{R}$ *di moltiplicatori di Lagrange tali che*

$$-\Delta u_k + F'(u_k) - \omega_k u_k = \sigma_k \to 0. \tag{5.46}$$

Dimostrazione. Dato che $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione minimizzante di Palais-Smale, abbiamo che

$$\nabla J(u_k) /\!/ \nabla G(u_k) + \tilde{\sigma}_k \qquad \tilde{\sigma}_k \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla J(u_k) = \omega_k \nabla G(u_k) + \tilde{\sigma}_k,$$

quindi per ogni $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ vale

$$\langle \nabla J(u_k), v\rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \omega_k \langle \nabla G(u_k), v\rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \langle \tilde{\sigma}_k, v\rangle_{H^1(\mathbb{R}^n)}$$

da cui per definizione di gradiente

$$J'(u_k)[v] - \omega_k G'(u_k)[v] = \sigma_k(v),$$

dove G rappresenta il nostro vincolo. Per definizione di differenziale del funzionale in questione otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\langle \nabla u_k(x), \nabla v(x)\rangle_{\mathbb{R}^n} + F'(u_k(x))v(x) - \omega_k u_k(x)v(x))\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\sigma}_k(x)v(x)\mathrm{d}x$$

e integrando per parti, otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u_k(x) + F'(u_k(x)) - \omega_k u_k(x))v(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\sigma}_k(x)v(x)\mathrm{d}x. \tag{5.47}$$

Inoltre per definizione di σ_k, otteniamo che

$$\|\sigma_k\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^n)} = \sup\{|\langle \tilde{\sigma}_k, v\rangle| : \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = 1\} \le \|\tilde{\sigma}_k\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \to 0. \tag{5.48}$$

Dalle relazioni (5.47) e (5.48) segue la (5.46). Dalla (5.46) e dalla proposizione 5.3.2 abbiamo

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_k(x)|^2 + F'(u_k(x))u_k(x) - \omega_k u_k^2(x))\mathrm{d}x\right| \le \|\sigma_k\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^n)} \|u_k\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Risulta quindi

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_k(x)|^2 + F'(u_k(x))u_k(x) - \omega_k u_k^2(x))\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_k(x)|^2 + 2F(u_k(x)) - 2F(u_k(x)) + F'(u_k(x))u_k(x) - \omega_k u_k^2(x))\mathrm{d}x =$$

$$= 2J(u_k) - \omega_k\rho^2 + \int_{\mathbb{R}^n}(F'(u_k(x))u_k(x) - 2F(u_k(x)))\mathrm{d}x \to 0.$$

Dal momento che $J(u_k)$ è limitato e dato che grazie a (5.34) otteniamo

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}(F'(u_k(x))u_k(x) - 2F(u_k(x)))\mathrm{d}x\right| \leq C(\|u_k\|^q_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|u_k\|^p_{H^1(\mathbb{R}^n)}) < \infty, \tag{5.49}$$

si deduce che $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata e il teorema è provato. □

Terminiamo i nostri risultati col teorema conclusivo che dimostra l'esistenza di un minimo per il nostro funzionale, e quindi che la nostra successione minimizzante era in realtà convergente.

Teorema 5.3.10. *Supponiamo siano valide* (5.34), (5.35) *e* (5.36). *Allora esiste $\bar{\rho} > 0$ per cui per ogni $\rho > \bar{\rho}$ vi è $\bar{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ che soddisfa*

$$J(\bar{u}) = \inf_{v\in M_\rho} J(v).$$

Di conseguenza esiste $\omega < 0$ e $\bar{u}$ positiva radiale e simmetrica che risolvono il problema (5.39).

Dimostrazione. Grazie all'osservazione 5.3.6 studieremo equivalentemente il problema cercando minimi in $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$. Sia quindi $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione minimizzante per cui $\|u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \rho$; dal momento che F è pari possiamo supporre $u_k \geq 0$ senza perdere di generalità. Utilizzando il lemma 5.3.1, possiamo prendere ρ sufficientemente grande per cui $J(u_k) \to c < 0$.
Grazie al lemma 5.1.23, possiamo assumere che la nostra successione sia una successione di Palais-Smale per il funzionale J ristretto alla varietà M_ρ. In virtù delle proposizioni 5.3.2 e 5.3.9 otteniamo che $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è limitata in $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ e $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ limitata in $\mathbb{R}$. Da tutto ciò ricaviamo

$$\begin{aligned}
&\omega_k \to \bar{\omega} && \\
&u_k \rightharpoonup u && \text{debolmente in } H^1_{rad}(\mathbb{R}^n) && (5.50)\\
&u_k \to u && \text{fortemente in } L^p(\mathbb{R}^n), \text{ con } 2 < p < 2^* && (5.51)\\
&u_k \to u && \text{fortemente in } L^p_{loc}(\mathbb{R}^n), \text{ con } 2 \leq p < 2^* && (5.52)
\end{aligned}$$

con (5.50), (5.51) e (5.52) conseguenze dei teoremi 6.0.24, 5.1.13 e infine 6.0.25. Grazie al lemma di Strauss 5.1.11 esiste β tale che per ogni $|x| > \beta$ si ha

$$|u_n(x)| \leq \alpha\frac{\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}}{|x|^{\frac{n-1}{2}}}. \tag{5.53}$$

Vogliamo provare che vale

$$\Delta u + F'(u) = \bar{\omega}u. \tag{5.54}$$

Sia $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ simmetrica radiale: allora abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u_k(x), \nabla \varphi(x) \rangle \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} F'(u_k(x))\varphi(x)\mathrm{d}x - \omega_k \int_{\mathbb{R}^n} u_k(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \to 0, \tag{5.55}$$

utilizzando quindi la condizione (5.34) ricaviamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} F'(u_k(x))\varphi(x)\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^n} F'(u(x))\varphi(x)\mathrm{d}x. \tag{5.56}$$

Allora mettendo insieme (5.55) e (5.56) otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u_k(x), \nabla \varphi(x) \rangle \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} F'(u_k(x))\varphi(x)\mathrm{d}x - \omega_k \int_{\mathbb{R}^n} u_k(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \to 0$$

$$\downarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u(x), \nabla \varphi(x) \rangle \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} F'(u(x))\varphi(x)\mathrm{d}x - \omega_k \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

da cui ricaviamo la validità di (5.40) e quindi quella di (5.54). Mostriamo ora che $u \neq 0$. Grazie alla condizione (5.34) e alla proposizione 5.1.20, l'operatore di Nemytskii è continuo

$$F : L^t(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n), \quad 2 < t < 2^*,$$

e $u_k \to u$ in $L^t(\mathbb{R}^n)$ per $2 < t < 2^*$; quindi

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} F(u(x))\mathrm{d}x \leq \lim_{n\to\infty} J(u_k) = c < 0$$

il che prova che $u \neq 0$. A questo punto, $u \neq 0$ è una soluzione debole di (5.54) e $J(u) < 0$. Questo soddisfa le ipotesi del lemma 5.3.4 e perciò $\bar{\omega} < 0$. Consideriamo ora due elementi della successione minimizzante di Palais-Smale u_j e u_h: per la proposizione 5.3.9

$$-\Delta u_j + F'(u_j) - \omega_j u_j = \sigma_j \to 0$$

$$-\Delta u_h + F'(u_h) - \omega_h u_h = \sigma_h \to 0.$$

Sottraendo le due identità troviamo

$$-\Delta(u_j - u_h) + F'(u_j) - F'(u_h) - \bar{\omega}_j(u_j - u_h) \to 0;$$

integrando entrambi i membri e utilizzando la formula di integrazione per parti 6.0.27 otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u_j - u_h)|^2 \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} (F'(u_j) - F'(u_h))(u_j - u_h)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\omega}_j (u_j - u_h)^2 \mathrm{d}x \to 0. \tag{5.57}$$

Su ogni compatto B allora abbiamo

$$\int_B (F'(u_j(x)) - F'(u_h(x)))(u_j(x) - u_h(x))\mathrm{d}x \to 0,$$

$$\int_B \bar{\omega_j}(u_j(x) - u_h(x))^2\mathrm{d}x \to 0,$$

da cui ricaviamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u_j - u_h)|^2\mathrm{d}x + \int_{B^c}(F'(u_j) - F'(u_h))(u_j - u_h)\mathrm{d}x - \int_{B^c}\bar{\omega_j}(u_j - u_h)^2\mathrm{d}x \to 0.$$

Grazie al lemma 5.3.4 abbiamo $\bar{\omega} < 0$ e

$$\int_{B^c}(F'(u_j) - F'(u_h))(u_j - u_h)\mathrm{d}x - \int_{B^c}\bar{\omega_j}(u_j - u_h)^2\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{B^c}(F''(\theta u_j + (1-\theta)u_h) - \bar{\omega})(u_j - u_h)^2\mathrm{d}x.$$

Ora, ricordando che $F''(0) = 0$, grazie a (5.53) otteniamo

$$F''(\theta u_j + (1-\theta)u_h) << 1 \Longrightarrow F''(\theta u_j + (1-\theta)u_h) - \bar{\omega} > 0$$

per B sufficientemente grande. Utilizzando (5.57) otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u_j - u_h)|^2\mathrm{d}x \to 0, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |u_j - u_h|^2\mathrm{d}x \to 0.$$

Dunque la successione $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$, quindi $u_k \to u$ fortemente in $H^1(\mathbb{R}^n)$ e $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \rho$. $\square$

Capitolo 6

Appendice

Elencheremo in questo capitolo, senza dimostrazione, tutti quei risultati classici di cui abbiamo pensato fosse superflua la dimostrazione, in quanto vista e rivista in diversi corsi.

Definizione 6.0.11. Sia $S \subset \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$. Definiamo

$$E^{m,p}(S) = \left\{ u \in C^m(\bar{S}) : \sum_{|\alpha| \leq m} \int_S |\partial^\alpha u(x)|^p \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Diremo che $u \in L^p(S)$ ha derivata forte fino all'ordine m nello spazio $L^p(S)$ se esiste una successione $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset E^{m,p}$ per cui

- $u_k \xrightarrow{L^p(S)} u$;
- $\{\partial^\alpha u\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $L^p(S)$ per ogni $|\alpha| \leq m$.

Diremo invece che u ha derivata debole fino all'ordine m se per ogni $|\alpha| \leq m$ esiste $u^\alpha \in L^p(S)$ per cui

$$\int_s \varphi(x) u^\alpha(x) \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_S \partial^\alpha \varphi(x) u(x) \mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(S).$$

Definizione 6.0.12. Sia $p \geq 1$ e sia $m \geq 1$ un intero. Definiamo lo spazio di Sobolev $W^{m,p}(S) = \{f : S \to \mathbb{R} \text{ misurabili } : \|f\|_{W^{m,p}(S)} < \infty\}$ dove la norma è

$$\|f\|_{W^{m,p}(S)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(S)}$$

o equivalentemente

$$\|f\|_{W^{m,p}(S)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(S)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

con $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e

$$\|D^\alpha u\|_{L^p(S)} = \left(\sum_{|\beta| \le |\alpha|} \left\| \frac{\partial^{|\beta|} u}{\partial x_1^{\beta_1} ... \partial x_n^{\beta_n}} \right\|_{L^p(S)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposizione 6.0.13. *Sia $p \in [1, \infty[$. Allora lo spazio $C_0^\infty(S)$ fatto dalle funzioni $f : S \to \mathbb{R}$ derivabili con continuità infinite volte a supporto compatto è denso in $L^p(S)$.*

Corollario 6.0.14. *Lo spazio di Schwartz delle funzioni a decrescenza rapida all'infinito*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}$$

è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $p \ge 1$.

Teorema 6.0.15 (Formula di Inversione)**.** *La trasformata di Fourier ristretta allo spazio di Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} \mathrm{d}x$$

è un isomorfismo lineare ed in particolare, se $f \in S(\mathbb{R}^n)$, allora

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(-x) \tag{6.1}$$

Teorema 6.0.16. *La trasformata di Fourier si estende in modo unico ad un isomorfismo lineare di $L^2(\mathbb{R}^n)$ in sé, che denotiamo con lo stesso simbolismo. In particolare si ha*

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^n \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}(\mathcal{F}(x))(-x) \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

inoltre, posto per $R > 0$ e per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\varphi_R(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\{|x| \le R\}} \varphi(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} \mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\psi_R(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\{|\xi| \le R\}} \hat{\psi}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} \mathrm{d}\xi, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

risulta

$$\lim_{R \to \infty} \|\varphi_R - \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0 \qquad \lim_{R \to \infty} \|\psi_R - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Proposizione 6.0.17 (Disuguaglianza di Young). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $p, q \geq 1$; allora*

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

L'uguaglianza vale solo se $|a|^p = |b|^q$.

Proposizione 6.0.18 (Disuguaglianza di Hölder). *Sia Ω uno spazio misurato con misura μ e sia $p \geq 1$. Sia $p' \geq 1$ l'esponente coniugato di p, ovvero*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Si definisce inoltre $p' = \infty$ se $p = 1$. Allora date due funzioni misurabili $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$, si ha $fg \in L^1(\Omega)$ e inoltre

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Proposizione 6.0.19 (Disuguaglianza di Hölder generalizzata). *Consideriamo $p_i, r \geq 1$, $i = 1, ..., n$, tali che*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r}.$$

Allora, se $fi \in L_{p_i}(\Omega)$ per ogni i, si ha $\prod_{i=1}^n f_i \in L^r(\Omega)$ e vale

$$\Big\| \prod_{i=1}^{n} f_i \Big\|_{L^r(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Lemma 6.0.20 (Lemma di Fatou). *Se $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione di funzioni misurabili non negative definite su uno spazio misurato (S, Σ, μ), allora*

$$\int_S \liminf_{k \to \infty} f_k \, d\mu \leq \liminf_{k \to \infty} \int_S f_k \, d\mu.$$

Teorema 6.0.21 (Teorema di Lebesgue). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme misurabile, e sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili definite su Ω, tali che:*

- *$f_k(x) \to f(x)$ q.o. in Ω;*
- *$|f_k(x)| \leq g(x)$ q.o. in Ω, per ogni $k \in \mathbb{N}$,*

ove g è una fissata funzione sommabile e non negativa su Ω. Allora

$$\lim_{k \to \infty} \int_\Omega f_k(x) \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x) \mathrm{d}x.$$

Teorema 6.0.22 (Teorema di Beppo Levi)**.** *Sia (X, Σ, μ) uno spazio di misura e $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili su Σ tali che valga $0 \leq f_k \leq f_{k+1}$ q.o. Allora il limite puntuale $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ esiste q.o. e si ha*

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu.$$

Teorema 6.0.23 (Teorema di immersione di Sobolev)**.** *Sia S un sottoinsieme limitato e aperto di $\mathbb{R}^n$, dotato di frontiera di classe C^1. Sia $u \in W^{m,p}(U)$.*

1. *Se $m < \frac{n}{p}$ allora $u \in L^q(S)$, dove $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$. Si ha inoltre la stima:*

$$\|u\|_{L^q(S)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(S)}$$

dove la costante C dipende solo da k, p, n e S.

2. *Se $m > n/p$ allora u appartiene allo spazio di Hölder $C^{m-[n/p]-1,\gamma}(S)$, dove*

$$\gamma = \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p}$$

se n/p non è un intero, oppure γ è un qualsiasi numero positivo minore di 1, se n/p è un intero. Si ha inoltre la stima

$$[u]_\gamma^{m-[n/p]-1} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(S)}$$

dove la costante C dipende solo da k, p, n, γ e S.

Teorema 6.0.24. *Sia X uno spazio di Banach riflessivo. Sia $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in X; allora $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione debolmente convergente.*

Teorema 6.0.25 (Rellich-Kondrakov)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio lipschitziano aperto e limitato, e sia $1 \leq p < n$. Definendo*

$$p^* := \frac{np}{n-p},$$

lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ è immerso con continuità nello spazio $L^{p^*}(\Omega)$, ed è immerso con compattezza nello spazio $L^q(\Omega)$, per ogni $1 \leq q < p^*$:

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega), \qquad W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega), \quad 1 \leq q < p^*.$$

Teorema 6.0.26 (Teorema della divergenza)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato con frontiera C^1 e sia $F \in C^1(A, \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale. Allora*

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle \mathrm{d}\sigma(x),$$

dove ν è il versore normale a $\partial\Omega$, diretto verso l'esterno di Ω.

Proposizione 6.0.27. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme aperto limitato con frontiera $\partial\Omega$. Se u e v sono due funzioni differenziabili con continuità su $\overline{\Omega}$, allora vale la formula di integrazione per parti*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} uv\,\nu_i \,\mathrm{d}\sigma - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x.$$

Teorema 6.0.28 (Teorema di Fubini)**.** *Siano $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ e $(Y, \mathfrak{G}, \lambda)$ due spazi misurati. Ad ogni funzione $f(x, y)$ che sia $\mathfrak{G} \times \mathfrak{F}$-misurabile su $X \times Y$ e ad ogni $x \in X$ si può associare la funzione f_x definita in Y nel seguente modo*

$$f_x(y) = f(x, y).$$

Analogamente si definisce per ogni $y \in Y$ la funzione f_y tale che

$$f_y(x) = f(x, y).$$

Tali funzioni sono rispettivamente $\mathfrak{F}$-misurabile e $\mathfrak{G}$-misurabile.

- *Se la funzione f è positiva e se*

  $$\phi(x) = \int_Y f_x \mathrm{d}\lambda \qquad \psi(y) = \int_X f_y \mathrm{d}\mu$$

  allora ϕ è $\mathfrak{F}$-misurabile e ψ è $\mathfrak{G}$-misurabile, inoltre

  $$\int_X \phi \mathrm{d}\mu = \int_{X\times Y} f \mathrm{d}(\mu \otimes \lambda) = \int_Y \psi \mathrm{d}\lambda$$

  dove $\mu \otimes \lambda$ è la misura prodotto delle due misure μ e λ;

- *se la funzione f è complessa e se*

  $$\phi^*(x) = \int_Y |f_x| d\lambda \qquad \int_X \phi^* d\mu < \infty$$

  allora $f \in L^1(\mu \otimes \lambda)$;

- *se $f \in L^1(\mu\otimes\lambda)$ allora $f_x \in L^1(\lambda)$ per quasi tutti gli $x \in X$ e $f_y \in L^1(\mu)$ per quasi tutti gli $y \in Y$. Inoltre, per le funzioni definite in precedenza quasi ovunque si ha $\phi(x) \in L^1(\mu)$ e $\psi(y) \in L^1(\lambda)$.*

Proposizione 6.0.29. *Siano $a_i \in \mathbb{R}^+$ e $\lambda_i \in (0, 1)$ per ogni $i = 1, ..., n$, in modo che valga $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Allora vale la seguente disuguaglianza*

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \geq \prod_{i=1}^n a_i^{\lambda_i}.$$

Teorema 6.0.30 (Teorema dei Residui). *Sia Ω un insieme aperto del piano complesso $\mathbb{C}$. Siano $z_1, \ldots, z_n$ punti di Ω. Sia inoltre γ una curva semplice chiusa in $\Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ tale che $\{z_1, \ldots, z_n\}$ sia contenuto nel sottoinsieme limitato di $\mathbb{C}$ delimitato da γ. Se $f(z)$ è una funzione olomorfa sul dominio $\Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$, allora l'integrale di linea della funzione su γ è dato da*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} I_{z_k}(\gamma)\,\mathrm{Res}_{z_k}(f), \tag{6.2}$$

dove $\mathrm{Res}_{z_k}(f)$ denota il residuo di f in z_k, e $I_{z_k}(\gamma)$ è l'indice di avvolgimento della curva γ attorno a z_k.

Teorema 6.0.31. *Siano $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ con μ nulla sui sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ di dimensione di Hausdorff $n-1$. Allora esiste ψ convessa su $\mathbb{R}^n$ il cui gradiente $\nabla\psi$ è una mappa di push-forward tra μ e ν. Sebbene ψ non sia unica, la mappa $\nabla\psi$ è univocamente determinata μ-q.o.*

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema esula dagli scopi della nostra tesi. Per una dimostrazione fare riferimento a McCann [8]. □

Proposizione 6.0.32. *Siano $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$, e $n \in \mathbb{N}^+$ e definiamo σ in questa maniera:*

$$\sigma = \begin{cases} \frac{(m-1)n+m}{n-m} & m < n, \\ \infty & m \geq n. \end{cases}$$

Considerata l'equazione alle derivate parziali

$$\mathrm{div}(|\nabla u|^{m-2}\nabla u) + f(u) = 0$$

allora se $f(t) = -t^P + t^Q$ esiste al più un ground state radiale con le condizioni $0 \leq P \leq \sigma - 1$ e $P < Q < \sigma$.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema esula dagli scopi della nostra tesi. Per una dimostrazione fare riferimento a Pucci-Serrin [10]. □

Teorema 6.0.33 (Prima forma geometrica di Hahn-Banach). *Sia X uno spazio vettoriale topologico, e siano K, H sottoinsiemi non vuoti, convessi e disgiunti di X, con K aperto. Allora esiste un funzionale lineare $F : X \to \mathbb{C}$, continuo e non nullo, tale che*

$$\sup_K \Re(F) \leq \inf_H \Re(F).$$

Teorema 6.0.34 (Seconda forma geometrica di Hahn-Banach)**.** *Sia X uno spazio vettoriale topologico localmente convesso di Hausdorff, e siano K, H convessi non vuoti e disgiunti di X, con K chiuso e H compatto. Allora esiste un funzionale $F : X \to \mathbb{C}$ lineare, continuo e non nullo tale che*

$$\sup_K \Re(F) < \inf_H \Re(F).$$

Definizione 6.0.35. Sia $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(X,\mu)$. Diremo che $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è uniformemente integrabile se per ogni $\epsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ tale che per ogni E misurabile con $\mu(E) < \delta$ vale $\int_E |f_k| \mathrm{d}\mu < \epsilon$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Definizione 6.0.36. Sia $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(X,\mu)$. Diremo che $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è fondamentale in misura se per ogni $\eta > 0$, $\forall\epsilon > 0$ $\exists\nu \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $h, j \geq \nu$

$$\mu(\{x \in X : |f_h(x) - f_j(x)| > \delta\}) < \epsilon.$$

Teorema 6.0.37 (Teorema di Egorov)**.** *Sia $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(X,\mu)$ uniformemente integrabile e fondamentale in misura. Allora esiste $f \in L^1(X,\mu)$ tale che $f_k \to f$ in $L^1(X,\mu)$.*

Bibliografia

[1] E. Gagliardo, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ricerche di Mat., Napoli 7, 102–137, (1958).

[2] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 13, n°2 , p. 115-162, (1959).

[3] I. Ekeland, *On the variational principle*, Journal of Mathematical Analisys and Applications 47, 324-353 (1974).

[4] W.A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Commun. Math. Phys. 55, 149-162, (1977).

[5] P.L. Lions, *Symétrie et compacité dans les espaces de Sobolev*, Journal of Mathematical Analisys and Applications 49, 315-334, (1982).

[6] H. Berestycki, P.L. Lions, *Nonlinear scalar field equations, I existence of a ground state*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Volume 82, Issue 4, pp 313-345, (1983).

[7] R. McCann, *A convex theory for interacting gases and equilibrium crystals*, PhD Thesis (1994).

[8] R. McCann, *Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps*, Vol.80, No.2, Duke Mathematical Journal, (1995).

[9] R. McCann, *A Convexity Principle for Interacting Gases*, Advances in Mathematics 128, 153-179, (1997).

[10] P. Pucci, J. Serrin, *Uniqueness of ground states for quasilinear elliptic operators*, Indiana University Mathematics Journal 47(2), 501-528, (1998).

[11] R.J. Gardner, *The Brunn-Minkowski inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 39, 355–405, (2002).

[12] M. Del Pino, J. Dolbeault *Best constants for Gagliardo–Nirenberg inequalities and applications to nonlinear diffusions*, J. Math. Pures Appl. 81, 847–875, (2002).

[13] R.A. Adams, J.J.F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Elsevier, Amsterdam (2003).

[14] M. Agueh, *Sharp Gagliardo–Nirenberg inequalities and Mass Transport Theory*, Journal of Dynamics and Differential Equations, Vol. 18, No. 4, (2006).

[15] J. Bellazzini, V. Benci, M. Ghimenti, A.M. Micheletti, *On the existence of the fundamental Eigenvalue of an Elliptic problem in* $\mathbb{R}^n$, Adv. Nonlinear Stud. 7, 439-458, (2007).

[16] M. Agueh, *Gagliardo–Nirenberg inequalities involving the gradient* L^2*-norm*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346, 757–762,(2008).

[17] M. Agueh, *Sharp Gagliardo–Nirenberg Inequalities via p-Laplacian Type Equations*, Nonlinear differ. equ. appl. 15, 457–472, (2008).

[18] A. Burchard, *A short course on rearrangement inequalities*, (2009), sorgente web: http://www.math.toronto.edu/almut/rearrange.pdf.

[19] M.E. Taylor, *Partial differential equations III, 2nd Edition*, Springer-Verlag, New York, (2011).

[20] P. Acquistapace, *Appunti di Analisi Funzionale*, Pisa, (2012), sorgente web: http://www.dm.unipi.it/ acquistp/anafun.pdf

[21] P. Acquistapace, *Appunti di Analisi Convessa*, Pisa, (2012), sorgente web: http://www.dm.unipi.it/ acquistp/anacon.pdf

[22] L. Schütz, J.S. Ziebell, J.P. Zingano, P.R. Zingano, *Sharp pointwise estimates for functions in the Sobolev spaces* $H^s(\mathbb{R}^n)$, Advances in Differential Equations and Control Processes, v. 16, p. 45-53, (2016).