Il “valore rendez-vous” di uno spazio metrico

27 Gennaio 2006

Indice

1 Introduzione **2**

2 La teoria dei giochi **3**
- 2.1 Gioco in forma normale 5

3 Osservazioni e risultati preliminari **8**

4 Il teorema di Gross **12**

5 Esempi **19**
- 5.1 Primi esempi 19
- 5.2 Valore rendez-vous di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ 21
- 5.3 Proprietà della distanza media in spazi di Banach 22
  - 5.3.1 Spazi di dimensione finita 23
  - 5.3.2 Spazi di dimensione infinita 25
  - 5.3.3 Caso complesso 28

6 Domande aperte **29**

Riferimenti bibliografici **30**

1 Introduzione

Nel 1964 Gross pubblicò un articolo ([3]) in cui compariva questo sorprendente risultato: *Dato uno spazio metrico compatto e connesso* (X, d)*, esiste una unica costante* $R = R(X, d)$*, detta il valore rendez-vous di* X*, tale che per ogni insieme finito* $\{x_1, \cdots, x_n\}$ *di punti di* X *(non necessariamente distinti), si può trovare un* $x \in X$ *tale che:* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_i, x) = R$.

Tale lavoro ha suscitato molta curiosità e stimolato la pubblicazione di un'ampia letteratura. Da un lato si è cercato di calcolare il valore rendez-vous in moltissimi casi concreti, sviluppando adeguate tecniche di calcolo che hanno permesso la determinazione di tale valore per molti spazi abbastanza generali ([5],[6],[8],[10]), osservando tuttavia che in casi relativamente semplici la soluzione non è ancora stata trovata. D'altra parte recenti articoli mostrano che la nozione di valore rendez-vous di uno spazio metrico trova svariati collegamenti con altri enti matematici di grande importanza, in particolar modo nell'ambito della teoria del potenziale. Questi corposi sviluppi, per quanto interessanti, non possono trovar posto in questa tesi di primo livello, e per essi rimandiamo a [9],[10],[11],[12].

La dimostrazione del Teorema di Gross richiede l'uso di risultati della teoria dei giochi. Per questo motivo farò prima una breve introduzione sui concetti fondamentali di questa affascinante branca della matematica enunciando (senza darne dimostrazioni, per le quali si rimanda a [1],[2]) i principali teoremi, soprattutto quelli che serviranno nel seguito della tesi.

Finita questa parte esporrò il Teorema di Gross insieme con altri due teoremi apparsi nello stesso articolo, con le relative dimostrazioni; faremo anche diversi esempi di spazi in cui è stato calcolato il valore rendez-vous.

L'ultima parte sarà dedicata ad enunciati relativi a generalizzazioni del Teorema di Gross o a casi un po' più complicati in cui è stato calcolato il valore rendez-vous; per le relative dimostrazioni rimanderò agli articoli originali.

2 La teoria dei giochi

La data di nascita della teoria dei giochi coincide con l'uscita di un articolo di von Neumann nel 1928. È un settore relativamente nuovo della matematica, che negli ultimi 50 anni ha avuto notevoli sviluppi, anche grazie agli stimoli ricevuti dalle sue numerose applicazioni. In questa introduzione ne descrivo brevemente prima i concetti principali in maniera intuitiva e poi i risultati più importanti, limitati questi ultimi a quelli che saranno utilizzati in seguito. Per le definizioni dei concetti faccio riferimento a quelle date da von Neumann nel suo primo lavoro, senza considerare altri punti di vista.

La teoria dei giochi tratta di *giochi di strategia*, cioé di quelli in cui l'esito finale dipende sia da decisioni prese dai giocatori sia dal caso (in seguito chiamato equivalentemente fortuna o sfortuna) e non solo da quest' ultimo. Un esempio di gioco di pura fortuna è il lancio della moneta; nel gioco delle carte invece intervengono entrambi i fattori (caso ed abilità) mentre gli scacchi sono un gioco di pura strategia.

Le decisioni dei giocatori vengono prese in base alle regole del gioco (stabilite a priori) e a determinate *"circostanze"*. Questo concetto può essere definito come l'insieme delle informazioni a disposizione del giocatore, nel momento in cui deve prendere la sua decisione, sul corso precedente del gioco. Per esempio, negli scacchi entrambi i giocatori sono informati esattamente su tutto quanto accaduto durante la partita mentre nella briscola un giocatore non può sapere (a meno che non imbrogli !!) quale sia la carta pescata dal suo avversario di volta in volta.

Molto importante e delicata è la definizione di *strategia*: la strategia di un giocatore (in un fissato gioco) è un piano completo di decisioni che determinano il suo comportamento durante il gioco, cioé le possibili mosse al variare di tutte le situazioni che possono crearsi durante una partita. A primo impatto questa sembra una definizione strana, perché prescrive che il giocatore non scelga di volta in volta la sua mossa ma le determini tutte all'inizio della partita. In realtà essa va interpretata immaginando che il giocatore stabilisca all'inizio tutte le possibili decisioni al variare delle fasi del gioco. Ovviamente in un gioco reale egli ne userebbe solo una mentre tutte le altre sarebbero inutili ma non è ciò che ci interessa.

Consideriamo, dunque, tutte le eventualità, ma osserviamo che in alcuni casi potrebbe essere utile fare una selezione. Una strategia, infatti, potrebbe includere decisioni per circostanze che non possono realizzarsi avendo fatto precedentemente una determinata scelta. Per esempio, nel gioco degli scacchi, la perdita di un alfiere rende impossibile qualsiasi decisione che preveda l'utilizzo di quest'ultimo; tutte le decisioni di questo tipo potrebbero essere escluse dalla strategia. Se convenga o no farlo è dettato solo dal motivo per cui stiamo studiando il gioco.

Un gioco ha come posta la vittoria, ovvero un guadagno, che per semplicità possiamo supporre essere la vincita di una somma di denaro. Ad ogni strategia può quindi essere assegnato un valore che indica la vincita (o la perdita se il valore è negativo) corrispondente a quella strategia. Supponiamo quindi di avere delle funzioni reali definite sull'insieme delle strategie dei diversi giocatori che svolgono questo compito e le chiameremo equivalentemente *funzioni utilità* o *funzioni vincita* o *payoff functions*.

Avendo a disposizione le funzioni utilità è facile definire il concetto, alquanto delicato, di *razionalità* del giocatore: il comportamento razionale consiste nel tentare di massimizzare la propria funzione vincita. Si gioca, cioé, cercando di ottenere sempre il guadagno massimo possibile. Si suppone che ogni giocatore si comporti in questa maniera.

Le funzioni utilità dipendono però anche dalle strategie usate dagli altri giocatori e questo suggerisce che alle volte può essere utile non tentare di raggiungere il proprio massimo a tutti i costi ma di *scendere a compromessi*. Per esempio in un gioco fra tre persone, se due giocatori ad un certo punto si accorgono di potersi mettere d'accordo per assicurarsi una certa vincita (inferiore a quella massima) e che altrimenti il terzo potrebbe impedire loro qualsiasi guadagno, per i primi due è sicuramente più vantaggioso ("razionale") ricevere almeno quella vincita invece di rischiare di non avere niente.

Per alcuni tipi di giochi esistono situazioni del tipo appena descritto, con la sola differenza però che ogni giocatore, e non solo una parte di essi, ha la possibilità di garantirsi una vincita. Sotto determinate condizioni esiste per ogni giocatore una strategia che gli consente di fare ciò e viene chiamata *strategia ottimale*. In tal caso si dice che il gioco ha un punto di equilibrio, detto *punto di equilibrio di Nash*, che corrisponde alla scelta, da parte di ogni giocatore, della sua strategia ottimale.

Un particolare tipo di gioco sono i "giochi di due persone a somma zero", cioé quelli in cui ciò che vince un giocatore coincide con quanto perde l'altro. Dalla definizione segue che in tal caso le funzioni vincita sono una l'opposto dell'altra. Ne segue che, se il gioco ha un punto di equilibrio, la vincita che corrisponde a tale punto è uguale (in valore assoluto) per entrambi i giocatori e prende il nome di *valore* del gioco.

A questo punto è naturale distinguere tra due tipi di giochi: quelli in cui è ammesso, anche in minima parte, l'accordo tra i giocatori, e quelli in cui non è previsto alcun tipo di contrattazione. Quelli del primo tipo si chiameranno *giochi cooperativi*, gli altri *non cooperativi*.

Nei giochi non di pura strategia o in quelli che prevedono delle ripetizioni può essere utile usare, o mischiare tra loro, strategie diverse (magari per confondere l'avversario!) e valutare con quale probabilità possa verificarsi una certa configurazione di gioco rispetto ad un'altra. A tale probabilità corrisponde una distribuzione di probabilità sull'insieme delle strategie. In questa situazione, la cosa che interessa ogni giocatore è il valore atteso (la "speranza", probabilisticamente parlando) della sua funzione utilità. Si parla in questo caso di strategie miste.

Dopo aver dato una idea intuitiva degli elementi principali della teoria dei giochi, possiamo darne le definizioni formali.

2.1 Gioco in forma normale

Ecco le definizioni di *gioco in forma normale* secondo von Neumann:

Definizione 2.1. *Un gioco di n persone è dato da n insiemi non vuoti $\Sigma_i,\ i = 1, \cdots, n$ ed n funzioni reali A_i definite sul prodotto $\Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \cdots \times \Sigma_n$ degli spazi.*

Gli insiemi Σ_i non sono altro che gli insiemi delle strategie dei vari giocatori e le A_i le funzioni vincita. Un gioco sarà indicato in seguito così:

$$\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n; A_1, \dots, A_n\}.$$

Gli spazi di strategie possono essere dotati di particolari strutture, per esempio di spazio topologico o, come sarà in seguito, di spazio metrico.

Definizione 2.2. *Un gioco $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n; A_1, \dots, A_n\}$ è detto gioco a somma costante se esiste un valore reale c tale che*

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = c \quad \textit{per ogni } \sigma_1 \in \Sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Sigma_n.$$

Se $c = 0$, il gioco è detto "gioco a somma zero".

Definizione 2.3. *Se gli insiemi Σ_i hanno tutti cardinalità finita, il gioco è detto finito.*

Definizione 2.4. *Se gli insiemi Σ_i sono tutti sottoinsiemi chiusi e limitati dei numeri reali il gioco sarà detto continuo.*

Attenzione: in un gioco continuo le funzioni vincita non sono necessariamente continue; abbiamo informazioni solo sull'insieme delle strategie.

Definizione 2.5. *Se l'insieme Σ delle strategie di un giocatore U in un gioco Γ è l'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, allora un insieme non vuoto $\widetilde{\Sigma}$ di distribuzioni di probabilità su Σ è detto una classe di strategie miste per U in Γ.*

Definizione 2.6. *Sia* $\Gamma = \{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n; A_1, \ldots, A_n\}$ *un gioco continuo in cui le* A_i *sono funzioni Borel-misurabili limitate. Sia* $\widetilde{\Sigma}_i \quad i = 1, \ldots, n$ *una classe di strategie miste dell'i-esimo giocatore nel gioco* Γ*. Se per ogni n-upla* $(F_1, \ldots, F_n)$ *di strategie miste definiamo i valori attesi delle funzioni vincita di ogni giocatore così:*

$$E_i(F_1, \ldots, F_n) = \int_{\Sigma_1} \cdots \int_{\Sigma_n} A_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) dF_1(\sigma_1) \cdots dF_n(\sigma_n),$$

allora il gioco $\widetilde{\Gamma} = \{\widetilde{\Sigma}_1, \ldots, \widetilde{\Sigma}_n; E_1, \ldots, E_n\}$ *è chiamato estensione mista di* Γ*.*
Se $\widetilde{\Sigma}_i$ *è la classe di tutte le distribuzioni di probabilità su* Σ_i *per ogni* $i = 1, \ldots, n$ *allora* $\widetilde{\Gamma}$ *è detta l'estensione mista massimale di* Γ*.*
Se $\widetilde{\Sigma}_i$ *è la classe di tutte le distribuzioni discrete di probabilità su* Σ_i *per ogni* $i = 1, \ldots, n$ *allora* $\widetilde{\Gamma}$ *è detta l'estensione mista discreta massimale di* Γ*.*

Nel caso di distribuzioni di probabilità discrete, l'integrale nella formula del valore atteso è sostituito da una serie assolutamente convergente. Per esempio se F_1 è la strategia discreta che assegna le probabiltà x_k ad ogni $\sigma_1^{(k)}$, allora

$$\int_{\Sigma_1} A_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) dF_1(\sigma_1) = \sum_{k=1}^{\infty} A_1(\sigma_1^{(k)}, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) x_k.$$

Nel caso in cui Γ sia in particolare un gioco finito si hanno le seguenti definizioni :

Definizione 2.7. *Sia* $\Sigma = \{\sigma^{(1)}, \ldots, \sigma^{(n)}\}$ *l'insieme finito di strategie di un giocatore U in un gioco* Γ*. Una strategia mista per U in* Γ *è una n-upla* $X = (x_1, \ldots, x_n)$ *di numeri reali non negativi tali che*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 1.$$

Definizione 2.8. *Sia* $\Gamma = \{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n; A_1, \ldots, A_n\}$ *un gioco finito,* $\Sigma_i = \{\sigma_i^{(1)}, \ldots, \sigma_i^{(N_i)}\}$ *e sia* $\widetilde{\Sigma}_i$ *l'insieme delle strategie miste di ogni giocatore. Per ogni n-upla* $(X_1, \ldots, X_n)$ *di strategie miste* $X_i = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{N_i}})$ *il valore atteso delle rispettive funzioni vincita è:*

$$E_i(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{N_n} A_i(\sigma_1^{(i_1)}, \ldots, \sigma_n^{(i_n)}) x_{1_{i_1}} \cdots x_{n_{i_n}}$$

e il gioco $\widetilde{\Gamma} = \{\widetilde{\Sigma}_1, \ldots, \widetilde{\Sigma}_n; E_1, \ldots, E_n\}$ *è l'estensione mista di* Γ*.*

Definizione 2.9. *Dato il gioco* $\Gamma = \{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n; A_1, \ldots, A_n\}$*, una* n*-upla di strategie* $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \ldots \times \Sigma_n$ *è detta punto di equilibrio del gioco se per ogni* $i = 1, \ldots, n$

$$A_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i, \sigma_{i+1}^*, \ldots, \sigma_n^*) \leq A_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$$

$$\textit{per ogni} \quad \sigma_i \in \Sigma_i.$$

Inoltre la strategia σ_i^* *che, insieme alle strategie degli altri giocatori, costituisce un punto di equilibrio del gioco è detta strategia di equilibrio per l'*i*-esimo giocatore.*

3 Osservazioni e risultati preliminari

Analizziamo per prima cosa i giochi di due persone a somma costante.

Non è restrittivo supporre che la costante sia uguale a zero. Infatti, dato il gioco $\Gamma = \{\Sigma_1, \Sigma_2; A_1, A_2\}$ tale che $A_1 + A_2 = c$, basta considerare $\Gamma' = \{\Sigma_1, \Sigma_2; A_1, A_2 - c\}$ che è equivalente al primo con la sola differenza che $c = 0$.

Se un gioco di due persone è a somma zero, si ha ovviamente $A_1 = -A_2$ e quindi A_2 può essere omesso dalla descrizione del gioco; scriveremo quindi

$$\Gamma = \{\Sigma_1, \Sigma_2; A_1\} = \{\Sigma_1, \Sigma_2; A\}.$$

Dato $\Gamma = \{\Sigma_1, \Sigma_2; A\}$, per un punto di equilibrio (σ_1^*, σ_2^*) vale

$$A_1(\sigma_1, \sigma_2^*) \leq A_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \quad \text{per ogni } \sigma_1 \in \Sigma_1$$

$$A_2(\sigma_1^*, \sigma_2) \leq A_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \quad \text{per ogni } \sigma_2 \in \Sigma_2$$

e queste relazioni possono essere riscritte così:

$$A(\sigma_1, \sigma_2^*) \leq A(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \leq A(\sigma_1^*, \sigma_2)$$

per ogni $\sigma_1 \in \Sigma_1$ e per ogni $\sigma_2 \in \Sigma_2$.

Lemma 3.1. *Una condizione equivalente a quest'ultima relazione è:*

$$A(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} A(\sigma_1, \sigma_2^*) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} A(\sigma_1^*, \sigma_2).$$

La funzione A ha quindi, nel punto (σ_1^*, σ_2^*) un punto di massimo rispetto a σ_1 e di minimo rispetto a σ_2. Per questo motivo, i punti di equilibrio vengono detti anche punti di sella.

Teorema 3.2. *Un gioco di due persone a somma zero $\Gamma = \{\Sigma_1, \Sigma_2; A\}$ con funzione payoff A limitata, ammette un punto di equilibrio se e solo se*

$$\max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} A(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} A(\sigma_1, \sigma_2).$$

Se

$$\max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} A(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \sup_{\sigma_1 \in \Sigma_1} A(\sigma_1, \sigma_2) = v,$$

allora le strategie σ_1^* del primo giocatore per cui

$$\inf_{\sigma_2 \in \Sigma_2} A(\sigma_1^*, \sigma_2) = v$$

vengono dette strategie di equilibrio e sono quelle per cui il σ_2-inf è massimo. Lo stesso vale per le strategie σ_2^*.

Inoltre $A(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = v$ per ogni punto di equilibrio (σ_1^*, σ_2^*).

Segue dal teorema che in realtà gli inf e i sup in realtà sono dei min e dei max e le strategie di equilibrio vengono chiamate anche *strategie minimax.*

Definizione 3.3. *Se il gioco* $\Gamma = \{\Sigma_1, \Sigma_2; A\}$ *ha un punto di equilibrio, allora*

$$v = v(\Gamma) = \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} A(\sigma_1, \sigma_2) = \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} A(\sigma_1, \sigma_2)$$

è il valore del gioco. Le strategie di equilibrio vengono dette anche strategie ottimali.

Definizione 3.4. *Dato un insieme X, per gioco di due persone e a somma zero su X intendiamo un gioco $\Gamma = \{\Sigma_1, \Sigma_2; A\}$ in cui $\Sigma_1 = \Sigma_2 = X$.*

Definizione 3.5. *Siano X, Y due spazi topologici e sia $\phi : X \to \mathcal{P}(Y)$ una multifunzione. Diciamo che ϕ è semicontinua superiormente nel punto $x_0 \in X$ se per ogni aperto $A \supseteq \phi(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 in X tale che*

$$\phi(U) \subseteq A.$$

Diciamo che ϕ è semicontinua superiormente in X se ϕ è semicontinua superiormente in ogni punto di X.

Definizione 3.6. *Siano X uno spazio vettoriale topologico e di Hausdorff e $K \subset X$ un sottoinsieme. Una multifunzione $\phi : K \to \mathcal{P}(K)$ si dice chiusa se il grafico $G(\phi) = \bigcup_{x \in K} (x, \phi(x))$ è chiuso in $X \times \mathcal{P}(X)$.*

Lemma 3.7. *Se K è compatto e $\phi : K \to \mathcal{P}(K)$ è una multifunzione tale che $\phi(x)$ è un chiuso per ogni x, allora ϕ è semicontinua superiormente se e solo se è chiusa.*

Lemma 3.8. *Dati uno spazio vettoriale topologico e di Hausdorff X, un sottoinsieme $K \subset X$, una multifunzione $\phi : K \to \mathcal{P}(K)$, allora ϕ è chiusa se e solo se dato un qualsiasi net x_δ contenuto in X si ha che:*

$$x_\delta \to x,\ y_\delta \in \phi(x_\delta),\ y_\delta \to y \ \Rightarrow\ y \in \phi(x).$$

Teorema 3.9 (Kakutani)**.** *Sia X uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e di Hausdorff. Siano $K \subseteq X$ un sottoinsieme non vuoto, convesso e compatto, $\phi : K \to \mathcal{P}(K)$ una multifunzione semicontinua superiormente e tale che $\phi(x)$ è convesso, chiuso e diverso dal vuoto per ogni x. Allora esiste $x \in K$ tale che $x \in \phi(x)$.*

Lemma 3.10. *Uno spazio vettoriale topologico e di Hausdorff è metrico se e solo esiste un sistema fondamentale di intorni dell'origine che è numerabile.*

Teorema 3.11 (Glicksberg)**.** *[4] Sia (X, d) uno spazio metrico compatto. Consideriamo un gioco di due persone e a somma zero su X e supponiamo che la funzione payoff sia continua. Allora esiste un punto di equilibrio per l'estensione mista massimale di tale gioco su X.*

Dimostrazione :

Siano V e C i due giocatori, $M(x, y)$ ed $N(x, y)$ le rispettive funzioni di vincita, entrambe funzioni continue nello spazio $X \times X$. Poiché il gioco è a somma zero, si ha $M(x, y) + N(x, y) = 0$.

Come spazio delle misure considero $(\mathcal{C}(X))^*$. Quelle positive e di massa minore o uguale ad 1 formano il sottoinsieme B^*_+ della palla unitaria B^* di $(\mathcal{C}(X))^*$, che è compatta nella *topologia debole** indicata anche come ω^*, ed è ovviamente convessa.

Scelgo μ e ν due elementi di B^*_+ e definisco le speranze di V e C rispettivamente come:

$$E(\mu, \nu) = \int_X \int_X M(x, y) d\mu(x) d\nu(y),$$

$$F(\mu, \nu) = -E(\mu, \nu).$$

Definisco inoltre:

$$G(\mu) = \left\{ \nu \in B^*_+ : E(\mu, \nu) = \inf_{\nu'} E(\mu, \nu') \right\}$$

e

$$F(\nu) = \left\{ \mu \in B^*_+ : E(\mu, \nu) = \sup_{\mu'} E(\mu', \nu) \right\}.$$

Questi sono insiemi convessi, non vuoti e ω^*-chiusi perché E è continua nelle due variabili. Allora se definisco $\Phi(\mu, \nu) = (F(\nu), G(\mu))$, questa è una multifunzione semicontinua superiormente. Infatti, essendo B^*_+ ω^*-compatto, basta dimostrare che Φ ha grafico chiuso in $B^*_+ \times B^*_+ \times B^*_+ \times B^*_+$. Sia allora (μ_i, ν_i, y_i, z_i) un net contenuto nel grafico di Φ, tale che $\mu_i \overset{*}{\rightharpoonup} \mu, \nu_i \overset{*}{\rightharpoonup} \nu, y \overset{*}{\rightharpoonup} y, z_i \overset{*}{\rightharpoonup} z$, con $\mu, \nu, y, z \in B^*_+$.

La condizione di stare nel grafico di Φ significa che $(y_i, z_i) \in F(\nu_i) \times G(\mu_i)$, cioè che

$$E(y_i, \nu_i) = \sup_{\mu' \in B^*_+} E(\mu', \nu_i)$$

e

$$E(\mu_i, z_i) = \inf_{\nu' \in B^*_+} E(\mu_i, \nu').$$

Poiché E è ω^*-continua, si ha

$$E(y_i, \nu_i) \longrightarrow E(y, \nu)$$

e

$$E(\mu_i, z_i) \longrightarrow E(\mu, z).$$

Resta da provare che $(y, z) \in F(\nu) \times G(\mu)$, ossia che

$$E(y, \nu) = \sup_{\mu''} E(\mu'', \nu)$$

e

$$E(\mu, z) = \inf_{\nu''} E(\mu, \nu'').$$

Infatti, per ogni $\nu'' \in B^*_+$ e per ogni $\mu'' \in B^*_+$ si ha:

$$E(\mu, z) = \lim_i E(\mu_i, z_i) = \lim_i \inf_{\nu' \in B^*_+} E(\mu_i, \nu') \leq \lim_i E(\mu_i, \nu'') = E(\mu, \nu'')$$

e

$$E(y, \nu) = \lim_i E(y_i, \nu_i) = \lim_i \sup_{\mu' \in B^*_+} E(\mu', \nu_i) \geq \lim_i E(\mu'', \nu_i) = E(\mu'', \nu).$$

Da queste ultime due relazioni e dal fatto che il grafico di Φ è chiuso (cioè che $(y, z) \in F(\nu) \times G(\mu)$), segue che (μ, ν) è un punto di sella. $\square$

4 Il teorema di Gross

Teorema 4.1 (Gross)**.** *Sia (X,d) uno spazio metrico compatto e connesso. Allora esiste una unica costante $R = R(X,d)$ tale che per ogni insieme finito $\{x_1, \cdots, x_n\}$ di punti di X (non necessariamente distinti), esiste $x \in X$ tale che:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_i, x) = R.$$

Teorema 4.2. *Se R è la costante relativa al Teorema di Gross di uno spazio metrico compatto e connesso di diametro positivo D, allora $D/2 \leq R < D$.*

Teorema 4.3. *Dati D e R numeri reali tali che $0 < D/2 \leq R < D$, esiste uno spazio metrico compatto e connesso di diametro D tale che $R(X,d) = R$.*

Alle dimostrazioni dei tre teoremi premettiamo la seguente proprietà del valore rendez-vous.

Osservazione 4.4. *Siano (X,d) uno spazio metrico con valore rendez-vous $R(X,d)$ e α una costante reale non negativa. Se con αd indichiamo la distanza: per ogni $x, y \in X$ $(\alpha d)(x,y) = \alpha\ d(x,y)$, allora $R(X, \alpha d) = \alpha\, R(X,d)$.*

Dimostrazione

Infatti per ogni insieme finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ e per ogni $P \in X$ si ha

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\alpha d)(x_i, P) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha\, d(x_i, P) = \alpha \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_i, P)\right]$$

e ciò implica la tesi. □

In particolare, ponendo $\alpha = 1/diam(X)$, si può supporre che d sia tale che $diam(X)$ sia uguale ad 1.

Dimostrazione del Teorema di Gross:

∃) Consideriamo nello spazio (X, d) il gioco di due persone a somma zero così definito: ognuno dei due giocatori sceglie un punto dello spazio e la funzione vincita è la distanza tra i punti. Essendo la distanza un valore sempre positivo, uno dei due giocatori perderà sempre. Ciò è un po' strano ma possiamo pensare che egli sia disposto a giocare lo stesso, con l'obiettivo di minimizzare la perdita.

Essendo X metrico e compatto, siamo nelle ipotesi del teorema di Glicksberg che, applicato al nostro caso, ci dice che il gioco ha un valore e una strategia ottimale. Chiamiamo V il valore del gioco e facciamo vedere che V è proprio la costante R che cercavamo.

Siano dunque B il giocatore che tende a minimizzare, C l'altro e consideriamo la strategia mista che consiste nello scegliere n punti dello spazio e assegnare ad ognuno di essi peso $1/n$. Se C utilizza la strategia pura di scegliere un punto P, allora per qualsiasi scelta di punti da parte di B si ha, per definizione di valore di un gioco:

$$\min_{P\in X} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x_i, P) \leq V.$$

Se B e C si scambiano la strategie , si ha invece:

$$\max_{P\in X} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(P, x_i) \geq V.$$

Essendo la distanza una funzione simmetrica, le speranze dei due giocatori sono esattamente la stessa funzione. Poiché X è connesso e tale speranza è continua, esiste un P in X per cui vale l'uguaglianza

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x_i, P) = V.$$

L'esistenza è così dimostrata.

!) Dimostro l'unicità con un ragionamento per assurdo. Sia quindi K un'altra costante che soddisfa il teorema; possiamo supporre $K > V$. Sappiamo che il gioco misto ha un valore. Se chiamiamo S^1 ed S^2 l'insieme delle strategie miste rispettivamente di B (il minimizzatore) e di C (il massimizzatore) si ha

$$\min_{S^1} \max_{S^2} U(s_1, s_2) = V,$$

dove U è la funzione payoff. Nel caso di strategie discrete, la funzione U vale

$$U(s_1, s_2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j d(x_i, y_j)$$

supponendo che $s_1 \in S^1$ consista nello scegliere i punti x_i con pesi λ_i e $s_2 \in S^2$ i punti y_j con pesi μ_j. Allora

$$\inf_{S^1} \sup_{P \in X} U(s_1, P) \leq V.$$

Essendo U continua,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists s^* \in S^1 : \inf_{S^1} \sup_{P \in X} U(s_1, P) \leq \sup_{P \in X} U(s^*, P) < V + \epsilon$$

e infine si ottiene

$$\sup_{P \in X} U(s^*, P) < V + \epsilon \quad \Rightarrow \quad U(s^*, P) < V + \epsilon \quad \forall P \in X.$$

Se s^* è la strategia che consiste nello scegliere gli n punti $x_1, ..., x_n$ con pesi $\lambda_1, ..., \lambda_n$, $(\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1)$, abbiamo che

$$U(s^*, P) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d(x_i, P) < V + \epsilon \quad \forall P \in X.$$

Abbiamo approssimato U con una mistura finita, cioé con una funzione a scalino.

Resta ora da dimostrare che è possibile farlo con una strategia che abbia pesi tutti uguali. In pratica dobbiamo portare U nella forma richiesta nella tesi.

Nel caso banale in cui X consista di un solo punto il teorema è vero. Altrimenti, poiché X è connesso, ogni punto è di accumulazione. In particolare, ogni x_i ha punti arbitrariamente vicini.

Supponiamo che i λ_i siano tutti razionali con denominatore comune N, cioé $\lambda_i = \frac{m_i}{N}$ per ogni i. Allora

$$1 = \lambda_1 + ... + \lambda_n = \frac{m_1}{N} + ... + \frac{m_n}{N} = \frac{m_1 + ... + m_n}{N}$$
$$\Rightarrow \quad m_1 + ... + m_n = N.$$

Scegliamo N punti z_j con m_i di essi vicini a x_i e assegnamo ad ognuno di essi peso $1/N$. Dalla continuità di U segue che

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} d(z_j, P) < V + \epsilon \quad \forall P \in X.$$

Per dimostrare ciò, definiamo $\mu_i = \sum_{j=1}^{i} m_j$.

Per ogni i fissato

$$\forall \eta_i > 0 \quad \exists \xi_i > 0 \;\text{ t.c. }\; d(z_j, x_i) < \xi_i \quad \Rightarrow$$

$$|d(z_j, P) - d(x_i, P)| < \eta_i \quad \forall j = \mu_{i-1} + 1, ..., \mu_i.$$

Ma allora

$$d(z_j, P) < d(x_i, P) + \eta_i \quad \forall j = \mu_{i-1} + 1, ..., \mu_i \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{N} \sum_{h=\mu_{i-1}+1}^{\mu_i} d(z_h, P) \; < \; \frac{1}{N} \sum_{h=\mu_{i-1}+1}^{\mu_i} (d(x_i, P) + \eta_i) =$$

$$= \frac{m_i}{N} d(x_i, P) + \frac{m_i}{N} \eta_i = \lambda_i d(x_i, P) + \frac{m_i}{N} \eta_i.$$

Ponendo $\xi := \min\{\xi_1, ..., \xi_n\}$ e $\eta := \max\{\eta_1, ..., \eta_n\}$ si ha che

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad d(z_j, x_i) < \xi \quad \forall j = \mu_{i-1} + 1, \ldots, \mu_i \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} d(z_j, P) < \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i d(x_i, P) + \frac{m_i}{N} \eta \right) = V + \epsilon + n\eta < V + 2\epsilon$$

purchè $\eta < \epsilon/n$, ed è quello che volevamo.

Poiché i razionali sono densi nei reali questo metodo di approssimazione può essere usato anche per λ_i generici.

Quindi per ogni $\epsilon > 0$ esistono N punti $x_1, ..., x_N$ tali che

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} d(x_i, P) \le V + \epsilon \quad \forall P \in X.$$

Poiché avevamo supposto $K > V$, scegliendo $0 < \epsilon < K - V$ si ha che il valore K non può mai essere raggiunto per alcun P. Il caso $K < V$ può essere trattato alla stessa maniera e così l'unicità è dimostrata. $\square$

Dimostrazione del Teorema 4.2:

Sia V la costante trovata nella dimostrazione del Teorema di Gross. Ricordo che essa è il valore di un gioco a due persone a somma zero in cui ogni giocatore sceglie un punto nello spazio e la funzione vincita è la distanza tra le loro scelte. Uso le stesse notazioni utilizzate nella precedente dimostrazione.

$D/2 \le V$). Dalla compattezza di X segue che esistono due punti x_1 e x_2 che hanno distanza proprio D. Se C sceglie una coppia di tali punti ognuno dei quali con probabilità 1/2, poiché V è il valore del gioco, per qualsiasi strategia:

$$V \geq \min_{P \in X} \frac{1}{2} \left[d(x_1, P) + d(x_2, P) \right].$$

Per la disuguaglianza triangolare

$$d(x_1, P) + d(x_2, P) \geq d(x_1, x_2) = D$$

e la prima disuguaglianza è dimostrata.

$V < D$) Osserviamo che ogni strategia pura di B assicura che $V \leq D$ poiché D è l'estremo superiore della funzione vincita. Resta da vedere che V è diverso da D. Supponiamo quindi per assurdo $V = D$. Dati due punti a distanza D, applicando ad essi il Teorema di Gross otteniamo un altro punto la cui media delle distanze dai due punti iniziali è D. Non potendo essere la distanza maggiore di D si ha che tutti e tre i punti distano esattamente D l'uno dall'altro. Iterando questo procedimento, si trova una successione di punti a distanza reciproca D. Ma tale successione non può contenere una sottosuccessione convergente e ciò non è possibile in uno spazio compatto. L'assurdo dimostra che $V < D$. $\square$

Dimostrazione del Teorema 4.3:

Non possiamo dare come dimostrazione di questo Teorema quella presentata da Gross nel suo articolo perché è sbagliata. Infatti egli dice:

"Per l'osservazione 4.4 possiamo supporre $D = 1$. Rileggendo il Teorema 4.3 nell'ambito della teoria dei giochi, per il Teorema 4.2 dobbiamo trovare un opportuno spazio metrico compatto e connesso per cui il valore del gioco è un dato numero V, $1/2 \leq V < 1$.

Lo spazio che scegliamo è omeomorfo all'intervallo $I = [0, 1]$. Se poniamo

$$D_\lambda(x, y) = \frac{(1 + \lambda)|x - y|}{1 + \lambda|x - y|}, \quad \forall x, y \in I, \quad \forall \lambda \geq 0$$

come funzione di vincita, allora D_λ è una metrica su I se $|x - y|$ coincide con la norma euclidea. Poiché D_λ è continua, il nuovo spazio è ancora compatto e connesso ed ha diametro uguale ad 1 per ogni λ. Se $\lambda = 0$ si ha che $V = 1/2$ (questo fatto sarà dimostrato nell'esempio 5.1), mentre per $\lambda \to +\infty$, si ha che $V \to 1$. Poiché V è una funzione continua di λ, il teorema 4.3 è dimostrato."

L'errore sta nel dire che $V \to 1$ quando $\lambda \to +\infty$. Abbiamo dimostrato infatti che V vale costatemente $\frac{1}{2}$.
Per una dimostrazione si veda in [8] il Teorema 7. $\square$

Diamo ora una dimostrazione elementare dell'esistenza di $R(X,d)$.

Dimostrazione elementare dell'esistenza nel Teorema 4.1:

Sia (X,d) uno spazio metrico compatto e connesso. Poniamo $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$ (E è l'unione di tutte le n-uple ordinate di elementi di X al variare di n). Per ogni $F \in E, F = (y_1, \cdots, y_n)$ poniamo

$$\Theta_F(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x, y_i).$$

Poiché $\Theta_F : (X,d) \longrightarrow R^+$ è continua, $\Theta_F(X)$ è un sottoinsieme compatto e connesso di R^+. Quindi è un intervallo chiuso e limitato: $\Theta_F(X) = [a_F, b_F]$, con $a_F \leq b_F \in R^+$.

È evidente che $R(X,d)$ esiste se e solo se $\bigcap_{F\in E} [a_F, b_F] \neq \emptyset$. Dimostriamo questo verificando che per ogni F e $G \in E$ si ha $a_F \leq b_G$. Osserviamo che, posto $G = \{z_1, \cdots, z_m\}$, si ha

$$a_F \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(z_l, y_i) \quad \forall l = 1, 2, ..., m$$

e

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} d(y_k, z_j) \leq b_G \quad \forall k = 1, 2, ..., n.$$

Resta quindi da dimostrare che

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(z_l, y_i) \leq \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} d(y_k, z_j)$$

per qualche $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ e qualche $l \in \{1, 2, \cdots, m\}$. Supponiamo per assurdo che per tutti i $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ e tutte le $l \in \{1, 2, \cdots, m\}$ si abbia

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(z_l, y_i) > \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} d(y_k, z_j).$$

Sommando prima entrambi i membri su $l = 1, 2, ..., m$ si ha

$$\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(z_l, y_i) > \sum_{j=1}^{m} d(y_k, z_j)$$

e poi sommando di nuovo entrambi i membri su $k = 1, 2, ..., n$

$$\sum_{l=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} d(z_l, y_i) > \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d(y_k, z_j).$$

Essendo d una distanza (dunque simmetrica) questo è assurdo e quindi abbiamo dimostrato la nostra tesi. $\square$

5 Esempi

5.1 Primi esempi

Esempio 5.1. *Siano $I = [0, 1]$ e d la distanza euclidea. Allora $R(I, d) = \frac{1}{2}$.*

Di questo fatto diamo due dimostrazioni: nella prima, per calcolare il valore rendez-vous, sfruttiamo il teorema di Gross; nella seconda facciamo finta di non esserne a conoscenza e troviamo lo stesso risultato (ovviamente!!). Tutto questo sforzo per far vedere che in casi semplici il teorema può essere dimostrato con tecniche semplici.

Dimostrazione 1:

Se scegliamo $x_1 = 0$ ed $x_2 = 1$ si ha, per ogni $y \in I$, $\frac{1}{2}(d(x_1, y)+d(x_2, y)) = \frac{1}{2}[(y - 0) + (1 - y)] = \frac{1}{2}$. Per il teorema di Gross da questo segue che $R(I, d) = \frac{1}{2}$. □

Dimostrazione 2:

Siano $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$. Definiamo $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, data da $f(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} |x_i - t|$. Allora $f(0) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} x_i$ e $f(1) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} x_i$. Quindi si ha che $f(0) \leq 1/2 \leq f(1)$ oppure $f(0) \geq 1/2 \geq f(1)$. In entrambi i casi, applicando il teorema dei valori intermedi si ha che esiste $y \in I$ tale che $f(y) = 1/2$. Data l'esistenza, la dimostrazione dell'unicità in questo caso è molto semplice. Infatti scegliendo $x_1 = 0$ ed $x_2 = 1$ si ha, per ogni $y \in I$, $\frac{1}{2}(d(x_1, y) + d(x_2, y) = \frac{1}{2}[(y - 0) + (1 - y)] = \frac{1}{2}$. Cioé $R(I, d)$ può essere solo uguale ad $\frac{1}{2}$. □

In tutti gli esempi successivi utilizziamo il Teorema di Gross, ossia supponiamo l'esistenza e l'unicità del valore rendez-vous.

Esempio 5.2. *Se $X = [a, b]$, $a < b$, allora $R(X, d) = \frac{b-a}{2}$.*

Dimostrazione :

Ovvia conseguenza del fatto che $R(\alpha X + b, d) = \alpha R(X, d)$. □

Esempio 5.3. *Se con X indichiamo il bordo del triangolo equilatero di lato 1 e con d la metrica euclidea, allora $R(X, d) = \frac{2+\sqrt{3}}{6}$.*

Dimostrazione :

Siano x_1, x_2, x_3 i vertici del triangolo. Per $y \in X$ la quantità $d(x_1, y) + d(x_2, y) + d(x_3, y)$ assume il valore minimo nel punto di mezzo di uno qualsiasi dei tre lati. Se con y_0 indichiamo uno di essi, allora per ogni $y \in X$ si ha:

$$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} d(x_i, y) \geq \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} d(x_i, y_0) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{6},$$

da cui $R(X, d) \geq \frac{2+\sqrt{3}}{6}$. D'altra parte, chiamando x_1', x_2', x_3' i punti di mezzo dei tre lati, la quantità $d(x_1', y) + d(x_2', y) + d(x_3', y)$ assume il valore massimo quando y è uno qualsiasi dei tre vertici. Sia y_1 uno di essi. Allora per ogni $y \in X$:

$$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} d(x_i', y) \leq \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} d(x_i', y_1) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{6}.$$

Questa relazione implica $R(X, d) \leq \frac{2+\sqrt{3}}{6}$ e con il risultato precedente otteniamo la tesi. $\square$

Con lo stesso metodo si calcola il valore rendezvouz di un qualsiasi poligono regolare in $\mathbb{R}^2$. Se con X_n indichiamo l'n-agono regolare nel piano, si ha:

$$R(X_n, d) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}cos\frac{2\pi}{n} - cos\frac{2k\pi}{n} - cos\frac{2(k-1)\pi}{n}\right]^{1/2}$$

se n è pari mentre

$$R(X_n, d) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}cos\frac{2\pi}{n} - cos\frac{2k\pi}{n} - cos\frac{2(k-1)\pi}{n}}{2 - 2cos\frac{(n-1)\pi}{n}}\right]^{1/2}$$

se n è dispari.

Esempio 5.4. *Sia B la palla chiusa di centro l'origine e raggio 1 nello spazio $\mathbb{R}^m$ e d la metrica euclidea. Allora R(B,d)=1.*

Dimostrazione :

Per ogni $y \in B$ si ha $d(y, 0) \leq 1$ e dunque $R(B, d) \leq 1$. Se z_1 e z_2 sono due punti diametralmente opposti di B, si ha $d(z_1, z_2) = 2$ e per ogni $y \in B$ vale $\frac{1}{2}[d(y, z_1) + d(y, z_2)] \geq \frac{1}{2}d(z_1, z_2) = 1$. Allora $R(B, d)$ è proprio uguale ad 1. $\square$

5.2 Valore rendez-vous di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$

In questo paragrafo calcoliamo il valore rendez-vous di alcuni sottoinsiemi "semplici" di $\mathbb{R}^n$ ed enunciamo un Teorema che consente di determinarlo in casi abbastanza generali.

Esempio 5.5. *Sia $I^2 = [0,1]\times[0,1]$ il quadrato di lato unitario in $\mathbb{R}^2$. Allora $R(I^2, d) = D/2 = \sqrt{2}/2$.*

Dimostrazione :

Infatti, $R(I^2, d) \geq D/2 = \sqrt{2}/2$ per il teorema 5. D'altra parte scegliendo $n = 1$ e come P il punto $(1/2, 1/2)$ (cioé il centro del quadrato) si ha per ogni $x \in I^2$ che $d(x, P) \leq \sqrt{2}/2 = D/2$. □

Esempio 5.6. *Sia $X = I^n = [0,1]^n$ il cubo n dimensionale di lato unitario in $\mathbb{R}^n$. Allora $R(X) = D/2 = \frac{\sqrt{n}}{2}$.*

Dimostrazione :

La dimostrazione è uguale a quella dell'esempio del caso bidimensionale, tranne che il punto da scegliere è $P = (1/2, \ldots, 1/2)$. □

Osservazione 5.7. *Dati X un sottoinsieme compatto e connesso di $\mathbb{R}^n$ e U un'isometria dello spazio, si ha che $R(UX) = R(X)$.*

Osservazione 5.8. *Sia $Y \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro compatto e convesso. Allora, se con D indichiamo la diagonale principale di Y, $R(Y) = D/2$.*

Dimostrazione :

L'idea della dimostrazione è identica a quella usata nell'esempio 5.6. Il punto da scegliere è semplicemente il punto di mezzo del segmento che unisce due vertici di massima distanza. □

Un qualsiasi "parallelepipedo n-dimensionale" può essere portato con una isometria nel primo 2^n-ante e con un vertice nell'origine. Inoltre tale poliedro può sempre essere ottenuto come immagine, tramite un'applicazione lineare, del cubo I^n. Segue da queste ipotesi anche che una delle diagonali maggiori (se non è l'unica !), è l'immagine del punto $1 = (1, \ldots, 1) \in I^n$.

Lemma 5.9. *Siano $X = I^n$, L un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^n$ in sé, A la matrice associata ad L ed $Y = LX$. Allora Y è contenuto tutto nel primo 2^n-ante se e solo se gli elementi a_{ij} della matrice A sono tutti non negativi.*

Teorema 5.10. *Nelle ipotesi del lemma,*

$$R(Y) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij})^2}}{2}.$$

I risultati precedenti sono semplici corollari di questo Teorema molto generale apparso in [8] di cui riporto solo l'enunciato:

Teorema 5.11. *Sia X un sottoinsieme compatto e convesso di uno spazio normato e d la distanza indotta dalla metrica. Posto $t(X) = \min\{r | X \subseteq B(x, r), x \in X\}$ si ha $R(X, d) = t(X)$.*

5.3 Proprietà della distanza media in spazi di Banach

In uno spazio di Banach X di dimensione infinita, gli insiemi limitati e chiusi non sono in generale compatti e quindi il teorema di Gross non è applicabile. Notiamo però che se il duale X^* è separabile, allora la palla unitaria B di X è compatta per la topologia debole ω, e (B, ω) è uno spazio metrizzabile. Quindi esiste il valore rendez-vous relativo a tale metrica (non a quella indotta dalla norma). Lo stesso discorso si applica, quando X è separabile, alla palla unitaria B^* di X^*, munita della topologia debole*. I riferimenti bibliografici rigurdanti questa parte sono [5],[6].

Definizione 5.12. *Sia E uno spazio di Banach di dimensione qualsiasi. Diciamo che E ha la proprietà del valor medio se la sfera unitaria $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ di E (dotata della metrica indotta) ammette un unico valore rendez-vous, che denoteremo con $r(E)$.*

Esempio 5.13. *Se lo spazio E ha dimensione finita, per il Teorema di Gross la palla unitaria chiusa $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ ha valore rendez-vous; esso è pari ad 1.*

Infatti il diametro di B è uguale a 2 e quindi $R(B) \geq 1$. D'altra parte, per ogni scelta di punti $\{x_1, \dots, x_n\} \in B$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x_i, O) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \leq 1$, da cui $R(B) \leq 1$.

Da questo risultato segue anche l'esempio 5.4

Teorema 5.14. *Sia E uno spazio di Banach reale di dimensione infinita. Allora la palla unitaria chiusa B di E ha valore rendez-vous uguale a 1.*

Dimostrazione :

Si ha B=$\{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Siano $x_1, \dots, x_n \in B$. Scegliamo $y \in B$ per cui

$$\left\| y - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \geq 1,$$

ma allora

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|y - x_i\| \geq \left\| y - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \geq 1.$$

D'altra parte $0 \in B$ e $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|0 - x_i\| \leq 1$. Per il teorema dei valori intermedi esiste $x \in B$ per cui vale l'uguaglianza. Resta da dimostrare l'unicità. Sia allora α un altro numero reale positivo con la proprietà voluta. Sia $z \in B$ di norma 1. Allora

$$\frac{\|x - z\| + \|x + z\|}{2} + \frac{\|z - x\| + \|z + x\|}{2} \geq \|z\| = 1 \quad \forall x \in B,$$

da cui $\alpha \geq 1$. Ma come prima $\|x - 0\| \leq 1$ per ogni $x \in B$, quindi $\alpha \leq 1$ e il teorema è dimostrato. $\square$

5.3.1 Spazi di dimensione finita

Se E ha dimensione finita, la sfera unitaria S è compatta e quindi segue dal teorema di Gross che E ha la proprietà del valor medio. Nel caso di dimensione finita sono quindi ovvi l'esistenza e l'unicità del valore rendezvous di S. Tutt'altro che semplice è il calcolo di tali valori:

Teorema 5.15. *Per ogni $n \geq 2$, indicata con Γ la funzione gamma di Eulero, si ha*

$$r(l^2(n)) = \frac{2^{n-1}\ [\Gamma(\frac{n}{2})]^2}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\frac{2n-1}{2})}.$$

In particolare, $r(\ell^2(2)) = r(\mathbb{R}^2) = \frac{4}{\pi}$ e $r(\ell^2(3)) = r(\mathbb{R}^3) = \frac{4}{3}$.

Calcoliamo $r(\ell^1(n))$ e $r(\ell^\infty(n))$.

Abbiamo bisogno prima di questa:

Osservazione 5.16. *Sia $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \ell^1(n)$, $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i| \leq 1$. Allora*

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} [\|x - e_i\|_1 + \|x + e_i\|_1] = 1 + \frac{n-1}{n} \|x\|_1.$$

La dimostrazione segue dal fatto che

$$|\alpha - 1| + |\alpha + 1| = 2 \text{ per ogni } |\alpha| \leq 1.$$

Teorema 5.17. *Per ogni $n \geq 2$, $r(\ell^1(n)) = 2 - \frac{1}{n}$*

Dimostrazione :
Sia $x \in S$. Per l'osservazione:

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \|x - e_i\|_1 + \|x + e_i\|_1 = 1 + \frac{n-1}{n} \|x\|_1,$$

e quindi $r(\ell^1(n)) = 2 - \frac{1}{n}$ per il teorema di Gross. $\square$

Teorema 5.18. *Lo spazio $\ell^\infty(n)$ ha la proprietà del valor medio per ogni $n \geq 2$ e $r(\ell^\infty(n)) = \frac{3}{2}$.*

Dimostrazione :
Sia $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S$. Allora

$$\|x - e_1\|_\infty + \|x + e_1\|_\infty \leq \max(|\alpha_1 - 1|, 1) + \max(|\alpha_1 + 1|, 1) \leq 3$$

e quindi

$$\frac{1}{2}(\|x - e_1\|_\infty + \|x + e_1\|_\infty) \leq \frac{3}{2}.$$

Dimostriamo ora l'altra disuguaglianza. Siano $b_1 = (1, 1, \ldots, 1)$ e $b_2 = (-1, 1, \ldots, 1)$. Per stimare il termine $\|x-b_1\|+\|x+b_1\|+\|x-b_2\|+\|x+b_2\|$ dal basso, possiamo assumere, senza perdita di generalità, che $\alpha_1 = 1$ o $\alpha_2 = 1$. Nel primo caso si ha

$$\|x - b_1\| + \|x + b_1\| + \|x - b_2\| + \|x + b_2\| \geq$$

$$\geq |\alpha_2 - 1| + 2 + 2 + |\alpha_2 + 1| = 6,$$

mentre nel secondo

$$\|x - b_1\| + \|x + b_1\| + \|x - b_2\| + \|x + b_2\| \geq$$

$$\geq |\alpha_1 - 1| + 2 + |\alpha_1 + 1| + 2 = 6$$

e da ciò segue

$$\frac{1}{4}(\|x - b_1\| + \|x + b_1\| + \|x - b_2\| + \|x + b_2\|) \geq \frac{3}{2}.$$

Il Teorema di Gross assicura la tesi. $\square$

5.3.2 Spazi di dimensione infinita

Teorema 5.19. *Lo spazio di Hilbert* ℓ^2 *ha la proprietà del valor medio con valore rendez-vous* $r(\ell^2) = \sqrt{2}$.

Dimostrazione :

Sia $S = \{x \in \ell^2 : \|x\| = 1\}$ e siano $x_1, \dots, x_n \in S$. Scegliamo un $x \in [x_1, \dots, x_n]^\perp$, $\|x\| = 1$. Allora

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x - x_i\|_2 = \sqrt{2}$$

e l'esistenza è dimostrata.

Sia dunque α un'altra costante con la proprietà desiderata. Se $x_1 \in S$, allora per ogni $x \in S$ si ha

$$\frac{1}{2} [\|x_1 - x\|_2 + \|x_1 + x\|_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 - (x_1, x)} + \sqrt{1 + (x_1, x)}\right] \leq \sqrt{2}$$

e quindi $\alpha \leq \sqrt{2}$. Per l'altra disuguaglianza osserviamo che per ogni $x \in S$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x - e_i\| \;=\; \frac{\sqrt{2}}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 - (x, e_i)} \;\geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{2}}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 - |(x, e_i)|} \geq \frac{\sqrt{2}}{n} \sum_{i=1}^{n} (1 - (x, e_i)) \geq \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi $\alpha \geq \sqrt{2}$. □

Teorema 5.20. c_0 *ed* ℓ^1 *non hanno la proprietà del valor medio.*

Dimostrazione :

Caso c_0: Sia, al solito, $S = \{x : \|x\| = 1\}$. Denotiamo con P_k la proiezione canonica sul sottospazio generato da $e_1, \dots, e_k$. Dati $x_1, \dots, x_n \in S$ scegliamo $k_0 \geq 2$ tale che $\|P_{k_0} x_i\| = 1$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Per il teorema 10 (con $n = k_0$) esiste un $x \in S$ tale che $(Id - P_{k_0})x = 0$ e $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|P_{k_0} x_i - x\| = \frac{3}{2}$. Quindi

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x_i - x\| \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|P_{k_0}(x_i - x)\| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|P_{k_0} x_i - x\| = \frac{3}{2}.$$

Per ogni $\epsilon > 0$ sia $k_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|(x_i, e_{k_1})| < \epsilon \text{ per ogni } i = 1, \dots, n.$$

Allora :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i - e_{k_1}\| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\max(|(x_i, e_{k_1}) - 1|, 1) < 1 + \epsilon.$$

Dal teorema dei valori intermedi segue che ogni $\alpha \in (1, \frac{3}{2}]$ ha la proprietà desiderata, che contraddice l'ipotesi di unicità.

Caso ℓ^1: Sia $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in S$. Per l'osservazione 5.17

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\|x - e_i\|_1 + \|x + e_i\|_1 = 2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \geq 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quindi, se esiste, il valore rendez-vous deve essere uguale a 2. Ma questo è impossibile: Sia $x_1 = (\beta_i)_i \in S$ con tutti i β_i positivi. Supponiamo che esista un $x = (\alpha_i)_i \in S$ tale che $\frac{1}{2}(\|x - x_1\| + \|x + x_1\|) = 2$. Segue che $\|x - x_i\| = \|x + x_i\| = \|x\| + \|x_i\|$ e quindi $|\alpha_i - \beta_i| = |\alpha_i - \beta_i| = |\alpha_i| + |\beta_i|$ per ogni i. Poiché $\beta_i > 0$ per ogni i, $\alpha_i = 0$ per ogni i e otteniamo una contraddizione. $\square$

In conclusione, nel caso di c_0 un qualsiasi valore appartenente all'intervallo $(1, \frac{3}{2}]$ può essere un valore rendez-vous per la sfera unitaria e quindi, non essendo unico quest'ultimo, $r(c_0)$ non esiste. Nel caso di ℓ^1 invece, non esiste alcuna costante che soddisfa la proprietà richiesta nel Teorema di Gross.

Il prossimo teorema dimostra che la riflessività non è una condizione necessaria per uno spazio di Banach per avere la proprietà del valor medio.

Teorema 5.21. *ℓ^∞ ha la proprietà del valor medio e $r(\ell^\infty) = \frac{3}{2}$.*

Dimostrazione :

Utilizziamo le notazioni del Teorema 5.20. Siano $x_i, \ldots, x_n \in S$. Senza perdita di generalità supponiamo che $\{x_1, \ldots, x_s\}$ sia il sottoinsieme di $\{x_1, \ldots, x_n\}$ tale che la norma degli x_i, per $i = 1, \ldots, s$, sia assunta su alcune coordinate; cioé $\|P_{k_0}x_i\| = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, s$ per qualche $k_0 \geq 2$. Per il Teorema 5.18, esiste un $y \in S$ tale che $(Id - P_{k_0})y = 0$ e $\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\|P_{k_0}x_i - y\| = \frac{3}{2}$.

Per $x_{s+1}, \ldots, x_n$ scegliamo $k_0 < a_{s+1} < a_{s+2} < \ldots < a_n$ tali che $|(x_i, e_{a_i})| \geq \frac{1}{2}$ per ogni $i = s+1, \ldots, n$. Poniamo $x = y + \sum_{i=s+1}^{n} -sgn(x_i, e_{a_i})e_{a_i}$. Chiaramente $x \in S$, $P_{k_0}x = y$ e quindi:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i - x\| \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{s}\|P_{k_0}x_i - y\| + \sum_{i=s+1}^{n}\|x_i - x\|\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{n}\left(\frac{3}{2}\cdot s + \sum_{i=s+1}^{n} |(x_i - x, e_{a_i})|\right) \geq$$

$$\geq \frac{s}{n}\cdot\frac{3}{2} + \frac{n-s}{s}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Se nessuno degli $x_i, \dots, x_n$ raggiunge la sua norma su un numero finito di coordinate (cioé se $s = 0$), si procede iniziando direttamente dal secondo passaggio.

Per l'altra disuguaglianza basta osservare che

$$\min(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|x_i - e_i\|, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|x_i + e_i\|) \leq \frac{3}{2}.$$

Per dimostrare l'unicità si procede in modo analogo a quello usato nel Teorema 5.18, cioé quello riguardante il caso finito dimensionale. □

Teorema 5.22. *[6] Sia (Ω, μ) uno spazio di misura non σ-finito. Allora per ogni $1 \leq p < \infty$, $L_p(\Omega, \mu)$ ha la proprietà del valor medio.*

Dimostrazione :

Esiste una successione x_n contenuta nella sfera unitaria di L_p tale che $|x_n| \wedge |x_m| = 0$ per ogni $n \neq m$, per l'Osservazione 5.23, se $r(L_p)$ esiste allora esso è uguale a $2^{\frac{1}{p}}$. Sia $\{x_1, \dots, x_n\}$ un insieme finito di punti in L_p. Allora $\bigcup_{i=1}^{n} supp(x_i)$ è σ-finito. Allora esiste un vettore unitario $y \in L_p$ tale che $|x_k| \wedge |y| = 0$ per ogni k e quindi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|y - x_i\| = 2^{\frac{1}{p}}.$$

La dimostrazione è così completa. □

Dimostriamo ora che la riflessività non è nemmeno una condizione sufficiente [6].

Osservazione 5.23. *Per ogni $1 \leq p < \infty$, sia $\{e_1, e_2, \dots\}$ la base canonica di ℓ_p. Allora per ogni $0 < \epsilon < 1$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in \ell_p$ con $\|x\| = 1$ si ha*

$$2^{\frac{1}{p}} - \epsilon < \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} \|e_i - x\|_p < 2^{\frac{1}{p}} + \epsilon.$$

Segue che se ℓ_p ha la proprietà del valor medio, allora $r(\ell_p) = 2^{\frac{1}{p}}$.

Osservazione 5.24. *Se $1 \le p < 2$, per ogni coppia $x, y \in L_p$,*

$$\frac{\|x+y\|}{2} + \frac{\|x-y\|}{2} \le \ 2^{\frac{1}{p}}$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $x \cdot y = 0$ quasi ovunque.

Teorema 5.25. *Se $1 \le p < 2$ allora ℓ_p e $L_p(0,1)$ non hanno la proprietà del valor medio.*

Dimostrazione :

Sia x un vettore unitario di ℓ_p (rispettivamente di $L_p(0,1)$) tale che $supp(x) = \mathbb{N}$ ($supp(x) = (0,1)$). Se y è un altro vettore unitario di ℓ_p (di $L_p(0,1)$), si ha $x \cdot y \neq 0$. Per l'osservazione precedente

$$\|x+y\|_p + \|x-y\|_p < 2^{1+\frac{1}{p}}$$

e per l'osservazione ciò implica che ℓ_p (L_p) non ha la proprietà del valor medio. □

5.3.3 Caso complesso

Teorema 5.26. *Per ogni $n \ge 2$, $r(\ell_\infty^n(\mathbb{C})) = r(\ell_\infty(\mathbb{C})) = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$.*

Teorema 5.27. *Posto*

$$E(p) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - p\sin^2 t}\ dt,\ \ p \in (-\infty, 1],$$

si ha $r(\ell_1^n(\mathbb{C})) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{\pi}E\left(\frac{-4n}{(n-1)^2}\right)\right)$ per ogni $n \ge 2$.

Teorema 5.28. *$\ell_1(\mathbb{C})$ non ha la proprietà del valor medio.*

Per le dimostrazioni si veda [7].

6 Domande aperte

Chiudo la tesi con alcune domande aperte.

Open question 6.1. *Qual è il valore rendez-vous di una generica ellisse?*

Open question 6.2. *Qual è il valore rendez-vous di un poligono generico del piano?*

Open question 6.3. *Se* $2 < p < \infty$, l_p *ha la proprietà del valor medio?*

Riferimenti bibliografici

[1] E. Burger, *Introduction to the theory of games*, USA 1963

[2] M.J. Osborne, A. Rubinstein, *A course in Game Theory*, MIT 1994

[3] O. Gross, *The rendez-vous value of a metric space*, Advances in game theory. Ann. of Math, Stud.52, 49-53 1964

[4] I. Glicksberg, *A furher generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points*, The RAND Corporation Research Memorandum, RM-478, October 1950

[5] R. Wolf, *On the average distance property of spheres in Banach spaces*, Arch. Math. 62, 338-344, 1994

[6] P.K. Lin, *The average distance property of Banach spaces*, Arch. Math 68, 496-502, 1997

[7] J.C. García-Vazquez, R.Villa, *The average distance property of the spaces $\ell_\infty^n(\mathbb{C})$ e $\ell_1^n(\mathbb{C})$*, Arch. Math. 76, 222-230, 2001

[8] J. Cleary, S. Morris, D. Yost, *Numerical Geometry - Numbers for Shapes*, The American Mathematical Monthly Vol. 93, No. 4, 260-275, Apr. 1986

[9] B. Farkas, Sz. Gy. Révész, *How magical rendez-vous numbers are explained by potential theory?*, arXiv: math. CA/0503423v1 21.3.2005

[10] B. Farkas, Sz. Gy. Révész, *Rendez-vous numbers in normed spaces*, arXiv: math. CA/0507603v1 29.7.2005

[11] B. Farkas, Sz. Gy. Révész, *Rendez-vous numbers of metric spaces - a potential theoretic approach*, arXiv: math. CA/0503427v1 31.3.2005

[12] R. Wolf, *On the average distance property and certain energy integrals*, Arch. Math. 35, 387-400, 1997