Bollettino U. M. I.
(5) **13**-B (1976), 760-777

1

Soluzioni periodiche di un'equazione iperbolica non lineare.

PAOLO ACQUISTAPACE (Pisa)

Summary. – *Equation* $u_{tt} - \alpha^2[a(x)u_x]_x = \varepsilon f(x, t, u)$, *depending on two real parameters* α, ε, *is considered;* f *is assumed to be* 2π*-periodic in* t. *An unique* 2π*-periodic solution is found for each sufficiently small value of* ε, *and for each* α *belonging to a dense, uncountable set which has Lebesgue measure zero.*

Questo lavoro tratta dello studio delle soluzioni periodiche di una equazione non lineare a derivate parziali con parte lineare iperbolica. La parte lineare è di tipo non dissipativo: ciò rende molto delicato lo studio delle soluzioni periodiche per la presenza di complessi fenomeni « di risonanza ».

Il problema viene in primo luogo ricondotto, senza perdita di regolarità, alla risoluzione di un problema lineare. Quest'ultimo, a sua volta, viene espresso in forma generalizzata e ricondotto ad un problema sui coefficienti di Fourier secondo schemi ben noti. Qui si sviluppa la parte più interessante della ricerca, che consiste nell'analisi di certe forme aritmetiche da cui dipende la maggiorazione delle soluzioni. In conclusione, l'esistenza di soluzioni periodiche è garantita per i valori del parametro α (cfr. la (1.1)) costituenti un insieme di misura nulla, ma denso e con la potenza del continuo.

Questo problema, nel caso particolare in cui la funzione $a(x)$ (cfr. sempre la (1.1)) è una costante positiva, è stato trattato da SOKOLOV in [7].

Ringrazio il prof. G. PRODI per avermi suggerito il problema e per gli utili colloqui sull'argomento.

1. – Consideriamo il seguente problema non lineare:

$$(1.1) \qquad \begin{cases} u_{tt} - \alpha^2[a(x)u_x]_x = \varepsilon f(x, t, u) & \forall (x, t) \in (0, 2\pi) \times \boldsymbol{R} \\ u(0, t) = u(2\pi, t) = 0 & \forall t \in \boldsymbol{R}, \end{cases}$$

ove $\varepsilon \geqslant 0$ è un piccolo parametro, α è un parametro reale, $a(x)$ è una funzione di classe $C^2[0, 2\pi]$, strettamente positiva, e tale che $a''(x)$ è a variazione limitata su $[0, 2\pi]$; infine $f(x, t, y)$ è una funzione $(0, 2\pi) \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ tale che:

i) $f(x, t, y)$ è misurabile in (x, t) per ogni $y \in \boldsymbol{R}$;

ii) $f(x, t, y)$ è lipschitziana in y uniformemente in (x, t), cioè

$$|f(x, t, y) - f(x, t, y')| \leqslant K|y - y'| \tag{1.2}$$

per quasi tutti gli $(x, t) \in (0, 2\pi) \times \boldsymbol{R}$ e per ogni $y, y' \in \boldsymbol{R}$;

iii) $f(x, t, y)$ è 2π-periodica in t, cioè

$$f(x, t, y) = f(x, t + 2\pi, y) \tag{1.3}$$

per quasi tutti gli $(x, t) \in (0, 2\pi) \times \boldsymbol{R}$ e per ogni $y \in \boldsymbol{R}$.

Si tratta di vedere per quali valori di α esistono soluzioni $u(x, t)$, 2π-periodiche, del problema (1.1), per ciascun valore abbastanza piccolo di ε.

Fissiamo anzitutto alcune notazioni. Poniamo:

T = spazio quoziente di $\boldsymbol{R}$ rispetto alla relazione di equivalenza: $t \sim t'$ se e solo se $t - t' = 2k\pi$ con $k \in \boldsymbol{Z}$;

$$\Omega = (0, 2\pi) \times T \; ; \qquad \Gamma = \partial\Omega = [\{0\} \cup \{2\pi\}] \times T \; ;$$

$L^2(\Omega)$ = spazio delle funzioni misurabili $u \colon \Omega \to \boldsymbol{R}$ tali che

$$\left[\int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} u^2 \, dx\right]^{\frac{1}{2}} \equiv \|u\|_{L^2((0,2\pi)\times(0,2\pi))} < +\infty \, .$$

Ovviamente T è omeomorfo alla circonferenza S^1, e $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Banach isomorfo ed isometrico allo spazio $L^2((0, 2\pi) \times \times (0, 2\pi))$.

Con queste notazioni, il problema (1.1) diventa:

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha^2 [a(x) u_x]_x = \varepsilon f(x, t, u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma . \end{cases} \tag{1.4}$$

Il problema (1.4) si intende nel senso generalizzato indicato dalla seguente

DEFINIZIONE 1.1. – Sia $g \in L^2(\Omega)$; diremo che $u \in L^2(\Omega)$ è soluzione generalizzata del problema

$$(1.5)\qquad \begin{cases} u_{tt}-\alpha^2[a(x)u_x]_x=g & \text{in } \Omega \\ u=0 & \text{su } \Gamma \end{cases}$$

se risulta

$$(1.6)\qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[u\varphi_{tt}-\alpha^2 u[a(x)\varphi_x]_x]\,dx\,dt=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} g\varphi\,dx\,dt$$

per ogni $\varphi\in C^2(\bar\Omega)$ tale che $\varphi=0$ su Γ.

Osservazione 1.2. – Notiamo che se $u\in L^2(\Omega)$ e se $f(x,t,y)$ verifica la condizione (1.3), allora $f(x,t,u(x,t))\in L^2(\Omega)$ e quindi il problema (1.4), inteso in senso generalizzato, è ben posto. Infatti è ben noto (cfr. [4]) che affinchè $f(x,t,u(x,t))\in L^2$ per ogni $u\in L^2$ è necessario e sufficiente che

$$|f(x,t,y)|\leqslant h(x,t)+B|y|$$

per quasi ogni $(x,t)\in(0,2\pi)\times\boldsymbol{R}$ e per ogni $y\in\boldsymbol{R}$, ove $h\in L^2$ e $B\geqslant 0$ è una costante: ora è ovvio che la (1.2) implica questa condizione. ■

Osservazione 1.3. – La definizione 1.1 dà effettivamente una generalizzazione del problema (1.5) inteso in senso classico, nel senso che se g appartiene a $C^0(\bar\Omega)$ ed $u\in C^2(\bar\Omega)$ è una funzione verificante la condizione (1.6) per ogni φ con le proprietà richieste, allora u è soluzione del problema (1.5) in senso classico. Infatti con due integrazioni per parti, tenendo conto della periodicità di u e φ e del fatto che $\varphi=0$ su Γ, dalla relazione (1.6) si ha:

$$(1.7)\qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} g\varphi\,dx\,dt=$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[u_{tt}-\alpha^2[a(x)u_x]_x]\varphi\,dx\,dt-\alpha^2\int_0^{2\pi}[a(x)u(x,t)\varphi_x(x,t)]_0^{2\pi}\,dt$$

per ogni $\varphi\in C^2(\bar\Omega)$ tale che $\varphi=0$ su Γ. Scegliamo in particolare $\varphi\in C_0^2(\Omega)$ (ricordiamo che $C_0^2(\Omega)=\{\varphi\in C^2(\bar\Omega)\colon \operatorname{supp}\varphi\subset\subset\Omega\}$); per tali φ risulta $\varphi_x=0$ su Γ, per cui la (1.7) si riduce a

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[u_{tt}-\alpha^2[a(x)u_x]_x-g]\varphi\,dx\,dt=0\,.$$

Da questa relazione, per l'arbitrarietà di $\varphi \in C_0^2(\Omega)$ e la periodicità di u e g, segue facilmente che

$$u_{tt} - \alpha^2[a(x)\,u_x]_x - g = 0 \quad \text{in } \bar{\Omega}\,, \tag{1.8}$$

e quindi nella (1.7) deve essere

$$\int_0^{2\pi} [a(x)\,u(x,t)\,\varphi_x(x,t)]_0^{2\pi}\,dt = 0$$

per ogni $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ tale che $\varphi = 0$ su Γ. Ma per tali funzioni φ la derivata φ_x può assumere su Γ valori arbitrari: si ottiene perciò

$$u = 0 \quad \text{su } \Gamma\,. \tag{1.9}$$

Da (1.8) e (1.9) segue che u è soluzione classica del problema (1.5). Viceversa, è chiaro che ogni soluzione classica del problema (1.5) verifica la relazione (1.6). ■

Veniamo ora alla risoluzione del problema (1.4), inteso nel senso generalizzato della definizione 1.1. Innanzitutto osserviamo che, la ricerca delle soluzioni periodiche del problema (1.4) per ε piccolo si riduce sostanzialmente ad un problema lineare. Si ha infatti:

PROPOSIZIONE 1.4. – *Fissato $\alpha \in \mathbf{R}$, supponiamo che per ogni $g \in L^2(\Omega)$ esista un'unica soluzione $u = Lg \in L^2(\Omega)$ del problema lineare* (1.5) *in senso generalizzato; supponiamo anche che l'operatore $L\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ sia continuo. Allora per ogni ε abbastanza piccolo il problema* (1.4) *ha una ed una sola soluzione generalizzata $u \in L^2(\Omega)$.*

DIMOSTRAZIONE. – Poniamo per ogni $u \in L^2(\Omega)$

$$F(u)(x,t) = f(x,t,u(x,t)) \qquad \forall (x,t) \in \Omega\,. \tag{1.10}$$

Per le ipotesi (1.2) e (1.3) e per l'osservazione 1.2, F è un operatore lipschitziano di $L^2(\Omega)$ in sè, di costante K (cfr. (1.2)). Ora, il problema (1.4) si può scrivere semplicemente nella forma

$$u = \varepsilon LF(u) \tag{1.11}$$

e l'operatore a secondo membro è evidentemente una contrazione di $L^2(\Omega)$ in sè per ε abbastanza piccolo; infatti

$$\|\varepsilon LF(u) - \varepsilon LF(u')\|_{L^2((0,2\pi)\times(0,2\pi))} \leqslant \varepsilon \|L\| K \|u - u'\|_{L^2((0,2\pi)\times(0,2\pi))} < \\ < \|u - u'\|_{L^2((0,2\pi)\times(0,2\pi))}$$

per $\varepsilon < 1/\|L\|\cdot K$. Poichè $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma $L^2((0, 2\pi)\times(0, 2\pi))$, si ottiene che per ogni $\varepsilon < 1/\|L\|\cdot K$ la (1.11) ha una ed una soluzione $\bar{u}$, che dunque è soluzione unica del problema (1.4). ■

Il nostro problema si è così tradotto in quello di trovare per quali $\alpha \in \boldsymbol{R}$ il problema lineare (1.5) ha soluzione unica dipendente con continuità dal termine noto. Consideriamo questo problema nel senso generalizzato della definizione 1.1: si tratta allora di trovare una unica $u \in L^2(\Omega)$ tale che

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[u\varphi_{tt} - \alpha^2 u[a(x)\varphi_x]_x]\,dx\,dt = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} g\varphi\,dx\,dt \tag{1.12}$$

per ogni $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ con $\varphi = 0$ su Γ.

Vogliamo anzitutto far vedere che la famiglia delle funzioni test per le quali deve valere la (1.12) può essere sostituita a tutti gli effetti da una famiglia numerabile di funzioni $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in\boldsymbol{N}}$, le quali costituiscono un sistema ortonormale in $L^2(\Omega)$. Consideriamo a questo scopo il problema seguente:

$$\begin{cases} [a(x)v']' + \lambda v = 0 & \text{in } (0, 2\pi) \\ v(0) = v(2\pi) = 0\,. \end{cases} \tag{1.13}$$

Come è noto (cfr. ad es. [1]), gli autovalori di questo problema formano una successione crescente di numeri positivi $\{\lambda_k\}_{k\in\boldsymbol{N}^+}$; inoltre le corrispondenti autosoluzioni (normalizzate) formano un sistema ortonormale completo in $L^2(0, 2\pi)$. Siano $w_k(x)$, $k \in \boldsymbol{N}^+$, tali soluzioni: allora il sistema di funzioni

$$\left\{w_k(x)\,\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{k\in\boldsymbol{N}^+,\,n\in\boldsymbol{Z}} \tag{1.14}$$

è ortonormale completo in $L^2(\Omega)$. Ciò premesso, si ha:

LEMMA 1.5. – *Affinché $u \in L^2(\Omega)$ sia soluzione generalizzata del problema* (1.5) *è necessario e sufficiente che u verifichi la* (1.12) *per ogni funzione della famiglia* (1.14).

DIMOSTRAZIONE. – La necessità è ovvia per il fatto che le funzioni (1.14) sono di classe $C^2(\bar{\Omega})$ e sono nulle su Γ. La sufficienza sarà provata se mostreremo che per ogni $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ tale che $\varphi = 0$

su Γ esiste una successione $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in N}$, i cui elementi sono combinazioni lineari finite di funzioni della famiglia (1.14), tale che:

i) $\varphi_\nu \to \varphi$ in $L^2(\Omega)$;

ii) $[\varphi_\nu]_{tt} \to \varphi_{tt}$ in $L^2(\Omega)$;

iii) $[a(x)[\varphi_\nu]_x]_x \to [a(x)\varphi_x]_x$ in $L^2(\Omega)$;

in tal caso infatti la tesi si ottiene passando al limite sotto il segno di integrale nella (1.12). Sia allora $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ tale che $\varphi = 0$ su Γ; allora φ è sviluppabile in serie di Fourier:

$$\varphi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n\in Z} \varphi_{nk} w_k(x) \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Sia P_ν la proiezione ortogonale sullo spazio generato dai vettori $\{w_k(x)(e^{int}/\sqrt{2\pi})\}_{k\leq\nu,|n|\leq\nu}$; poniamo allora

$$\varphi_\nu \equiv P_\nu \varphi = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{|n|\leq\nu} \varphi_{nk} w_k(x) \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}.$$

È chiaro che vale la i). Osserviamo, per quanto riguarda la ii) e la iii), che l'operatore P_ν commuta con $\partial^2/\partial t^2$ e con $(\partial/\partial x)[a(x)(\partial/\partial x)]$, come è facile verificare; la tesi segue allora dal fatto che

$$P_\nu \varphi_{tt} \to \varphi_{tt} \text{ in } L^2(\Omega),$$

$$P_\nu[a(x)\varphi_x]_x \to [a(x)\varphi_x]_x \quad \text{ in } L^2(\Omega),$$

essendo φ_{tt} e $[a(x)\varphi_x]_x$ funzioni continue su $\bar{\Omega}$. ■

Sostituendo allora le funzioni (1.14) nella (1.12), si ha che $u \in L^2(\Omega)$ è soluzione generalizzata di (1.12) se e solo se risulta

$$(1.15) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} [-n^2 u w_k e^{int} - \alpha^2 u e^{int}[a(x)w_k']'] \, dx\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} g w_k e^{int} \, dx\, dt \qquad \forall n \in \boldsymbol{Z}, \qquad \forall k \in \boldsymbol{N}^+.$$

Tenuto conto che

$$-[a(x)w_k']' = \lambda_k w_k \qquad \forall k \in \boldsymbol{N}^+,$$

e posto per semplicità

$$u_{nk} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u w_k e^{\mathrm{int}}\, dx\, dt\,, \qquad g_{nk} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} g w_k e^{\mathrm{int}}\, dx\, dt\,,$$

la (1.15) diventa:

$$(1.16) \qquad (\alpha^2 \lambda_k - n^2)\, u_{nk} = g_{nk} \qquad \forall n \in \boldsymbol{Z},\ \forall k \in \boldsymbol{N}^+.$$

Il problema è così diventato quello di trovare una costante positiva $h = h(\alpha)$ tale che

$$(1.17) \qquad |\alpha^2 \lambda_k - n^2| \geqslant h(\alpha) \qquad \forall n \in \boldsymbol{Z},\ \forall k \in \boldsymbol{N}^+,$$

poichè in tal caso se $g \in L^2(\Omega)$ allora certamente $u \in L^2(\Omega)$.

È chiaro intanto che nella (1.17) potremo supporre $\alpha \geqslant 0$ e $n \in \boldsymbol{N}$.

L'esistenza della costante $h(\alpha)$ dipenderà, oltre che dal numero α, anche dall'andamento asintotico della successione $\{\lambda_k\}_{k\in \boldsymbol{N}^+}$. Ad esempio, se nel problema (1.5) è $a(x) \equiv 4$, allora si ha $[a(x)u_x]_x = 4\Delta u$ e risulta $\lambda_k = k^2$ $\forall k \in \boldsymbol{N}^+$. in questo caso si dimostra (cfr. [2]) che l'insieme dei numeri $\alpha \in \boldsymbol{R}^+$ tali che la successione $\{\alpha^2 k^2 - n^2\}_{k,n\in \boldsymbol{N}}$ ha l'origine come punto isolato è un insieme denso in $\boldsymbol{R}^+$, di misura nulla e con la potenza del continuo. Ci proponiamo di ottenere lo stesso risultato nel caso generale $a(x) > 0$; a questo scopo ci occorre qualche informazione sull'andamento asintotico dei numeri λ_k. Torniamo allora al problema (1.13); per ottenere le informazioni che ci occorrono passeremo mediante un cambiamento di variabile ad un problema equivalente. Poniamo (cfr. [1]):

$$(1.18) \qquad \begin{cases} v(x) = [a(x)]^{\frac14} u(x)\,, \\[2mm] l = \displaystyle\int_0^{2\pi} [a(\xi)]^{-\frac12}\, d\xi\,, \\[2mm] y = y(x) = \dfrac{\pi}{l} \displaystyle\int_0^{x} [a(\xi)]^{-\frac12}\, d\xi\,. \end{cases}$$

È chiaro che $y(x)$ è un'applicazione continua e crescente di $[0, 2\pi]$ in $[0, \pi]$, e quindi ha inversa continua $x = x(y)$. Se allora adottiamo la notazione

$$g_*(y) = g(x(y)) \colon [0, \pi] \to \boldsymbol{R}$$

per ogni funzione $g = g(x)\colon [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}$, è ben noto che il problema (1.13) equivale al seguente:

$$
\begin{cases} v''_* - r_*(y)v_* + \mu v_* = 0\,, \\ v_*(0) = v_*(\pi) = 0\,, \end{cases} \tag{1.19}
$$

ove si è posto

$$
\begin{cases} r_*(y) = [a_*(y)]^{-\frac14} \dfrac{d^2}{dy^2}\big[[a_*(y)]^{\frac14}\big]\,, \qquad a_*(y) = a(x(y)) \\[2ex] \mu = \dfrac{l^2}{\pi^2}\,\lambda\,. \end{cases} \tag{1.20}
$$

Del problema (1.19) è noto l'andamento asintotico degli autovalori μ_k. Si ha infatti (cfr. ad es. [6]):

Proposizione 1.6. – *Supponiamo che la funzione $r_*(y)$ definita in* (1.20) *sia continua ed a variazione limitata in* $[0, \pi]$. *Allora gli autovalori μ_k del problema* (1.19) *formano una successione crescente di numeri positivi tale che*

$$
\sqrt{\mu_k} = k + \frac{\gamma}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \tag{1.21}
$$

$$
k \in \boldsymbol{N}^+\,, \qquad \left[\max\lim_{k\to\infty}\left|k^2\,O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right| < +\infty\right],
$$

ove la costante γ è data da

$$
\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi r_*(y)\,dy\,. \qquad \blacksquare
$$

Ora non è difficile vedere che se $r_*(y)$ è la funzione definita nella (1.20), allora

$$
r_*(y(x)) \equiv r(x) = \frac{l^2}{4\pi^2}\left[a''(x) - \frac14 [a(x)]^{-1}[a'(x)]^2\right]; \tag{1.22}
$$

d'altra parte, osservando che $x \to y(x)$ è una funzione crescente di $[0, 2\pi]$ in $[0, \pi]$, è chiaro che $r_*(y)$ è a variazione limitata in $[0, \pi]$ se e solo se $r(x)$ è a variazione limitata in $[0, 2\pi]$. Ma quest'ultimo fatto è certamente verificato poichè avevamo supposto per ipotesi che $a''(x)$ è a variazione limitata su $[0, 2\pi]$ ed inoltre si ha $[a(x)]^{-1} \cdot [a'(x)]^2 \in C^1[0, 2\pi]$. Siamo dunque nelle ipotesi della proposizione 1.6; pertanto dalla seconda delle (1.20) si ottiene che gli autovalori λ_k

del problema (1.13) hanno il seguente andamento asintotico:

$$\sqrt{\lambda_k} = \frac{\pi}{l} k + \frac{\gamma'}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \in \boldsymbol{N}^+, \tag{1.23}$$

ove $\gamma' = (\pi/l)\gamma$ e (cfr. (1.20), (1.21), (1.22))

$$\gamma = \frac{l}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} [a(x)]^{-\frac{1}{2}} \left[a''(x) - \frac{1}{4} [a(x)]^{-1} [a'(x)]^2 \right] dx = \tag{1.24}$$

$$= \frac{1}{2l} \int_0^{2\pi} [a(x)]^{-\frac{1}{2}} r(x)\, dx \, .$$

Torniamo finalmente al problema (1.5): come si è visto, il problema dell'esistenza di un'unica soluzione $u \in L^2(\Omega)$ di (1.5) è stato ricondotto a quello di vedere per quali $\alpha \in \boldsymbol{R}^+$ vale la maggiorazione (1.17) per un'opportuna costante positiva $h(\alpha)$. Affronteremo questa questione nel paragrafo successivo.

2. – Sia

$$V = \{\alpha \in \boldsymbol{R}^+ | \exists h(\alpha) > 0 \colon |\alpha^2 \lambda_k - n^2| \geq h(\alpha) \;\; \forall k \in \boldsymbol{N}^+, \;\; \forall n \in \boldsymbol{N}\} \; ; \tag{2.1}$$

dunque V è l'insieme dei numeri α per i quali il corrispondente problema lineare (1.5) ha soluzione unica in $L^2(\Omega)$. Dimostreremo i seguenti fatti:

TEOREMA 2.1. – *L'insieme V ha misura nulla.*

TEOREMA 2.2. – *L'insieme V è denso in $\boldsymbol{R}^+$ ed ha la potenza del continuo.*

Prima di dimostrare i teoremi, facciamo alcune osservazioni.

OSSERVAZIONE 2.3. – Le conclusioni del teorema 2.1 si migliorano fortemente se il termine noto g del problema (1.5) è appena più regolare.

Supponiamo infatti che $g \in H^\theta(T; L^2(0, 2\pi))$ per qualche $\theta > 0$: questo, come è noto, equivale a dire che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in \boldsymbol{Z}} |g_{nk}|^2 |n|^{2\theta} < +\infty \tag{2.2}$$

(con la convenzione che $|0|^{2\theta} = 1$).

Si può dimostrare allora che l'insieme dei numeri α per i quali esiste un'unica $u \in L^2(\Omega)$ soddisfacente al problema (1.5) con $g \in H^\theta(T; L^2(0, 2\pi))$, è formato da quasi tutti gli $\alpha \in \boldsymbol{R}^+$. (In tal caso, evidentemente, il teorema 2.2 è una banale conseguenza di questo fatto.) Infatti, con l'ipotesi (2.2) sulla g la disuguaglianza occorrente affinchè $u \in L^2(\Omega)$ diventa

$$(2.3) \qquad |\alpha^2 \lambda_k - n^2| \geqslant \frac{h(\alpha)}{|n|^\theta} \quad \forall k \in \boldsymbol{N}^+, \quad \forall n \in \boldsymbol{N}, \quad [|O|^0 = 1],$$

e questa relazione è verificata appunto da quasi tutti gli $\alpha \in \boldsymbol{R}^+$ (cfr. [3]). Dal teorema 2.1 segue perciò che questo risultato, valido per ogni $\theta > 0$, non si estende al nostro caso, che è il caso $\theta = 0$. ∎

Preliminarmente alla dimostrazione dei teoremi 2.1 e 2.2, osserviamo che è sufficiente provare entrambi i teoremi per l'insieme

$$(2.4) \quad W = \{\beta \in \boldsymbol{R}^+ \colon |\beta^2 n^2 - \mu_k| \geqslant c(\beta) > 0 \quad \forall k \in \boldsymbol{N}^+, \ \forall n \in \boldsymbol{N}\},$$

ove i numeri μ_k sono gli autovalori del problema (1.19) ed hanno l'andamento asintotico descritto dalle (1.21). Infatti risulta, ovviamente, che $\alpha \in V$ se e solo se $(l/\pi\alpha) \in W$; dunque l'omeomorfismo $\varphi\colon \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ definito da

$$\beta = \varphi(\alpha) = \frac{l}{\pi\alpha}$$

è tale che $\varphi(V) = W$. Ne segue $\overline{W} = \overline{\varphi(V)} = \varphi(\overline{V})$ e quindi V è denso in $\boldsymbol{R}^+$ se e solo se W è denso in $\boldsymbol{R}^+$, ed inoltre V e W hanno la stessa cardinalità. Indicando poi con χ_E la funzione caratteristica di un insieme $E \subset \boldsymbol{R}$, si ha per ogni intervallo $(u, v) \subset \boldsymbol{R}^+$ con $u > 0$:

$$\frac{l}{\pi v^2} \int_{l/\pi v}^{l/\pi u} \chi_W(\beta)\, d\beta \leqslant \frac{l}{\pi} \int_{l/\pi v}^{l/\pi u} \chi_W(\beta) \frac{d\beta}{\beta^2} = \int_u^v \chi_V(\alpha)\, d\alpha \leqslant \frac{l}{\pi u^2} \int_{l/\pi v}^{l/\pi u} \chi_W(\beta)\, d\beta;$$

quindi V ha misura nulla se e solo se W ha misura nulla.

Dimostriamo dunque i teoremi 2.1 e 2.2 per l'insieme W definito in (2.4).

Dimostrazione del Teorema 2.1. – Cominciamo con un lemma che ci servirà anche nella dimostrazione del teorema 2.2:

LEMMA 2.4. – *Poniamo*

(2.5) $W' = \{\beta \in \mathbf{R}^+ \colon |\beta^2 n^2 - \mu_k| \geqslant c_0(\beta) > 0 \;\; \forall k \geqslant k_0(\beta),\;\; \forall n \geqslant n_0(\beta)\}$

(2.6) $W'' = \{\beta \in \mathbf{R}^+ \colon |\beta^2 n^2 - k^2 - 2\gamma| \geqslant c_1(\beta) > 0 \;\; \forall k \geqslant k_1(\beta), \forall n \geqslant n_1(\beta)\}$

ove γ *è la costante* (1.24). *Allora risulta*

$$W = W' - \left\{\frac{\sqrt{\mu_k}}{n}\right\}_{k,n\in \mathbf{N}^+}; \qquad W' = W''. \tag{2.7}$$

In particolare, $W \subset W''$.

DIMOSTRAZIONE. – È chiaro che $W \subset W'$ e che $W \cap \{\sqrt{\mu_k}/n\}_{k,n\in\mathbf{N}^+} = \emptyset$; viceversa, se $\beta \in W' - \{\sqrt{\mu_k}/n\}_{k,n\in\mathbf{N}^+}$ si ottiene $\beta \in W$ ponendo

$$c(\beta) = \min\big\{c_0(\beta), \min\{|\beta^2 n^2 - \mu_k| \colon 0 \leqslant n < n_0(\beta),\, k \in \mathbf{N}^+\}, \\ \min\{|\beta^2 n^2 - \mu_k| \colon n \in \mathbf{N},\, 0 < k < k_0(\beta)\}\big\}.$$

Sia ora $\beta \in W'$. Poichè da (1.21) segue

$$\mu_k = k^2 + 2\gamma + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \in \mathbf{N}^+,$$

si ha che esiste $k'(\beta)$ per cui $|O(1/k)| < \frac{1}{2} c_0(\beta)$ $\forall k \geqslant k'(\beta)$; dunque

$$|\beta^2 n^2 - k^2 - 2\gamma| \geqslant |\beta^2 n^2 - \mu_k| - |\mu_k - k^2 - 2\gamma| \geqslant \\ \geqslant c_0(\beta) - \left|O\left(\frac{1}{k}\right)\right| \geqslant \frac{1}{2} c_0(\beta)$$

per ogni $k \geqslant \max\{k'(\beta), k_0(\beta)\}$ e per ogni $n \geqslant n_0(\beta)$, da cui segue $\beta \in W''$ scegliendo

$$c_1(\beta) = \tfrac{1}{2} c_0(\beta), \qquad n_1(\beta) = n_0(\beta), \qquad k_1(\beta) = \max\{k'(\beta), k_0(\beta)\}.$$

L'inclusione $W'' \subset W'$ si prova in modo del tutto analogo. ■

In base a questo lemma, sarà sufficiente provare che l'insieme W'' definito nella (2.6) ha misura nulla.

Per ogni $\beta \in \mathbf{R}^+$, sia $[\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots]$ lo sviluppo di β in frazione continua semplice. È ben noto (cfr. [2]) il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 2.5. – *Sia*

$$Y = \left\{\beta \in \mathbf{R}^+ \colon \max_{i\to\infty}\lim \beta_{2i} = \max_{i\to\infty}\lim \beta_{2i+1} = +\infty\right\}; \tag{2.8}$$

allora per ogni $\beta \in Y$ l'insieme $\{\beta^2 n^2 - k^2\}_{n,k\in N^+}$ è denso in $\boldsymbol{R}$; inoltre l'insieme $\boldsymbol{R}^+ - Y$ ha misura nulla. ■

Da questa proposizione segue subito il teorema 2.1: infatti per definizione di W'' (cfr. (2.6)) si ha $W'' \subset \boldsymbol{R}^+ - Y$, e quindi W'' ha misura nulla. ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.2. – Come si è già osservato, è sufficiente provare la tesi per l'insieme W dato dalla (2.4). Ricordiamo anzitutto un altro noto risultato (cfr. [2]):

PROPOSIZIONE 2.6. – *Poniamo*

$$U = \left\{\beta \in \boldsymbol{R}^+ \colon \max_{i\to\infty}\lim \beta_i < +\infty\right\}, \tag{2.9}$$

ove $[\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots]$ è lo sviluppo in frazione continua semplice del numero $\beta \in \boldsymbol{R}^+$; allora l'insieme U è denso in $\boldsymbol{R}^+$ ed ha la poteuza del continuo. Inoltre, posto

$$\max_{i\to\infty}\lim \beta_i = K(\beta) \qquad \forall \beta \in U, \tag{2.10}$$

risulta per ogni $\beta \in U$

$$|\beta^2 n^2 - k^2| \geq \frac{\beta}{K(\beta)+3} \qquad \forall k \geq k_1(\beta), \quad \forall n \geq n_1(\beta). \tag{2.11}$$ ■

Definiamo ora su $\boldsymbol{R}^+$ la relazione di equivalenza seguente:

$$\xi \sim \eta \text{ se e solo se } \eta = (a + b\xi)/(c + d\xi) \quad \text{con} \quad a, b, c, d \in \boldsymbol{Z} \quad \text{e} \quad |ad - bc| = 1.$$

Allora se U è l'insieme definito in (2.9), per ogni fissato $\xi \in U$ consideriamo la classe di equivalenza di ξ, cioè l'insieme

$$T_\xi = \left\{\beta \in \boldsymbol{R}^+ \colon \beta = \frac{a + b\xi}{c + d\xi} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ e } |ad - bc| = 1\right\}. \tag{2.12}$$

Ovviamente T_ξ è numerabile, ed inoltre si ha

$$K(\beta) = K(\xi) \qquad \forall \beta \in T_\xi \tag{2.13}$$

(poichè se $\beta = [\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_i, \ldots]$ e $\xi = [\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots]$, allora $\beta_i = \xi_{i+j}$ per i abbastanza grande); ciò in particolare implica che $T_\xi \subset U$ per ogni $\xi \in U$. Infine è noto che T_ξ è denso in $\boldsymbol{R}^+$.

Si ha allora questo lemma:

LEMMA 2.7. – *Sia*

$$A = \left\{\frac{t\sqrt{\mu_k}}{n}\right\}_{t,k,n\in N^+}; \tag{2.14}$$

allora l'insieme

$$U_0 = \{\xi \in U : T_\xi \cap A = \emptyset\} \tag{2.15}$$

ha la potenza del continuo ed è denso in $\boldsymbol{R}^+$.

DIMOSTRAZIONE. – Si ha

$$U_0 = U - \bigcup_{\alpha\in A} T_\alpha$$

ed essendo $\bigcup_{\alpha\in A} T_\alpha$ numerabile, è chiaro che U_0 ha la potenza del continuo. Inoltre poichè gli insiemi T_ξ sono classi di équivalenza, se $\xi, \eta \in U$ si ha

$$\eta \in T_\xi \Rightarrow T_\eta = T_\xi\,, \tag{2.16}$$

$$\eta \notin T_\xi \Rightarrow T_\eta \cap T_\xi = \emptyset\,. \tag{2.17}$$

Da queste relazioni segue che

$$U_0 = \bigcup_{\xi\in U_0} T_\xi\,.$$

e quindi U_0 è denso in $\boldsymbol{R}^+$. ■

In particolare dal lemma precedente segue che

$$U_0 \cap A = \emptyset \tag{2.18}$$

e questo ci sarà utile nel seguito.

Il prossimo lemma dimostra la densità di W negli intervalli abbastanza lontani dall'origine.

LEMMA 2.8. – *Sia* $\xi \in U_0$. *Allora se* $r > 4|\gamma|[K(\xi)+3]$, *ove* γ *è la costante* (1.25) *e* $K(\xi)$ *è definito in* (2.10), *si ha* $T_\xi \cap (r, +\infty) \subset \subset W \cap (r, +\infty)$.

In particolare W *è denso in ogni intervallo* $(4|\gamma|[K(\xi)+3], +\infty)$ *con* $\xi \in U_0$.

DIMOSTRAZIONE. – La seconda affermazione segue banalmente dalla prima. Per provare questa, basta far vedere che per un generico $s > r$ risulta $T_\xi \cap (r, s) \subset W \cap (r, s)$.

Sia allora $\beta \in T_\xi \cap (r, s)$ con $\xi \in U_0$; allora per la proposizione 2.6 e per la (2.13) si ha

$$|\beta^2 n^2 - k^2| \geqslant \frac{\beta}{K(\xi) + 3} \qquad \forall k \geqslant k_1(\beta)\,, \quad \forall n \geqslant n_1(\beta)\,.$$

Poichè

$$2|\gamma| < \frac{r}{2[K(\xi) + 3]} < \frac{r}{K(\xi) + 3} < \frac{\beta}{K(\xi) + 3}\,,$$

si ha anche

$$|\beta^2 n^2 - k^2 - 2\gamma| \geqslant |\beta^2 n^2 - k^2| - 2|\gamma| \geqslant \frac{\beta - r/2}{K(\xi) + 3} > \tag{2.19}$$

$$> \frac{r}{2[K(\xi) + 3]} \qquad \forall k \geqslant k_1(\beta)\,, \quad \forall n \geqslant n_1(\beta)\,.$$

Dunque $\beta \in W''$ (cfr. (2.6)) e quindi per il lemma 2.4 si ha $\beta \in W'$.

Inoltre poichè per ipotesi è $\beta \in T_\xi$ con $\xi \in U_0$, il lemma 2.7 implica che $\beta \neq \sqrt{\mu_k}/n$ $\forall k, n \in \boldsymbol{N}^+$, da cui, ancora per il lemma 2.4, si ottiene che $\beta \in W$. ■

Per provare la densità di W in un arbitrario intervallo di $\boldsymbol{R}^+$, è utile riscrivere la disuguaglianza che caratterizza W, cioè la (2.4), in una forma più comoda. Si ha al riguardo il seguente

LEMMA 2.9. – *Sia* $\xi \in U_0$, *e sia* $\beta \in T_\xi \cap (r, s)$ *con* $s > r > 4|\gamma|[K(\xi) + 3]$. *Allora*

$$|\beta n - \sqrt{\mu_k}| \geqslant \frac{c_1(\beta)}{n} > 0 \qquad \forall n, k \in \boldsymbol{N}^+\,. \tag{2.20}$$

Viceversa, se $\beta \in \boldsymbol{R}^+$ *verifica la* (2.20), *allora* $\beta \in W$.

DIMOSTRAZIONE. – Sia $\beta \in T_\xi \cap (r, s)$ con $\xi \in U_0$; allora la tesi è ovvia per le coppie k, n tali che $\sqrt{\mu_k}/n \geqslant s$, poichè in tal caso

$$|\beta n - \sqrt{\mu_k}| = n\left|\beta - \frac{\sqrt{\mu_k}}{n}\right| \geqslant n(s - \beta) \geqslant \frac{s - \beta}{n}\,.$$

Per tutte le altre coppie k, n si ha $\sqrt{\mu_k}/n < s$; ora dal lemma 2.8 segue in particolare che $\beta \in W$, e quindi si ha

$$|\beta^2 n^2 - \mu_k| \geqslant c(\beta) \qquad \forall k, n \in \boldsymbol{N}^+;$$

dunque per tutte le coppie k, n tali che $\sqrt{\mu_k}/n < s$ si ha

$$|\beta n - \sqrt{\mu_k}| \geqslant \frac{c(\beta)}{\beta n + \sqrt{\mu_k}} \geqslant \frac{c(\beta)}{2sn} .$$

La (2.20) è così provata $\forall k, n \in \boldsymbol{N}^+$ scegliendo $c_1(\beta) = \min\{s - \beta, c(\beta)/2s\}$. Viceversa, se $\beta \in \boldsymbol{R}^+$ verifica la (2.20) allora

$$|\beta^2 n^2 - \mu_k| \geqslant (\beta n + \sqrt{\mu_k}) \frac{c_1(\beta)}{n} \geqslant \beta c_1(\beta) \qquad \forall n, k \in \boldsymbol{N}^+ ,$$

da cui segue subito che $\beta \in W$. ∎

Si ha infine questo lemma, che prova la densità di W in $\boldsymbol{R}^+$:

LEMMA 2.10. - *Se (u, v) è un arbitrario intervallo di $\boldsymbol{R}^+$ con $u > 0$, allora $W \cap (u, v)$ è non vuoto. In particolare, W è denso in $\boldsymbol{R}^+$.*

DIMOSTRAZIONE. - Consideriamo, per $\xi \in U_0$, l'insieme

$$S_\xi = \left\{\beta = \frac{\eta}{t} \in \boldsymbol{R}^+ : \eta \in T \ , \ t \in \boldsymbol{N}^+\right\}; \tag{2.21}$$

dimostreremo che comunque si scelga $(u, v) \subset \boldsymbol{R}^+$ con $u > 0$, l'insieme $W \cap (u, v)$ contiene un opportuno punto di S_ξ, con ξ arbitrario punto di U_0, cosicchè in particolare $W \cap (u, v)$ non è vuoto. Fissato $\xi \in U_0$, sia $t \in \boldsymbol{N}^+$ tale che $tu > r > 4|\gamma|[K(\xi) + 3]$, e prendiamo s tale che $tv < s$. Sia poi $\beta \in (u, v)$ tale che $t\beta \in T_\xi \cap (r, s)$. Tale β esiste certamente poichè T_ξ è denso in $\boldsymbol{R}^+$ e quindi $T_\xi \cap \cap (tu, tv)$ è non vuoto: scelto perciò $\eta \in T_\xi \cap (tu, tv)$, basta porre $\beta = \eta/t$. Per la (2.21) si ha allora $\beta \in S_\xi$; inoltre poichè $t\beta \in T_\xi$ e $\xi \in U_0$, si ha dal lemma 2.9

$$|t\beta n - \sqrt{\mu_k}| \geqslant \frac{c_1(t\beta)}{n} \qquad \forall n, k \in \boldsymbol{N}^+ . \tag{2.22}$$

Supponiamo per assurdo che $\beta \notin W$; allora per il lemma 2.4 si ha $\beta \notin W - \{\sqrt{\mu_k}/n\}_{k,n \in N^+}$; ma, osservando che dal lemma 2.7 e dalla (2.21) segue in particolare

$$S_\xi \cap \left\{\frac{\sqrt{\mu_k}}{n}\right\}_{n,k \in N^+} = \emptyset \qquad \forall \xi \in U_0 ,$$

si ottiene che $\beta \notin W'$. Per definizione (cfr. (2.5)), ciò significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono infinite coppie $p, q \in \boldsymbol{N}^+$ tali che

$$|\beta^2 p^2 - \mu_q| < \varepsilon$$

e quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esistono infinite coppie $p, q \in \boldsymbol{N}^+$ per cui

$$|\beta p - \sqrt{\mu_q}| < \frac{\varepsilon}{\beta p + \sqrt{\mu_q}} = \frac{\varepsilon}{p} \cdot \frac{1}{\beta + \sqrt{\mu_q}/p} \leqslant \frac{\varepsilon}{up} . \tag{2.23}$$

Scegliamo ora $\varepsilon < (uc_1(t\beta))/2t$, con $c_1(t\beta)$ fissato dalla (2.22). Si ha allora per infiniti p, q

$$\begin{aligned} \frac{t\varepsilon}{up} > t|\beta p - \sqrt{\mu_q}| \geqslant |t\beta p - \sqrt{\mu_{tq}}| - |\sqrt{\mu_{tq}} - t\sqrt{\mu_q}| \geqslant \\ \geqslant \frac{c_1(t\beta)}{p} - \left|\frac{\gamma}{tq} - \frac{t\gamma}{q} + O\left(\frac{1}{t^2 q^2}\right) - tO\left(\frac{1}{q^2}\right)\right| . \end{aligned} \tag{2.24}$$

Fissiamo adesso uno di tali p. Allora esiste $q_0(t, \beta, q)$ tale che

$$\left|\frac{\gamma}{tq} - \frac{t\gamma}{q} + O\left(\frac{1}{t^2 q^2}\right) - t\, O\left(\frac{1}{q^2}\right)\right| < \frac{c_1(t\beta)}{2p} \qquad \forall q \geqslant q_0(t, \beta, p);$$

quindi dalla (2.24) segue che per infiniti indici $q \geqslant q_0(t, \beta, p)$ si ha

$$\frac{t\varepsilon}{up} > \frac{c_1(t\beta)}{p} - \frac{c_1(t\beta)}{2p} = \frac{c_1(t\beta)}{2p} ,$$

e ciò è assurdo per la scelta di ε. Ne segue $\beta \in W$ e quindi la tesi. ∎

Notiamo che in questo lemma si è dimostrato di più: si è provato che per ogni intervallo $(u, v) \subset \boldsymbol{R}^+$ con $u > 0$ e per ogni $\xi \in U_0$ esiste un punto $\beta_\xi \in S_\xi \cap W \cap (u, v)$. Dunque

$$W \cap (u, v) \subset \{\beta_\xi\}_{\xi \in U_0} . \tag{2.25}$$

Per dimostrare che W ha la potenza del continuo, basta far vedere allora che per ogni intervallo $(u, v) \subset \boldsymbol{R}^+$ con $u > 0$ la famiglia $\{\beta_\xi\}_{\xi \in U_0}$ che appare nella (2.25) è costituita da un'infinità più che numerabile di punti distinti. (Ciò anzi proverà che $W \cap (u, v)$ ha la potenza del continuo per ogni intervallo $(u, v) \subset \boldsymbol{R}^+$.) Supponiamo allora, per assurdo, che $\{\beta_\xi\}_{\xi \in U_0}$ sia costituita al più da un'infinità numerabile di punti distinti: questo significa che esiste una famiglia al più numerabile $\{\xi_i\}_{i\in N}\subset U_0$ tale che $\forall\xi\in U_0$ esiste $i\in N$ per cui

$$(2.26)\qquad \beta_\xi=\beta_{\xi_i}\,.$$

Poichè U_0 non è numerabile, esiste $j\in N$ tale che

$$U_j=\{\xi\in U_0:\beta_\xi=\beta_{\xi_j}\}$$

non è numerabile. Allora, posto per ogni $\xi\in U_0$, in base alla (2.21), $\beta_\xi=\eta_\xi/t_\xi$ (con $\eta_\xi\in T_\xi$ e $t_\xi\in N^+$ opportuni), si ha dalla (2.26)

$$(2.27)\qquad \frac{\eta_\xi}{t_\xi}=\beta_{\xi_j}\qquad\forall\xi\in U_j\,.$$

Consideriamo ora la famiglia $\{t_\xi\}_{\xi\in U_j}\subset N^+$: poichè U_j non è numerabile, esiste $m\in N^+$ tale che

$$U_{j,m}=\{\xi\in U_j: t_\xi=m\}$$

non è numerabile. Ora dalla (2.27) segue in particolare

$$\frac{\eta_\xi}{m}=\beta_{\xi_j}\qquad\forall\xi\in U_{j,m}\,.$$

cioè

$$\eta_\xi=m\beta_{\xi_j}\qquad\forall\xi\in U_{j,m}\,.$$

Ne segue

$$m\beta_{\xi_j}=\eta_\xi\in T_\xi\qquad\forall\xi\in U_{j,m}\,.$$

Dunque, posto $\sigma=m\beta_{\xi_j}$ (gli indici m, j sono fissati), si ha, tenuto conto di (2.16),

$$T_\sigma=T_\xi\qquad\forall\xi\in U_{j,m}\,.$$

Ma l'insieme T_σ è numerabile, e poichè $\xi\in T_\xi=T_\sigma$ $\forall\xi\in U_{j,m}$, ne segue che $U_{j,m}$ deve essere numerabile: ciò è una contraddizione. Il teorema 2.2 è così completamente dimostrato. ■

BIBLIOGRAFIA

[1] R. COURANT - D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, vol. 1, New York, Interscience, 1953.

[2] M. CUGIANI, *Sopra una questione di approssimazione diofantea non lineare*, Boll. Un. Mat. Ital., s. III, a. X, n. 4 (1955), pp. 489-497.

[3] L. DE SIMON, *Sull'equazione delle onde con termine noto periodico*, Rend. Sem. Ist. Mat. Univ. Trieste, **1** (1969), pp. 150-162.

[4] M. A. KRASNOSEL'SKIJ, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Oxford, Pergamon Press, 1964.

[5] G. H. HARDY - E. M. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford, Clarendon Press, IV ed., 1959.

[6] G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, parte I, Zanichelli, Bologna, 1965.

[7] G. T. SOKOLOV, *Periodic solutions of the wave equation* (in russo), Fergan. Gos. Ped. Inst. Učen. Zap. Ser. Mat. Vyp., **1** (1965), pp. 17-25.

[8] G. TORELLI - L. DE SIMON, *Soluzioni periodiche di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico non lineari*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **40** (1968), pp. 380-401.

Pervenuta alla Segreteria dell' U. M. I.
il 15 giugno 1976