Università di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Teorema di Noether per problemi variazionali con ritardo

Candidato

Filippo Manfroni

Relatore

Prof. Paolo Acquistapace

Controrelatrice

Prof.ssa Maria Stella Gelli

Anno Accademico 2011/2012

Indice

TEOREMA DI NOETHER PER PROBLEMI VARIAZIONALI CON RITARDO

Introduzione

Il concetto di *simmetria* gioca un ruolo fondamentale tanto nella matematica quanto nella fisica. La traduzione matematica di una simmetria è l'invarianza di un sistema rispetto ad una famiglia di trasformazioni dipendenti da parametri: si possono, ad esempio, considerarare sistemi fisici su cui agiscono potenziali centrali, invarianti per traslazioni o riflessioni. L'importanza di questa proprietà consiste nell'esistenza di leggi di conservazione, la cui tipica applicazione è la riduzione del numero di gradi di libertà di un sistema: tale procedimento può facilitare l'integrazione delle equazioni differenziali legate alle condizioni necessarie di ottimalità. Le equazioni della fisica matematica hanno una struttura variazionale, e la più generale espressione della relazione esistente fra simmetria ed esistenza di leggi di conservazione è il teorema di Noether.

Il nostro lavoro, seguendo un procedimento piuttosto naturale, si concentra inizialmente sulle proprietà derivanti dall'invarianza di una lagrangiana $L\left(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right)$ di classe $\mathcal{C}^1$ e differenziabile due volte, rispetto ad una famiglia ad un parametro reale α di diffeomorfismi $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^2$. Tale invarianza implica l'esistenza dell'integrale primo $C(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, dove $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha}{\partial \alpha}(\mathbf{q})\Big|_{\alpha=0}$ denota il generatore infinitesimale della trasformazione.

Questo primo teorema permette di riassumere in un unico risultato alcune proprietà fisiche importanti, quali la conservazione della quantità di moto lungo ogni direzione per una particella libera, la conservazione del momento angolare lungo ogni asse per un punto materiale soggetto ad un campo di forze centrali, e la conservazione dei momenti coniugati alle variabili cicliche nella lagrangiana stessa.

Il medesimo risultato può essere raggiunto introducendo un opportuno funzionale e analizzandone l'invarianza rispetto a classi di trasformazioni. Più precisamente, scelti $a < b$ in $\mathbb{R}$ e $\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b \in \mathbb{R}^n$, posto

$$\Gamma \doteq \{\mathbf{q} : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \mathbf{q}(a) = \mathbf{q}_a, \mathbf{q}(b) = \mathbf{q}_b, \mathbf{q} \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}^n)\}$$

e

$$\mathcal{I}[\mathbf{q}(\cdot)] = \int_a^b L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathrm{d}t$$

si mostra che, qualora per ogni sottointervallo $[t_a, t_b] \subseteq [a, b]$, per ogni $\mathbf{q} \in \Gamma$ e ogni scelta di $\alpha \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ si abbia

$$\int_{t_a}^{t_b} L\Big(t, \boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q})\Big)\mathrm{d}t = \int_{t_a}^{t_b} L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathrm{d}t$$

il sistema lagrangiano ha lo stesso integrale primo.
Generalizzando lo stesso metodo illustrato da Emmy Noether nel suo lavoro *Invariante Variationsprobleme*[1], concentrato piuttosto su *gruppi* di trasformazioni, abbiamo introdotto *famiglie* ad un parametro $\alpha \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ di trasformazioni di *tempi* t e *coordinate* $\mathbf{q}$ del tipo

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \varphi(t, \mathbf{q}, \alpha) = \varphi_\alpha(t, \mathbf{q}) \\ \overline{\mathbf{q}} &= \boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{q}, \alpha) = \boldsymbol{\psi}_\alpha(t, \mathbf{q}) \end{aligned}$$

dove $\varphi_\alpha : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{\psi}_\alpha : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sono diffeomorfismi di classe $\mathcal{C}^2$ per ogni scelta del parametro α, e $\varphi_0(t, \mathbf{q}) = t, \boldsymbol{\psi}_0(t, \mathbf{q}) = \mathbf{q}$ per ogni t e $\mathbf{q}$. Si mostra che, detti $\eta(t, \mathbf{q}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(t, \mathbf{q}, \alpha)\big|_{\alpha=0}$ e $\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \alpha}(t, \mathbf{q}, \alpha)\big|_{\alpha=0}$ i generatori infinitesimali delle due trasformazioni, un integrale primo è

$$C(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\big(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\big) \cdot \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}) + \Big[L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\big(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\big) \cdot \dot{\mathbf{q}}\Big]\eta(t, \mathbf{q}).$$

Di questo risultato abbiamo illustrato due dimostrazioni. La prima di esse è basata sul calcolo della variazione del funzionale $\mathcal{I}$, la seconda invece discende da successive condizioni necessarie, fra cui quella di ottimalità di du Bois-Reymond per gli estremali. Anche in questo caso, abbiamo fornito alcuni esempi ricorrenti nella fisica classica, per rendere l'idea di come, ancora una volta, il teorema di Noether suggerisca idee per scoprire nuove leggi di conservazione.

Dal capitolo 3, seguendo i recentissimi articoli [5] e [6], cominciamo a generalizzare il teorema di Noether a problemi variazionali e di controllo con ritardo; sottolineiamo che nella letteratura precedente non è presente alcuna trattazione di ciò. La presenza del ritardo nelle variabili di stato e/o di controllo gioca un ruolo cruciale nel modellizzare fenomeni fisici della vita reale e ha numerose e non banali applicazioni nella teoria dei campi. Da un punto di vista matematico, scelto un

[1]E. Noether, Invariante Variationsprobleme. Nachr. D. König. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen, Math-Phys. Klasse **1918**: pagg. 235–257.

$0 < \tau < b - a$, si definisce lagrangiana una funzione L di classe $\mathcal{C}^1$ e differenziabile due volte dell'argomento

$$[\mathbf{q}]_\tau(t) \doteq (t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)),$$

si fissano un $\mathbf{q}_b \in \mathbb{R}^n$, una $\boldsymbol{\delta} : [a-\tau, a] \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^2$ a tratti e una classe di curve ammissibili

$$\Gamma \doteq \{\mathbf{q} : [a-\tau, b] \to \mathbb{R}^n, \mathbf{q}(b) = \mathbf{q}_b, \mathbf{q}_{|[a-\tau,a]} = \boldsymbol{\delta}, \mathbf{q}_{|[a,b]} \in \mathcal{C}^2\}$$

per poter definire un nuovo funzionale d'azione

$$\mathcal{I}^\tau[\mathbf{q}(\cdot)] = \int_a^b L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \, \mathrm{d}t.$$

Il primo importante risultato è un'estensione delle naturali equazioni di Eulero-Lagrange a equazioni con ritardo τ, che devono essere soddisfatte da ogni estremale $\mathbf{q}$ di $\mathcal{I}^\tau$. Si introduce inoltre lo sviluppo al prim'ordine nel parametro infinitesimo α di trasformazioni di tempi e coordinate, che ha l'espressione

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t + \alpha\eta(t, \mathbf{q}) + o(\alpha) \\ \bar{q} &= \mathbf{q} + \alpha\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}) + o(\alpha) \end{aligned}$$

con $\eta \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^{1+n}, \mathbb{R}\big)$ e $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^{1+n}, \mathbb{R}^n\big)$. Tramite un'opportuna definizione d'invarianza di $\mathcal{I}^\tau$, si dimostra l'esistenza dell'integrale primo definito da

$$\begin{cases} \Big[\partial_{\dot{\mathbf{q}}(\cdot)} L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_{\dot{\mathbf{q}}(\cdot-\tau)} L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big] \cdot \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}(t)) \\ \quad + \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \Big(\partial_{\dot{\mathbf{q}}(\cdot)} L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_{\dot{\mathbf{q}}(\cdot-\tau)} L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\eta(t, \mathbf{q}(t)) \\ \hfill \text{se } \ a \le t \le b-\tau \\ \partial_{\dot{\mathbf{q}}(\cdot)} L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}(t)) + \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \partial_{\dot{\mathbf{q}}(\cdot)} L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\eta(t, \mathbf{q}(t)) \\ \hfill \text{se } \ b-\tau \le t \le b \end{cases}$$

Il capitolo 4 è dedicato all'estensione dei risultati precedenti al caso in cui le curve ammissibili siano di classe $\mathcal{C}^1\big([a-\tau, b], \mathbb{R}^n\big)$ a tratti: si dimostra che, al fine di ottenere un nuovo integrale primo, è sufficiente restringere la ricerca degli estremali non di classe $\mathcal{C}^2$ a quelli che soddisfano la condizione di du Bois-Reymond.
A completamento del quadro lagrangiano, è sembrato opportuno trattare (nel capitolo 5) una condizione necessaria di minimo per $\mathcal{I}^\tau$, definendo un'opportuna funzione eccesso $E\big(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau), \mathbf{p}\big)$, la cui costruzione ricorda quella di Weierstrass senza ritardo.
La seconda parte dell'elaborato è dedicata alla ricerca di un integrale primo per la formulazione hamiltoniana del problema di minimo del funzionale

$$\mathcal{I}^\tau[\mathbf{q}(\cdot),\mathbf{u}(\cdot)] = \int_a^b L\big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{q}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau)\big)\,\mathrm{d}t$$

sottoposto al vincolo

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \boldsymbol{\varphi}\big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{q}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau)\big),$$

dove $\boldsymbol{\varphi}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ e, nel quadro del controllo ottimo con ritardo, sono considerati ammissibili i controlli $\mathbf{u} : [a-\tau,b] \to \mathbb{R}^r$ di classe $\mathcal{C}^0$ e le $\mathbf{q} : [a-\tau,b] \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1$ su $[a,b]$; la condizione iniziale è $\mathbf{q}_{|[a-\tau,a]} = \boldsymbol{\delta}$, con $\boldsymbol{\delta} : [a-\tau,a] \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti fissata. È stato dimostrato nel dettaglio il teorema di Pontryagin con ritardo, dopo aver definito un'opportuna funzione hamiltoniana H, ed è stata dedotta una serie di condizioni necessarie sui minimi del problema esposto espresse da sistemi hamiltoniani e condizioni stazionarie. Infine, introducendo lo sviluppo al prim'ordine nel parametro infinitesimo α di un sistema di trasformazioni di tempi, coordinate, controlli e co-stati

$$\begin{cases} \bar{t} = t + \alpha\eta\,(t,\mathbf{q},\mathbf{u}) + o(\alpha) \\ \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \alpha\boldsymbol{\xi}\,(t,\mathbf{q},\mathbf{u}) + o(\alpha) \\ \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \alpha\boldsymbol{\rho}\,(t,\mathbf{q},\mathbf{u}) + o(\alpha) \\ \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \alpha\boldsymbol{\varsigma}\,(t,\mathbf{q},\mathbf{u}) + o(\alpha) \end{cases}$$

(ove $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{1+n+r},\mathbb{R}), \boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\varsigma} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{1+n+r},\mathbb{R}^n), \boldsymbol{\rho} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{1+n+r},\mathbb{R}^r)$) e definendo opportunamente l'invarianza del funzionale $\mathcal{I}^\tau$ rispetto a tali trasformazioni, è stato possibile costruire l'invariante

$$\begin{aligned} C\,(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{q}(t-\tau),\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t-\tau),\mathbf{p}(t)) &= -\mathbf{p}(t)\cdot\boldsymbol{\xi}\,(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t)) \\ &\quad + H\big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{q}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau),\mathbf{p}(t)\big)\eta\,(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t))\,. \end{aligned}$$

1. Azioni e invarianza puntuale di lagrangiane

Consideriamo una famiglia di trasformazioni

$$\boldsymbol{\psi}_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

tali che per ogni scelta del parametro α (che può variare in $\mathbb{R}$ oppure S^1) $\boldsymbol{\psi}_\alpha$ sia un diffeomorfismo. Useremo di frequente la notazione $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, \alpha) = \boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q})$.
Se tale famiglia soddisfa le seguenti proprietà:

- $\boldsymbol{\psi}_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$
- $\forall\, \alpha, \beta \;\; \boldsymbol{\psi}_{\alpha+\beta} = \boldsymbol{\psi}_\alpha \circ \boldsymbol{\psi}_\beta$

si dice che, con l'operazione di gruppo data dalla composizione di funzioni, essa definisce una *azione* su $\mathbb{R}^n$.

Esempio 1.1. Forniamo subito degli esempi di azioni su $\mathbb{R}^n$:

(1) la traslazione e dilatazione di coefficiente α lungo il k-esimo asse coordinato, la cui espressione è

$$\boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}) = \mathbf{q} + \alpha\hat{\mathbf{e}}_k$$

dove $\hat{\mathbf{e}}_k$ è il k-esimo vettore della base canonica.

(2) la rotazione di angolo α attorno ad un asse $\hat{\mathbf{a}}$ passante per l'origine, che denoteremo nel seguito con $\boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}) = R_\alpha^{\hat{\mathbf{a}}}(\mathbf{q})$. In generale, la matrice $n \times n$ che rappresenta tale applicazione lineare è ortogonale del gruppo speciale, cioè a determinante positivo. Nel caso $n = 3$, si verifica facilmente che

$$\boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}) = R_\alpha^{\hat{\mathbf{a}}}(\mathbf{q}) = \exp(\alpha A)\mathbf{q}$$

dove $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ è la matrice antisimmetrica che rappresenta il prodotto vettore: $A\mathbf{q} = \hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{q}$. Se $\hat{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3)$, risulta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nel caso in cui, ad esempio, $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{e}}_3$, si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dunque

$$\boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}) = R_\alpha^{\hat{\mathbf{e}}_3}(\mathbf{q}) = \exp(\alpha A)\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q}$$

(3) il flusso di un sistema dinamico continuo del tipo $\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q})$. Esso si rappresenta nella forma
$$\boldsymbol{\psi}_t(\mathbf{q}_0) = \mathbf{q}(t)$$
dove $\mathbf{q}(t)$ rappresenta la curva soluzione del sistema dinamico con condizione iniziale $\mathbf{q}_0$ al tempo t. In questo caso il parametro α è rappresentato dalla variabile t.

Definizione 1.2. Data una famiglia ad un parametro di diffeomorfismi che rappresenta un'azione su $\mathbb{R}^n$, usando le notazioni introdotte, si dice *generatore infinitesimale dell'azione*
$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) \doteq \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha}{\partial \alpha}(\mathbf{q})\Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, 0)$$
Calcoliamo i generatori infinitesimali corrispondenti alle azioni definite negli esempi:

(1) $\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha}{\partial \alpha}(\mathbf{q})\big|_{\alpha=0} = \hat{\mathbf{e}}_k \Rightarrow \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) \equiv \hat{\mathbf{e}}_k$
(2) $\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha}{\partial \alpha}(\mathbf{q})\big|_{\alpha=0} = A\exp(\alpha A)\mathbf{q}\big|_{\alpha=0} = A\mathbf{q} = \hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{q}$

A proposito dell'esempio (3), osserviamo esplicitamente che, se ad ogni campo vettoriale è associata l'azione del corrispondente flusso, ogni azione è in realtà il flusso del campo vettoriale rappresentato dal suo generatore infinitesimale:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha}{\partial \alpha}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, \alpha) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, \alpha + h) - \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, \alpha)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{\psi}\left(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, \alpha), h\right) - \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, \alpha), 0)}{h} \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \alpha}(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, \alpha), 0) \\
&= \boldsymbol{\xi}\big((\boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, \alpha)\big)
\end{aligned}$$
Abbiamo perciò provato che $\boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q})$ soddisfa un'equazione del tipo $\dot{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{X})$.

Nel seguito, ci riferiremo con il termine *lagrangiana* ad una funzione
$$L : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
di classe $\mathcal{C}^1$ nei suoi argomenti $t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ e differenziabile due volte. Le *equazioni di Eulero-Lagrange* relative a L sono date da
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

Definizione 1.3. Data L come sopra, una funzione $C : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *costante del moto* o *integrale primo* per il sistema definito dalle equazioni di Eulero-Lagrange se $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} C(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ lungo le curve integrali.

Definizione 1.4. Sia L una lagrangiana, e $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{q} \mapsto \boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ una famiglia ad un parametro α di diffeomorfismi di classe $\mathcal{C}^2$.
Sia

$$\mathbb{R}^n \ni \dot{\mathbf{q}} \mapsto \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$$

la naturale estensione dei diffeomorfismi alla coordinata $\dot{\mathbf{q}}$.
Diciamo che L è *invariante* rispetto all'azione se per ogni scelta di $t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \alpha$ si ha

$$L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L\Big(t, \boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}), \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}\Big)$$

Teorema 1.5. *(Noether, formulazione puntuale)*
Con le notazioni introdotte nelle due definizioni precedenti, sia L una lagrangiana invariante rispetto alla famiglia di diffeomorfismi $\boldsymbol{\psi}_\alpha$ di classe $\mathcal{C}^2$. Allora

$$C(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \doteq \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_j}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, 0) \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

è un integrale primo del sistema.

Dimostrazione. L'ipotesi implica che

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[L\Big(t, \boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}), \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}\Big) \right] = 0.$$

Ma osserviamo che

$$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q})\big),$$

perciò, omettendo per semplicità di notazione le dipendenze funzionali, otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha^j}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{\psi}_\alpha^j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha^j}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha^j}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

dove abbiamo potuto scambiare le derivate nel secondo addendo per l'ipotesi di regolarità $\mathcal{C}^2$. Valutando questa uguaglianza per $\alpha = 0$, risulta

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_j} \cdot \boldsymbol{\xi}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{\xi}_j$$

ossia, lungo le soluzioni dell'equazione di Eulero-Lagrange,

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \cdot \boldsymbol{\xi}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\xi}_j \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \cdot \boldsymbol{\xi}_j \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \boldsymbol{\xi}\right].
\end{aligned}
$$

□

Esempio 1.6. Riferendoci alla meccanica classica, vediamo come la formulazione appena dimostrata del teorema di Noether permetta di ritrovare alcuni risultati noti.

(1) Consideriamo un punto materiale di massa m che si muove liberamente in $\mathbb{R}^3$, non soggetto ad alcuna forza. La lagrangiana associata a tale moto è

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{q}}|^2$$

Introduciamo la famiglia ad un parametro di diffeomorfismi $\mathcal{C}^2$ di $\mathbb{R}^3$ in sé data da

$$\boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}) = \mathbf{q} + \alpha\hat{\mathbf{e}}$$

dove $\hat{\mathbf{e}} \in S^2$. In questo caso, $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha}{\partial \alpha}(\mathbf{q})\Big|_{\alpha=0} = \hat{\mathbf{e}}$, e $\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha}{\partial \mathbf{q}} = \mathrm{Id}_{3\times 3}$ perciò

$$L(\boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}), \mathrm{Id}_{3\times3}\dot{\mathbf{q}}) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{q}}|^2$$

per ogni scelta di $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \alpha$. Osserviamo infatti esplicitamente che $\mathbf{q}$ e t sono coordinate cicliche in L. Data l'invarianza, il teorema garantisce che

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = m\dot{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{e}}$$

è un integrale primo del moto; riconosciamo in tale espressione la conservazione della quantità di moto lungo la direzione $\hat{\mathbf{e}}$. D'altra parte, questa costruzione vale per ogni scelta di $\hat{\mathbf{e}} \in S^2$, dunque la quantità di moto si conserva in ogni direzione.

(2) Consideriamo un punto materiale di massa m soggetto in $\mathbb{R}^3$ ad un campo di forze centrale di potenziale V. La lagrangiana associata al moto è

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{q}}|^2 - V(|\mathbf{q}|)$$

Introduciamo la famiglia ad un parametro di diffeomorfismi $\mathcal{C}^2$ di $\mathbb{R}^3$ in sé data da

$$\boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}) = R_\alpha^{\hat{\mathbf{a}}}(\mathbf{q})$$

(riferendoci alle notazioni dell'esempio (1.1)).
Risulta $\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) = R^{\hat{\mathbf{a}}}_\alpha(\mathbf{q})$ essendo in questo caso $\boldsymbol{\psi}_\alpha$ lineare in $\mathbf{q}$. Perciò,

$$L\Big(\boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}), \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}\Big) = L\big(R^{\hat{\mathbf{a}}}_\alpha(\mathbf{q}), R^{\hat{\mathbf{a}}}_\alpha(\dot{\mathbf{q}})\big) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

in quanto le rotazioni conservano le norme. Data l'invarianza, il teorema garantisce che

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{q}) \cdot m\dot{\mathbf{q}} = m(\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}) \cdot \hat{\mathbf{a}}.$$

Riconosciamo in questa espressione la conservazione della componente lungo l'asse $\hat{\mathbf{a}}$ del momento angolare. Anche in questo caso, data l'arbitrarietà della scelta dell'asse $\hat{\mathbf{a}}$, concludiamo, applicando il teorema, che il momento angolare si conserva lungo ogni asse.

(3) Supponiamo che tra le variabili della lagrangiana L la k-esima coordinata sia ciclica, ossia

$$L = L(t, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{q}_{k+1}, \ldots, \mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}).$$

Introduciamo la famiglia ad un parametro di diffeomorfismi $\mathcal{C}^2$ di $\mathbb{R}^n$ in sé data da

$$\boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}) = \mathbf{q} + \alpha\hat{\mathbf{e}}_k.$$

Risulta $\frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha}{\partial \mathbf{q}} = \mathrm{Id}_{n\times n}$, e dunque, data la ciclicità di $\mathbf{q}_k$ in L, si ha

$$L\Big(t, \boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}), \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}\Big) = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

L'invarianza implica allora la conservazione lungo il moto di

$$C(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

Classicamente, tale quantità si indica con $\mathbf{p}_k$ e si definisce come *momento* coniugato alla variabile ciclica.

2. Teorema di Noether classico

Cominciamo questa sezione definendo alcuni oggetti e spazi a cui ci riferiremo in tutto il seguito.
Scelti, $a < b$ in $\mathbb{R}$, $\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b \in \mathbb{R}^n$ poniamo

$$\Gamma \doteq \{\mathbf{q} : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \mathbf{q}(a) = \mathbf{q}_a, \mathbf{q}(b) = \mathbf{q}_b, \mathbf{q} \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R}^n)\}.$$

Se L è una lagrangiana di classe $\mathcal{C}^1$ e differenziabile due volte, sia $\mathcal{I}$ il funzionale *di azione*[2] associato ad L, $\mathcal{I} : \Gamma \to \mathbb{R}$ dato da

$$\mathcal{I}[\mathbf{q}(\cdot)] = \int_a^b L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathrm{d}t.$$

Consideriamo una famiglia ad un parametro $\alpha \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ di trasformazioni di coordinate (non necessariamente con una struttura di gruppo) $\boldsymbol{\psi}_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dove $\boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, \alpha)$, $\boldsymbol{\psi}_\alpha$ di classe $\mathcal{C}^2$ per ogni scelta di α, e $\boldsymbol{\psi}_0(\mathbf{q}) = \mathbf{q}\ \ \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.
Anche in questo caso, denoteremo con $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha}{\partial \alpha}(\mathbf{q})\Big|_{\alpha=0}$ il generatore infinitesimale.

Definizione 2.1. Con le notazioni appena introdotte, se

$$\int_{t_a}^{t_b} L\Big(t, \boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q})\Big)\mathrm{d}t = \int_{t_a}^{t_b} L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathrm{d}t$$

per ogni scelta di $\alpha \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $\mathbf{q} \in \Gamma$ e $[t_a, t_b] \subseteq [a, b]$, allora diremo che il funzionale $\mathcal{I}$ risulta invariante rispetto alla famiglia $\boldsymbol{\psi}_\alpha$.

Teorema 2.2. *Siano $L, \boldsymbol{\psi}_\alpha, \mathcal{I}, \Gamma$ come sopra. Supponiamo che il funzionale $\mathcal{I}$ risulti invariante rispetto a $\boldsymbol{\psi}_\alpha$ nel senso della definizione* (2.1)*. Allora, lungo le soluzioni in Γ delle equazioni di Eulero-Lagrange*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

relative a L, la quantità

$$C(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_j}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, 0)\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

è costante.

Dimostrazione. L'invarianza implica che per ogni scelta di $t_0 \in [a, b]$ si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\int_a^{t_0} L\Big(t, \boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}(t)), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\psi}_\alpha(\mathbf{q}(t))\Big)\,\mathrm{d}t\right]\Bigg|_{\alpha=0} = 0.$$

[2]Rimandiamo all'appendice per richiami sulla derivabilità secondo Gâteaux di tale funzionale e sul principio variazionale di Hamilton.

Date le ipotesi di regolarità e la compattezza dell'intervallo di integrazione, possiamo derivare sotto il segno d'integrale, ed otteniamo (omettendo per semplicità le dipendenze funzionali)

$$\int_a^{t_0} \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{\psi}_\alpha \right]_{\big|_{\alpha=0}} \mathrm{d}t = 0.$$

Sostituendo l'equazione di Eulero-Lagrange, e scambiando l'ordine di derivazione nel secondo addendo (possiamo farlo, data la regolarità $\mathcal{C}^2$ delle trasformazioni), risulta

$$\int_a^{t_0} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha}{\partial \alpha} \right]_{\big|_{\alpha=0}} \mathrm{d}t = 0.$$

Riconosciamo nell'integrando una derivata totale, precisamente si ottiene

$$\int_a^{t_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_\alpha}{\partial \alpha} \right]_{\big|_{\alpha=0}} \mathrm{d}t.$$

Applicando dunque il teorema fondamentale del calcolo integrale, risulta (recuperando le dipendenze funzionali)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\big(t_0, \mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0)\big) \cdot \boldsymbol{\xi}\big(\mathbf{q}(t_0)\big) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\big(a, \mathbf{q}(a), \dot{\mathbf{q}}(a)\big) \cdot \boldsymbol{\xi}\big(\mathbf{q}(a)\big)$$

per ogni scelta di $t_0 \in [a, b]$.

□

Vediamo ora di generalizzare i risultati finora raggiunti. Siano $L, \mathcal{I}, \Gamma$ come sopra. Considereremo famiglie ad un parametro $\alpha \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ di trasformazioni di tempi t e coordinate $\mathbf{q}$ che indicheremo così:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \varphi(t, \mathbf{q}, \alpha) = \varphi_\alpha(t, \mathbf{q}) \\ \overline{\mathbf{q}} &= \boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{q}, \alpha) = \boldsymbol{\psi}_\alpha(t, \mathbf{q}) \end{aligned} \tag{1}$$

dove $\varphi_\alpha : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{\psi}_\alpha : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sono diffeomorfismi di classe $\mathcal{C}^2$ per ogni scelta del parametro α.

I diffeomorfismi in (1) trasformano la curva γ rappresentata parametricamente da $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ in una nuova curva γ^*. Più precisamente, dalle equazioni (1), eliminando il parametro t (ossia sostituendolo con la $\varphi_\alpha^{-1}(\bar{t})$), otteniamo che $\bar{t} \mapsto \bar{\mathbf{q}}(\bar{t})$ rappresenta parametricamente γ^*.

Definizione 2.3. Con le notazioni introdotte, diremo che il funzionale $\mathcal{I}$ risulta invariante per le trasformazioni in (1) se per ogni sottointervallo $[t_a, t_b] \subseteq [a, b]$ si ha

$$\int_{\bar{t}(t_a)}^{\bar{t}(t_b)} L\left(\bar{t}, \bar{\mathbf{q}}(\bar{t}), \frac{\mathrm{d}\bar{\mathbf{q}}}{\mathrm{d}\bar{t}}\right)\mathrm{d}\bar{t} = \int_{t_a}^{t_b} L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathrm{d}t.$$

Esempio 2.4. Facciamo subito due esempi per capire il comportamento di funzionali rispetto a famiglie di diffeomorfismi di tempi e coordinate.

- Sia $n = 1$ e consideriamo il funzionale

$$\mathcal{J}[q] = \int_a^b \dot{q}(t)^2 \mathrm{d}t$$

associato alla lagrangiana $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L(x, z, p) = p^2$.
Introduciamo la famiglia ad un parametro $\alpha \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ di trasformazioni

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \varphi_\alpha(t, q) = t + \alpha \\ \bar{q} &= \psi_\alpha(t, q) = q \end{aligned} \tag{2}$$

Sia γ la curva di rappresentazione parametrica $t \mapsto q(t)$ per $a \leq t \leq b$ e γ^* la sua trasformata, parametrizzata da $\bar{t} \mapsto \bar{q}(\bar{t}) = q(\bar{t} - \alpha)$ per $a + \alpha \leq \bar{t} \leq b + \alpha$. Per ogni $[t_a, t_b] \subset [a, b]$ risulta

$$\int_{\bar{t}(t_a)}^{\bar{t}(t_b)} \left[\frac{\mathrm{d}\bar{q}(\bar{t})}{\mathrm{d}\bar{t}}\right]^2 \mathrm{d}\bar{t} = \int_{\bar{t}(t_a)}^{\bar{t}(t_b)} \left[\frac{\mathrm{d}q(\bar{t} - \alpha)}{\mathrm{d}\bar{t}}\right]^2 \mathrm{d}\bar{t} = \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}\right]^2 \mathrm{d}t$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato il cambio di variabili $t = \bar{t} - \alpha$. Perciò, secondo la definizione (2.3), $\mathcal{J}$ è invariante rispetto alle trasformazioni (2).
- Sempre nel caso $n = 1$, consideriamo il funzionale

$$\mathcal{J}[q] = \int_a^b t\dot{q}(t)^2 \mathrm{d}t$$

associato alla lagrangiana $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L(x, z, p) = xp^2$. Vogliamo concludere che questo non è un funzionale invariante rispetto alla famiglia di diffeomorfismi definiti in (2).
Per negare la definizione, scegliamo $t_a = a$ e $t_b = b$:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}[\bar{q}] = \int_{\bar{t}(a)}^{\bar{t}(b)} \bar{t}\left[\frac{\mathrm{d}\bar{q}(\bar{t})}{\mathrm{d}\bar{t}}\right]^2 \mathrm{d}\bar{t} &= \int_{\bar{t}(a)}^{\bar{t}(b)} \bar{t}\left[\frac{\mathrm{d}q(\bar{t}-\alpha)}{\mathrm{d}\bar{t}}\right]^2 \mathrm{d}\bar{t} \\ &= \int_a^b (t+\alpha)\left[\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}\right]^2 \mathrm{d}t \\ &= \mathcal{J}[q] + \alpha \int_a^b \left[\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}\right]^2 \mathrm{d}t \\ &\neq \mathcal{J}[q].\end{aligned}$$

Vogliamo ora introdurre una tecnica che ci permetta di calcolare esplicitamente la *variazione* di un funzionale, in un senso che definiremo opportunamente.
Consideriamo dapprima il caso $n = 1$, ossia trattiamo il caso di funzioni q scalari; inoltre, per dare una visione il più ampia possibile, consideremo *ammissibili* tutte le q di classe $\mathcal{C}^2$ definite su intervalli chiusi, a meno di definirne un prolungamento opportuno. In questa costruzione, gli estremi di integrazione del funzionale $\mathcal{I}$ risulteranno variabili.
Siano γ_1 e γ_2 due curve ammissibili parametrizzate rispettivamente dalle mappe $t \mapsto q_1(t)$ e $t \mapsto q_2(t)$; siano ρ la distanza euclidea nel piano e P_0^1, P_1^1 gli estremi nel piano del cammino γ_1, P_0^2, P_1^2 gli estremi nel piano del cammino γ_2.
Prolunghiamo, ove necessario, con tratti lineari affini i grafici di γ_1 e γ_2: tale prolungamento è di classe $\mathcal{C}^1$ con derivata prima lipschitziana; la coppia di cammini risulta in questo modo definita sull'unione dei domini e definiamo la seguente distanza:

$$d(\gamma_1, \gamma_2) \doteq \max|q_1 - q_2| + \max|\dot{q}_1 - \dot{q}_2| + \rho(P_0^1, P_0^2) + \rho(P_1^1, P_1^2)$$

Siano ora γ_1 e γ_2 due curve *vicine* nel senso degli intorni indotti dalla distanza appena definita. Se q_1 e q_2 sono le rispettive parametrizzazioni, poniamo $h(t) = q_2(t) - q_1(t)$ (al solito, prolungando i grafici in modo regolare tramite funzioni lineari affini). Dunque, essendo $q_2 = q_1 + h$, rimuoviamo i pedici e porremo $q_1 = q$. Supponiamo che q sia definita sull'intervallo $[a, b]$; gli estremi dei cammini sono dati da

$$P_0^1 = (a, q_a), P_1^1 = (b, q_b)$$

$$P_0^2 = (a + \delta_a, q_a + \delta_{q_a}), P_1^2 = (b + \delta_b, q_b + \delta_{q_b})$$

dove supporremo, sempre senza perdita di generalità, che $\delta_a, \delta_b > 0$.
L'*incremento* fra le curve parametrizzate da q e $q + h$ è definito come

$$\Delta\mathcal{I} \doteq \mathcal{I}[q + h] - \mathcal{I}[q]$$

dove, coerentemente con la costruzione eseguita, il funzionale $\mathcal{I}$ calcola l'integrale su tutto l'intervallo $[a, b + \delta_b]$ invece che soltanto su $[a, b]$.

Risulta, per definizione,

$$\Delta\mathcal{I} = \int_{a+\delta_a}^{b+\delta_b} L\Big(t, q(t)+h(t), \dot q(t)+\dot h(t)\Big)\,\mathrm{d}t - \int_a^b L\Big(t, q(t), \dot q(t)\Big)\,\mathrm{d}t$$

ossia

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{I} = &\int_a^b \Big[L\Big(t, q(t)+h(t), \dot q(t)+\dot h(t)\Big) - L\Big(t, q(t), \dot q(t)\Big)\Big]\,\mathrm{d}t \\ &+ \int_b^{b+\delta_b} L\Big(t, q(t)+h(t), \dot q(t)+\dot h(t)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &- \int_a^{a+\delta_a} L\Big(t, q(t)+h(t), \dot q(t)+\dot h(t))\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3}$$

Applichiamo uno sviluppo di Taylor degli integrandi, arrestato al prim'ordine rispetto alla distanza $d(\gamma_1, \gamma_2)$, osservando che nell'espressione di quest'ultima compare fra gli addendi $\max|h|$, dove h è la parametrizzazione della curva che rappresenta l'incremento. Più precisamente, sia $\varepsilon = ||h||_{\mathcal{C}^1} + \delta_a + \delta_b + |\delta_{q_a}| + |\delta_{q_b}|$; lo sviluppo di Taylor sarà arrestato a termini di prim'ordine rispetto a ε.
Occupiamoci del primo addendo della (3). Sviluppando, si ha

$$\begin{aligned}&\int_a^b \Big[L\Big(t, q(t)+h(t), \dot q(t)+\dot h(t)\Big) - L\Big(t, q(t), \dot q(t)\Big)\Big]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q}\big(t, q(t), \dot q(t)\big)h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(t, q(t), \dot q(t)\big)\dot h(t)\right]\mathrm{d}t + o(\varepsilon) \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q}\big(t, q(t), \dot q(t)\big)h(t)\right]\mathrm{d}t + \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(t, q(t), \dot q(t)\big)\dot h(t)\right]\mathrm{d}t + o(\varepsilon) \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q}\big(t, q(t), \dot q(t)\big)h(t)\right]\mathrm{d}t + h(t)\frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(t, q(t), \dot q(t)\big)\Big|_a^b \\ &- \int_a^b \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(t, q(t), \dot q(t)\big)\right]h(t)\,\mathrm{d}t + o(\varepsilon) \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q}\big(t, q(t), \dot q(t)\big) - \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(t, q(t), \dot q(t)\big)\Big)\right]h(t)\,\mathrm{d}t \\ &+ h(t)\frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(t, q(t), \dot q(t)\big)\Big|_a^b + o(\varepsilon).\end{aligned}$$

Ma, ricordando il tipo di prolungamento scelto per i grafici, si ha:

$$\begin{aligned}h(a) &= \delta_{q_a} - \dot q(a)\delta_a + o(\varepsilon) \\ h(b) &= \delta_{q_b} - \dot q(b)\delta_b + o(\varepsilon)\end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \Big[L\Big(t, q(t)+h(t), \dot q(t)+\dot h(t)\Big) - L\Big(t, q(t), \dot q(t)\Big)\Big]\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q}\big(t, q(t), \dot q(t)\big) - \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(t, q(t), \dot q(t)\big)\Big)\right] h(t)\,\mathrm{d}t \\
&+ \frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(b, q(b), \dot q(b)\big)\delta_{q_b} - \frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(a, q(a), \dot q(a)\big)\delta_{q_a} \\
&- \left[\frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(b, q(b), \dot q(b)\big)\dot q(b)\delta_b - \frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(a, q(a), \dot q(a)\big)\dot q(a)\delta_a\right] + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Consideriamo ora il secondo addendo di (3). Sviluppando con Taylor, e ricordando le espressioni di $h(a)$ e $h(b)$, otteniamo

$$\begin{aligned}
L\Big(t, q(t)+h(t), \dot q(t)+\dot h(t)\Big) &= L\big(t, q(t), \dot q(t)\big) + \frac{\partial L}{\partial q}\big(t, q(t), \dot q(t)\big)h(t) \\
&+ \frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(t, q(t), \dot q(t)\big)\dot h(t) + o(\varepsilon)
\end{aligned}$$

da cui, valutando in $t = b$,

$$\begin{aligned}
L\Big(b, q(b)+h(b), \dot q(b)+\dot h(b)\Big) &= L\big(b, q(b), \dot q(b)\big) + \frac{\partial L}{\partial q}\big(b, q(b), \dot q(b)\big)h(b) \\
&+ \frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(b, q(b), \dot q(b)\big)\dot h(b) + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Questo implica che

$$\begin{aligned}
&\int_b^{b+\delta_b} \Big[L\Big(b, q(b)+h(b), \dot q(b)+\dot h(b)\Big) - L\big(b, q(b), \dot q(b)\big)\Big]\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\partial L}{\partial q}\big(b, q(b), \dot q(b)\big)h(b)\delta_b + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(b, q(b), \dot q(b)\big)\dot h(b)\delta_b + o(\varepsilon) = o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned}
&\int_b^{b+\delta_b} \Big[L\left(t, q(t)+h(t), \dot q(t)+\dot h(t)\right) - L\big(b, q(b), \dot q(b)\big)\Big]\,\mathrm{d}t\\
&= \int_b^{b+\delta_b} \Big[L\left(t, q(t)+h(t), \dot q(t)+\dot h(t)\right) - L\left(b, q(b)+h(b), \dot q(b)+\dot h(b)\right)\Big]\,\mathrm{d}t\\
&+ \int_b^{b+\delta_b} \Big[L\left(b, q(b)+h(b), \dot q(b)+\dot h(b)\right) - L\big(b, q(b), \dot q(b)\big)\Big]\,\mathrm{d}t\\
&= \int_b^{b+\delta_b} \Big[L\left(t, q(t)+h(t), \dot q(t)+\dot h(t)\right) - L\left(b, q(b)+h(b), \dot q(b)+\dot h(b)\right)\Big]\,\mathrm{d}t + o(\varepsilon)\\
&= o(\varepsilon),
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è semplicemente utilizzata la continuità dell'integranda. Perciò,

$$\begin{aligned}
&\int_b^{b+\delta_b} L\Big(t, q(t)+h(t), \dot q(t)+\dot h(t)\Big)\,\mathrm{d}t\\
&= L\big(b, q(b), \dot q(b)\big)\delta_b + o(\varepsilon)
\end{aligned}$$

ed analogamente

$$\begin{aligned}
&\int_a^{a+\delta_a} L\Big(t, q(t)+h(t), \dot q(t)+\dot h(t)\Big)\,\mathrm{d}t\\
&= L\big(a, q(a), \dot q(a)\big)\delta_a + o(\varepsilon)
\end{aligned}$$

Perciò, raccogliendo complessivamente, otteniamo

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{I} = &\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q}\big(t, q(t), \dot q(t)\big) - \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(t, q(t), \dot q(t)\big)\Big)\right] h(t)\,\mathrm{d}t\\
&+ \frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(b, q(b), \dot q(b)\big)\delta_{q_b} - \frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(a, q(a), \dot q(a)\big)\delta_{q_a}\\
&+ \left[L\big(b, q(b), \dot q(b)\big) - \frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(b, q(b), \dot q(b)\big)\dot q(b)\right]\delta_b\\
&- \left[L\big(a, q(a), \dot q(a)\big) - \frac{\partial L}{\partial \dot q}\big(a, q(a), \dot q(a)\big)\dot q(a)\right]\delta_a + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Definizione 2.5. Con riferimento alle notazioni della sezione, ed omettendo per semplicità le dipendenze funzionali, definiamo *variazione* di $\mathcal{I}$ relativa agli incrementi $\delta_a, \delta_b, \delta_{q_a}, \delta_{q_b}$ la quantità (che differisce da $\Delta\mathcal{I}$ per termini di ordine superiore al primo in d)

$$\delta\mathcal{I} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right] h\,\mathrm{d}t + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\Big|_a^b + \left[L - \frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q\right]\delta t\Big|_a^b$$

avendo posto $\delta q\big|_{a,b} = \delta_{q_a}, \delta_{q_b}$ e $\delta t\big|_{a,b} = \delta_a, \delta_b$ rispettivamente.

Vediamo ora di generalizzare i risultati ottenuti finora a n dimensioni.
Anche in questo caso considereremo ammissibili curve il cui parametro varia su intervalli chiusi diversi. Siano $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2$ due curve ammissibili parametrizzate rispettivamente da $t \mapsto \mathbf{q}_1(t)$ e $t \mapsto \mathbf{q}_2(t)$. Continueremo ad indicare con P_0^1, P_1^1 gli estremi del cammino $\boldsymbol{\gamma}_1$ e con P_0^2, P_1^2 gli estremi del cammino $\boldsymbol{\gamma}_2$.
A patto di prolungare tramite funzioni lineari affini raccordate in modo regolare, la coppia di cammini risulta definita sull'unione dei rispettivi domini e consideriamo la distanza $\tilde{d}(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2)$ data dal prodotto delle distanze d (già definite in precedenza) fra le mappe componenti $\mathbf{q}_1^j, \mathbf{q}_2^j$.
Consideriamo ora, come nel caso $n = 1$, una coppia di curve $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2$ *vicine* nel senso degli intorni indotti dalla distanza $\tilde{d}$ appena definita. Se $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$ sono le rispettive parametrizzazioni, poniamo $\mathbf{h}(t) = \mathbf{q}_2(t) - \mathbf{q}_1(t)$.
Dunque, essendo $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{h}$, rimuoviamo i pedici e porremo $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}$. Supponiamo che $\mathbf{q}$ sia definita sull'intervallo $[a, b]$; gli estremi dei cammini risultano

$$P_0^1 = (a, \mathbf{q}_a), P_1^1 = (b, \mathbf{q}_b)$$

$$P_0^2 = (a + \delta_a, \mathbf{q}_a + \delta_{\mathbf{q}_a}), P_1^2 = (b + \delta_b, \mathbf{q}_b + \delta_{\mathbf{q}_b})$$

dove abbiamo introdotto i vettori

$$\delta_{\mathbf{q}_a} = (\delta_{\mathbf{q}_a^1}, \ldots, \delta_{\mathbf{q}_a^n})$$
$$\delta_{\mathbf{q}_b} = (\delta_{\mathbf{q}_b^1}, \ldots, \delta_{\mathbf{q}_b^n})$$

e supporremo anche in questo caso, senza perdita di generalità, che $\delta_a, \delta_b > 0$. Analogamente a quanto fatto per $n = 1$, poniamo

$$\Delta\mathcal{I} = \mathcal{I}[\mathbf{q} + \mathbf{h}] - \mathcal{I}[\mathbf{q}]$$

dove, coerentemente con la costruzione eseguita, l'integrale viene calcolato su tutto l'intervallo $[a, b + \delta_b]$ invece che soltanto su $[a, b]$.
Risulta, per definizione,

$$\Delta\mathcal{I} = \int_{a+\delta_a}^{b+\delta_b} L\Big(t, \mathbf{q}(t) + \mathbf{h}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\mathbf{h}}(t)\Big)\,\mathrm{d}t - \int_a^b L\big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

ossia

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{I} = &\int_a^b \Big[L\big(t, \mathbf{q}(t) + \mathbf{h}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\mathbf{h}}(t)\big) - L\big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\big)\Big]\,\mathrm{d}t \\
&+ \int_b^{b+\delta_b} L\big(t, \mathbf{q}(t) + \mathbf{h}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\mathbf{h}}(t)\big)\,\mathrm{d}t \\
&- \int_a^{a+\delta_a} L\big(t, \mathbf{q}(t) + \mathbf{h}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\mathbf{h}}(t)\big)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{4}$$

Applichiamo uno sviluppo di Taylor degli integrandi, arrestato al prim'ordine rispetto alla distanza $\tilde{d}(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2)$ e indichiamo con $\sim$ la relazione di uguaglianza a meno di termini di ordine superiore al primo rispetto a tale quantità.
Occupiamoci innanzitutto del primo termine di (4): risulta, omettendo per semplicità le dipendenze funzionali,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \Big[L\big(t, \mathbf{q}+\mathbf{h}, \dot{\mathbf{q}}+\dot{\mathbf{h}}\big) - L\big(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\big)\Big]\,\mathrm{d}t \\
&\sim \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{h}}\right] \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right] \cdot \mathbf{h}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \mathbf{h}\Big|_a^b
\end{aligned}$$

D'altra parte, per ogni $j = 1, \ldots, n$, a meno di termini di ordine superiore al primo in $d(\boldsymbol{\gamma}_1^j, \boldsymbol{\gamma}_2^j)$ dal prolungamento lineare affine segue che

$$\mathbf{h}_j(a) = \delta_{\mathbf{q}_a^j} - \dot{\mathbf{q}}_j(a)\delta_a$$

$$\mathbf{h}_j(b) = \delta_{\mathbf{q}_b^j} - \dot{\mathbf{q}}_j(b)\delta_b$$

perciò si ha

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \Big[L\big(t, \mathbf{q}+\mathbf{h}, \dot{\mathbf{q}}+\dot{\mathbf{h}}\big) - L\big(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\big)\Big]\,\mathrm{d}t \\
&\sim \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right] \cdot \mathbf{h}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\big(b, \mathbf{q}(b), \dot{\mathbf{q}}(b)\big) \cdot \delta_{\mathbf{q}_b} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\big(a, \mathbf{q}(a), \dot{\mathbf{q}}(a)\big) \cdot \delta_{\mathbf{q}_a} \\
&- \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\big(b, \mathbf{q}(b), \dot{\mathbf{q}}(b)\big) \cdot \dot{\mathbf{q}}(b)\delta_b - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\big(a, \mathbf{q}(a), \dot{\mathbf{q}}(a)\big) \cdot \dot{\mathbf{q}}(a)\delta_a\right].
\end{aligned}$$

Infine, approssimiamo (analogamente al caso 1-dimensionale) gli altri due addendi di (4) al prim'ordine in $\tilde{d}$:

$$\int_b^{b+\delta_b} L\big(t, \mathbf{q}(t)+\mathbf{h}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)+\dot{\mathbf{h}}(t)\big)\,\mathrm{d}t \sim L\big(b, \mathbf{q}(b), \dot{\mathbf{q}}(b)\big)$$

e

$$\int_a^{a+\delta_a} L\big(t, \mathbf{q}(t)+\mathbf{h}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)+\dot{\mathbf{h}}(t)\big)\,\mathrm{d}t \sim L\big(a, \mathbf{q}(a), \dot{\mathbf{q}}(a)\big)$$

Raccogliendo complessivamente tutti i termini, risulta:

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathcal{I} &= \int_{a+\delta_a}^{b+\delta_b} L\big(t, \mathbf{q}(t)+\mathbf{h}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)+\dot{\mathbf{h}}(t)\big)\,\mathrm{d}t - \int_a^b L\big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\big)\,\mathrm{d}t \\
&\sim \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\big) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\big)\right]\cdot \mathbf{h}\,\mathrm{d}t \\
&+ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\big(b, \mathbf{q}(b), \dot{\mathbf{q}}(b)\big)\cdot \delta_{\mathbf{q}_b} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\big(a, \mathbf{q}(a), \dot{\mathbf{q}}(a)\big)\cdot \delta_{\mathbf{q}_a} \\
&+ \left[L\big(b, \mathbf{q}(b), \dot{\mathbf{q}}(b)\big) - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\big(b, \mathbf{q}(b), \dot{\mathbf{q}}(b)\big)\dot{\mathbf{q}}(b)\right]\delta_b \\
&- \left[L\big(a, \mathbf{q}(a), \dot{\mathbf{q}}(a)\big) - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\big(a, \mathbf{q}(a), \dot{\mathbf{q}}(a)\big)\dot{\mathbf{q}}(a)\right]\delta_a
\end{aligned}
$$

Definizione 2.6. Con riferimento alle notazioni della sezione, ed omettendo per semplicità le dipendenze funzionali, definiamo *variazione* di $\mathcal{I}$ relativa agli incrementi $\delta_a, \delta_b, \delta_{\mathbf{q}_a}, \delta_{\mathbf{q}_b}$ la quantità (che differisce da $\Delta\mathcal{I}$ per termini di ordine superiore al primo in $\tilde{d}$)

$$
\delta\mathcal{I} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]\cdot \mathbf{h}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\cdot \delta_{\mathbf{q}}\Big|_a^b + \left[L - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\cdot \dot{\mathbf{q}}\right]\delta t\Big|_a^b
$$

avendo posto $\delta_{\mathbf{q}}\big|_{a,b} = \delta_{\mathbf{q}_a}, \delta_{\mathbf{q}_b}$ e $\delta t\big|_{a,b} = \delta_a, \delta_b$ rispettivamente.

Siamo ora in grado di dare una prima dimostrazione del

Teorema 2.7. *(Noether, 1918)*
Siano $L, \mathcal{I}, \Gamma$ come sopra. Sia

$$
\begin{aligned}
\bar{t} &= \varphi(t, \mathbf{q}, \alpha) = \varphi_\alpha(t, \mathbf{q}) \\
\overline{\mathbf{q}} &= \boldsymbol{\psi}(t, \mathbf{q}, \alpha) = \boldsymbol{\psi}_\alpha(t, \mathbf{q})
\end{aligned}
$$

una famiglia ad un parametro α di trasformazioni di tempi e coordinate, dove $\varphi_\alpha : [a,b]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{\psi}_\alpha : [a,b]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sono diffeomorfismi di classe $\mathcal{C}^2$ per ogni scelta del parametro $\alpha \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, e $\varphi_0(t,\mathbf{q}) = t, \boldsymbol{\psi}_0(t,\mathbf{q}) = \mathbf{q}$ per ogni $t \in [a,b]$ e $\mathbf{q} \in \Gamma$. Supponiamo che $\mathcal{I}$ sia invariante rispetto alle trasformazioni introdotte, nel senso precisato dalla definizione (2.3)*. Allora, detti*

$$
\eta(t, \mathbf{q}) \doteq \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\big(t, \mathbf{q}, \alpha\big)\Big|_{\alpha=0}
$$

$$
\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}) \doteq \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \alpha}(t, \mathbf{q}, \alpha)\Big|_{\alpha=0}
$$

i generatori infinitesimali, risulta che

$$C(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \cdot \boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}) + \left[L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}}\right]\eta(t,\mathbf{q})$$

è un integrale primo del sistema lagrangiano.

Dimostrazione. Sviluppiamo con Taylor al prim'ordine rispetto ad α le relazioni che definiscono le trasformazioni, supponendo α infinitesimo:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \varphi(t,\mathbf{q},\alpha) = \varphi(t,\mathbf{q},0) + \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}(t,\mathbf{q},\alpha)\Big|_{\alpha=0} + o(\alpha) = t + \alpha\eta(t,\mathbf{q}) + o(\alpha) \\ \overline{\mathbf{q}} &= \boldsymbol{\psi}(t,\mathbf{q},\alpha) = \boldsymbol{\psi}(t,\mathbf{q},0) + \alpha\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\alpha}(t,\mathbf{q},\alpha)\Big|_{\alpha=0} + o(\alpha) = \mathbf{q} + \alpha\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}) + o(\alpha) \end{aligned} \tag{5}$$

Supponiamo che $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ sia un estremale debole di $\mathcal{I}$, ossia[3] una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange, e utilizziamo la definizione di variazione introdotta nella definizione (2.6), relativamente agli incrementi

$$\delta t = \alpha\eta$$

$$\delta_{\mathbf{q}} = \alpha\boldsymbol{\xi}$$

al solito ignorando i termini di ordine superiore al primo in α.
Data l'invarianza, risulta (omettendo per semplicità le dipendenze funzionali)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \delta_{\mathbf{q}}\Big|_a^b + \left[L - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}\right]\delta t\Big|_a^b \\ &= \alpha\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \boldsymbol{\xi}\Big|_a^b + \left[L - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}\right]\eta\Big|_a^b\right\} \end{aligned}$$

Dunque,

$$\left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \boldsymbol{\xi} + \left[L - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}\right]\eta\right\}\Big|_{t=a} = \left\{\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \boldsymbol{\xi} + \left[L - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}\right]\eta\right\}\Big|_{t=b}$$

Ora, la conservazione di C lungo ogni estremale segue dall'arbitrarietà della scelta di a e b. $\square$

Vogliamo ora proporre una seconda dimostrazione del teorema (2.7), ricavando progressivamente solo condizioni necessarie derivanti dalla definizione di invarianza che abbiamo adottato per il funzionale $\mathcal{I}$.

[3] rimandiamo all'appendice, si tratta del *principio variazionale di Hamilton.*

Proposizione 2.8. *Con riferimento alle notazioni finora adottate, supponiamo $\mathcal{I}$ invariante rispetto alle trasformazioni* (1). *Allora (omettendo per semplicità le dipendenze funzionali), si ha*

$$\frac{\partial L}{\partial t}\eta + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\xi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \big(\dot{\boldsymbol{\xi}} - \dot{\mathbf{q}}\dot{\eta}\big) + L\dot{\eta} = 0. \tag{6}$$

Dimostrazione. La relazione d'invarianza della definizione (2.3) è soddisfatta per ogni sottointervallo $[t_a, t_b] \subseteq [a, b]$, dunque possiamo rimuovere il segno d'integrale e scrivere, equivalentemente,

$$L\big(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\big) = L\left(t + \alpha\eta + o(\alpha), \mathbf{q} + \alpha\boldsymbol{\xi} + o(\alpha), \frac{\frac{\mathrm{d}\bar{\mathbf{q}}}{\mathrm{d}\bar{t}}}{\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t}}\right)\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t}$$

ossia

$$L\big(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\big) = L\left(t + \alpha\eta + o(\alpha), \mathbf{q} + \alpha\boldsymbol{\xi} + o(\alpha), \frac{\dot{\mathbf{q}} + \alpha\dot{\boldsymbol{\xi}} + o(\alpha)}{1 + \alpha\dot{\eta} + o(\alpha)}\right)(1 + \alpha\dot{\eta} + o(\alpha))$$

Osserviamo esplicitamente che l'infinitesimo $o(\alpha)$ che compare nelle equazioni (5) è rappresentato da una $\omega(\alpha)$ differenziabile in un intorno di 0 ed avente per definizione la proprietà che $\lim_{\alpha\to 0} \frac{\omega(\alpha)}{\alpha} = 0$. Applicando il teorema di de l'Hôpital, risulta che la derivata prima di $o(\alpha)$ è $o(1)$. Deriviamo ora entrambi i membri dell'equazione rispetto al parametro α. Calcoliamo separatamente

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[\frac{1}{1 + \alpha\dot{\eta} + o(\alpha)}\big(\dot{\mathbf{q}} + \alpha\dot{\boldsymbol{\xi}} + o(\alpha)\big)\right] &= \frac{-\dot{\eta} + o(1)}{(1 + \alpha\dot{\eta} + o(\alpha))^2}\big(\dot{\mathbf{q}} + \alpha\dot{\boldsymbol{\xi}} + o(\alpha)\big)\\ &\quad + \frac{1}{1 + \alpha\dot{\eta} + o(\alpha)}\big(\dot{\boldsymbol{\xi}} + o(1)\big)\end{aligned}$$

e sostituiamo questa identità in

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left[L\left(t + \alpha\eta + o(\alpha), \mathbf{q} + \alpha\boldsymbol{\xi} + o(\alpha), \frac{\dot{\mathbf{q}} + \alpha\dot{\boldsymbol{\xi}} + o(\alpha)}{1 + \alpha\dot{\eta} + o(\alpha)}\right)(1 + \alpha\dot{\eta} + o(\alpha))\right]$$

ottenendo

$$
\begin{aligned}
0 = \Bigg[& \frac{\partial L}{\partial t}\eta + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\xi} \\
& + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \Bigg(\frac{-\dot\eta + o(1)}{(1+\alpha\dot\eta + o(\alpha))^2} \big(\dot{\mathbf{q}} + \alpha\dot{\boldsymbol{\xi}} + o(\alpha)\big) + \\
& \frac{1}{1+\alpha\dot\eta + o(\alpha)} \big(\dot{\boldsymbol{\xi}} + o(1)\big)\Bigg)\Bigg](1+\alpha\dot\eta + o(\alpha)) \\
& + L[\dot\eta + o(1)].
\end{aligned}
$$

Valutiamo ora entrambi i membri dell'equazione per $\alpha = 0$, ottenendo infine

$$
\frac{\partial L}{\partial t}\eta + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\xi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \big(\dot{\boldsymbol{\xi}} - \dot{\mathbf{q}}\dot\eta\big) + L\dot\eta = 0.
$$

In conclusione, osserviamo che l'inclusione dell'infinitesimo $o(\alpha)$ nella definizione di invarianza è del tutto ininfluente ai fini del calcolo, perciò nelle definizioni successive a questa lo ometteremo. $\square$

Proposizione 2.9. *(Ottimalità di du Bois-Reymond)*
Con riferimento alle notazioni finora adottate, supponiamo che $\mathbf{q} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *sia un estremale debole del funzionale* $\mathcal{I}$. *Allora vale l'uguaglianza*

$$
\frac{\partial L}{\partial t}\big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L\big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\big) - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\big) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t)\right]. \tag{7}
$$

Dimostrazione. Omettendo le dipendenze funzionali per semplicità di notazione, abbiamo

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}}\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}}\right] \\
&= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} \\
&= \frac{\partial L}{\partial t}
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato le equazioni di Eulero-Lagrange e la regola di derivazione della funzione composta. $\square$

Siamo in grado di provare il teorema (2.7): anche in questo caso ometteremo le ovvie dipendenze funzionali.
Sia $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ un estremale debole del funzionale $\mathcal{I}$ e, ricordando la proposizione (2.8), dall'invarianza di $\mathcal{I}$ segue

$$
\frac{\partial L}{\partial t}\eta + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\xi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \big(\dot{\boldsymbol{\xi}} - \dot{\mathbf{q}}\dot\eta\big) + L\dot\eta = 0.
$$

Equivalentemente,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\xi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{\partial L}{\partial t}\eta + \left[L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}}\right] \dot{\eta} = 0.$$

Tenendo presente che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$ e utilizzando la condizione di ottimalità di du Bois-Reymond, risulta

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \boldsymbol{\xi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}}\right] \eta + \left[L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}}\right] \dot{\eta} = 0$$

e per concludere è sufficiente osservare che il membro di sinistra è una derivata totale, precisamente si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \boldsymbol{\xi} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}}\right)\eta\right] = 0.$$

Esempio 2.10. Vediamo qualche esempio e applicazione del teorema di Noether classico.

- Dato un sistema lagrangiano, un risultato standard della meccanica classica è l'esistenza di un integrale primo detto *di Jacobi*, che esiste qualora il sistema sia definito da una lagrangiana L non dipendente esplicitamente dalla variabile t. Esso è dato da

  $$E(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

  Quello che vogliamo mostrare è una sorta di viceversa. Con le notazioni della sezione, supponiamo che (secondo la definizione (2.3)) il funzionale $\mathcal{I}$ sia invariante per la seguente famiglia ad un parametro $\alpha \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ di trasformazioni puramente temporali:

  $$\bar{t} = t + \alpha$$
  $$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$$

  I generatori infinitesimali corrispondenti sono:

  $$\eta(t, \mathbf{q}) \equiv 1$$
  $$\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}) \equiv \mathbf{0}$$

  La legge di conservazione corrispondente a questa invarianza è, per il teorema di Noether,

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \boldsymbol{\xi} + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}}\right)\eta\right] = 0$$

  ossia, nello specifico,

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}}\right] = 0.$$

Sviluppiamo la derivata totale lungo le soluzioni dell'equazione di Eulero-Lagrange ottenendo:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \ddot{\mathbf{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}}\right) \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

e poiché tale equazione vale per ogni scelta di $t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$, abbiamo ottenuto che la lagrangiana L non dipende esplicitamente dalla variabile t.

- Consideriamo, per $n = 1$, l'equazione differenziale del II ordine

$$\ddot{q} + \lambda \dot{q} + \omega^2 q = 0 \tag{8}$$

il cui significato fisico è quello della legge del moto di un oscillatore armonico di costante elastica k, frequenza $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$(dove m è la massa dell'oscillatore) e coefficiente di smorzamento $\lambda > 0$ (che ha le dimensioni fisiche dell'inverso di un tempo).

Possiamo immediatamente dedurre una legge di dissipazione: moltiplichiamo entrambi i membri della (8) per $\dot{q}$ ottenendo

$$\ddot{q}\dot{q} + \lambda \dot{q}^2 + \omega^2 q \dot{q} = 0$$

ossia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2\right] = -\lambda \dot{q}^2$$

Vogliamo dedurre, applicando il teorema di Noether, un integrale primo del sistema. La (8) è equivalente all'equazione di Eulero-Lagrange relativa ad una opportuna $L \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, data da

$$L(t, q, \dot{q}) = e^{\lambda t}\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 q^2\right).$$

Fissati $a, b \in \mathbb{R}$, consideriamo il consueto funzionale d'azione $\mathcal{I}$ e introduciamo la famiglia di trasformazioni ad un parametro $\alpha \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t + \alpha \\ \bar{q} &= e^{\frac{-\lambda\alpha}{2}} q \end{aligned}$$

Verifichiamo, secondo la definizione (2.3), l'invarianza di $\mathcal{I}$ rispetto a tale famiglia:

$$\int_{\bar{t}(t_a)}^{\bar{t}(t_b)} L\left(t, \bar{q}(\bar{t}), \frac{\mathrm{d}\bar{q}}{\mathrm{d}\bar{t}}\right) \mathrm{d}\bar{t} = \int_{\bar{t}(t_a)}^{\bar{t}(t_b)} e^{\lambda \bar{t}} \left(\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{q}}{\mathrm{d}\bar{t}}\right)^2 - \frac{m}{2}\omega^2 \bar{q}^2\right) \mathrm{d}\bar{t}$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} e^{\lambda t + \lambda\alpha} \left(\frac{m}{2} e^{-\lambda\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{m}{2}\omega^2 e^{-\lambda\alpha} q^2\right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} e^{\lambda t}\left(\frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 q^2\right) \mathrm{d}t = \int_{t_a}^{t_b} L\big(t, q, \dot{q}\big)\mathrm{d}t.$$

Supponiamo ora α infinitesimo e sviluppiamo al prim'ordine in α le relazioni che definiscono la famiglia di trasformazioni:

$$\bar{t} = t + \alpha$$

$$\bar{q} = e^{\frac{-\lambda\alpha}{2}} q = \left(1 - \frac{\lambda\alpha}{2}\right) q + o(\alpha) = q - \alpha\frac{\lambda}{2} q + o(\alpha).$$

I generatori infinitesimali corrispondenti sono

$$\eta(t, q) \equiv 1$$

$$\xi(t, q) = -\frac{1}{2}\lambda q$$

e cerchiamo l'integrale del moto conseguente l'invarianza: nel nostro caso si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-\frac{1}{2}\lambda\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} q + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)\right] = 0.$$

Svolgendo il conto, si ricava la legge di conservazione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{\lambda t}\left(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2 + \lambda q \dot{q}\right)\right] = 0$$

lungo le soluzioni dell'equazione di Eulero-Lagrange.

- Prendiamo in esame ora il caso di un punto materiale di massa m immerso (in $\mathbb{R}^n$) in un campo esterno modellizzato da un'onda piana. A meno di un riscalamento, la lagrangiana è

$$L\left(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right) = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{q}}|^2 - V\left(\mathbf{q} - t\mathbf{u}\right)$$

dove supponiamo V potenziale regolare e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ è fissato. Fissati $a, b \in \mathbb{R}$, consideriamo il consueto funzionale d'azione $\mathcal{I}$ e introduciamo la famiglia di trasformazioni ad un parametro $\alpha \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$

$$\bar{t} = t + \alpha$$

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \alpha\mathbf{u}$$

Verifichiamo, secondo la definizione (2.3), l'invarianza di $\mathcal{I}$ rispetto a tale famiglia: sia $[t_a, t_b] \subseteq [a, b]$; allora

$$\begin{aligned}
&\int_{\bar{t}(t_a)}^{\bar{t}(t_b)} L\Big(\bar{t}, \bar{\mathbf{q}}(\bar{t}), \frac{\mathrm{d}\bar{\mathbf{q}}}{\mathrm{d}\bar{t}}\Big)\,\mathrm{d}\bar{t} \\
&= \int_{\bar{t}(t_a)}^{\bar{t}(t_b)} \left[\frac{1}{2}\Big|\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}\bar{t}}(\bar{t}-\alpha)\Big|^2 - V\Big(\mathbf{q}(\bar{t}-\alpha) + \alpha\mathbf{u} - \bar{t}\mathbf{u}\Big)\right]\mathrm{d}\bar{t} \\
&= \int_{t_a}^{t_b} \Big[\frac{1}{2}|\dot{\mathbf{q}}(t)|^2 - V\big(\mathbf{q}(t) - t\mathbf{u}\big)\Big]\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_a}^{t_b} L\big(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\big)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Le relazioni che definiscono le trasformazioni sono già lineari e deduciamo che i generatori infinitesimali sono

$$\eta \equiv 1$$
$$\boldsymbol{\xi} \equiv \mathbf{u}$$

Allora, denotata con

$$E\big(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\big) = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{q}}|^2 + V\left(\mathbf{q} - t\mathbf{u}\right)$$

l'energia totale del sistema, deduciamo dal teorema (2.7) la legge di conservazione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\dot{\mathbf{q}}\cdot\mathbf{u} - E\Big) = 0$$

lungo le soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange.

3. Leggi di conservazione con ritardo

Scelti $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$, e un *parametro di ritardo* $0 < \tau < b - a$, in questa sezione definiremo *lagrangiana*

$$L : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ e differenziabile due volte dell'argomento

$$[\mathbf{q}]_\tau(t) \doteq (t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau))$$

estesa per convenzione a $L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)_{|[a,b]^c} \equiv 0$.
Fisseremo inoltre $\mathbf{q}_b \in \mathbb{R}^n$, una $\boldsymbol{\delta} : [a-\tau, a] \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^2$ a tratti e una classe di curve ammissibili

$$\Gamma \doteq \{\mathbf{q} : [a-\tau, b] \to \mathbb{R}^n, \mathbf{q}(b) = \mathbf{q}_b, \mathbf{q}_{|[a-\tau,a]} = \boldsymbol{\delta}, \mathbf{q}_{|[a,b]} \in \mathcal{C}^2\}$$

ed osserviamo che $\mathbf{q}_{|[a-\tau,a]} = \boldsymbol{\delta}$ implica che anche l'estremo $\mathbf{q}(a)$ è fissato ed uguale per ogni curva ammissibile, perché coincidente con $\boldsymbol{\delta}(a)$.
Introduciamo il funzionale di azione con ritardo $\mathcal{I}^\tau : \Gamma \to \mathbb{R}$ dato da

$$\mathcal{I}^\tau[\mathbf{q}(\cdot)] = \int_a^b L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \mathrm{d}t$$

Ogni $\boldsymbol{\gamma} : [a-\tau, b] \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^2$ e tale che $\boldsymbol{\gamma}(b) = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ per ogni $t \in [a-\tau, a]$ verrà detta *variazione ammissibile*.
Considereremo, al variare di $\mathbf{q} \in \Gamma, \lambda \in \mathbb{R}$, e $\boldsymbol{\gamma}$ variazione ammissibile la famiglia di curve variate $\{\mathbf{q} + \lambda\boldsymbol{\gamma}\}$ e diremo *estremale debole* di $\mathcal{I}^\tau$ ogni curva $\mathbf{q} \in \Gamma$ tale che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{I}^\tau[\mathbf{q} + \lambda\boldsymbol{\gamma}]\Big|_{\lambda=0} = 0$ per ogni $\boldsymbol{\gamma}$ ammissibile. Per semplicità di notazione, indicheremo inoltre con $\partial_i L$ la derivata parziale della lagrangiana calcolata rispetto al suo i-esimo argomento.

Teorema 3.1. *Con le notazioni appena introdotte, supponiamo che $\mathbf{q} \in \Gamma$ sia un estremale debole per $\mathcal{I}^\tau$. Allora esiste un vettore costante $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\mathbf{q}$ soddisfi il seguente sistema di equazioni integro-differenziali:*

$$\begin{cases} \partial_3 L\big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\big) + \partial_5 L\big(t+\tau, \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau), \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\big) = \\ = \int_{b-\tau}^t \Big[\partial_2 L\big(s, \mathbf{q}(s), \dot{\mathbf{q}}(s), \mathbf{q}(s-\tau), \dot{\mathbf{q}}(s-\tau)\big) \\ \qquad + \partial_4 L\big(s+\tau, \mathbf{q}(s+\tau), \dot{\mathbf{q}}(s+\tau), \mathbf{q}(s), \dot{\mathbf{q}}(s)\big)\Big] \mathrm{d}s + \mathbf{c} \qquad \textit{se } a \le t \le b-\tau \\ \partial_3 L\big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\big) = \\ = \int_{b-\tau}^t \partial_2 L\big(s, \mathbf{q}(s), \dot{\mathbf{q}}(s), \mathbf{q}(s-\tau), \dot{\mathbf{q}}(s-\tau)\big) \mathrm{d}s + \mathbf{c} \qquad \textit{se } b-\tau \le t \le b \end{cases}$$

Dimostrazione. Calcoliamo esplicitamente

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{I}^{\tau}[\mathbf{q}+\lambda\boldsymbol{\gamma}]\Big|_{\lambda=0} = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\Big|_{\lambda=0}\int_a^b L\Big(t,\mathbf{q}(t)+\lambda\boldsymbol{\gamma}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)+\lambda\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t),\mathbf{q}(t-\tau)+\lambda\boldsymbol{\gamma}(t-\tau),\\
&\qquad\qquad\dot{\mathbf{q}}(t-\tau)+\lambda\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t-\tau)\Big)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_a^b\Big[\partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\boldsymbol{\gamma}(t)+\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\\
&\qquad+\partial_4 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\boldsymbol{\gamma}(t-\tau)+\partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t-\tau)\Big]\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Dividiamo questo integrale nella somma di quattro termini, effettuando un il cambio di variabili $s = t-\tau$ negli ultimi due addendi:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{I}^{\tau}[\mathbf{q}+\lambda\boldsymbol{\gamma}]\Big|_{\lambda=0} &= \int_a^b \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\boldsymbol{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t\\
&+\int_{a-\tau}^{b-\tau}\partial_4 L\Big(s+\tau,\mathbf{q}(s+\tau),\dot{\mathbf{q}}(s+\tau),\mathbf{q}(s),\dot{\mathbf{q}}(s)\Big)\cdot\boldsymbol{\gamma}(s)\,\mathrm{d}s\\
&+\int_{a-\tau}^{b-\tau}\partial_5 L\Big(s+\tau,\mathbf{q}(s+\tau),\dot{\mathbf{q}}(s+\tau),\mathbf{q}(s),\dot{\mathbf{q}}(s)\Big)\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Ripristinando la variabile muta t e tenendo presente che, per ipotesi sulle variazioni ammissibili, $\boldsymbol{\gamma}\big|_{[a-\tau,a]} = \mathbf{0}$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{I}^\tau[\mathbf{q}+\lambda\boldsymbol{\gamma}]\Big|_{\lambda=0} &= \int_a^b \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\boldsymbol{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_a^{b-\tau} \partial_4 L\Big(t+\tau,\mathbf{q}(t+\tau),\dot{\mathbf{q}}(t+\tau),\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)\Big)\cdot\boldsymbol{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_a^{b-\tau} \partial_5 L\Big(t+\tau,\mathbf{q}(t+\tau),\dot{\mathbf{q}}(t+\tau),\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)\Big)\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^{b-\tau} \Big[\partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_4 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big]\cdot\boldsymbol{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{b-\tau}^b \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\boldsymbol{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_a^{b-\tau} \Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big]\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{b-\tau}^b \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Più concisamente, possiamo porre

$$\boldsymbol{\Theta}(t) = \begin{cases} \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_4 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) & \text{se } a \le t \le b-\tau \\ \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) & \text{se } b-\tau \le t \le b \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\Xi}(t) = \begin{cases} \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) & \text{se } a \le t \le b-\tau \\ \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) & \text{se } b-\tau \le t \le b \end{cases}$$

e scrivere (integrando poi per parti il primo addendo, tenendo presente che $\boldsymbol{\gamma}(a) = \boldsymbol{\gamma}(b) = \mathbf{0}$)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{I}^\tau[\mathbf{q}+\lambda\boldsymbol{\gamma}]\Big|_{\lambda=0} &= \int_a^b \boldsymbol{\Theta}(t)\cdot\boldsymbol{\gamma}(t) + \boldsymbol{\Xi}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_a^b \left[\int_{b-\tau}^t \boldsymbol{\Theta}(s)\,\mathrm{d}s\right]\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \boldsymbol{\Xi}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left[\boldsymbol{\Xi}(t) - \left(\int_{b-\tau}^t \boldsymbol{\Theta}(s)\,\mathrm{d}s\right)\right]\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Ora, se $\mathbf{q}$ è un estremale debole, per definizione si ha $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{I}[\mathbf{q}+\lambda\boldsymbol{\gamma}]\Big|_{\lambda=0} = 0$ e tale equazione vale per ogni scelta della variazione ammissibile $\boldsymbol{\gamma}$; dunque, applicando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni[4], otteniamo una versione modificata

[4]nell'appendice 1 abbiamo provato la versione scalare del calcolo delle variazioni: la versione vettoriale si ottiene estendendola in modo ovvio : sia $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ tale che $\int_a^b \mathbf{f}(t)\cdot\boldsymbol{\phi}(t)\,\mathrm{d}t = 0$ per ogni funzione $\boldsymbol{\phi}$ di classe $\mathcal{C}^1$, con supporto contenuto in (a,b) e a valori in $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$.

delle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\boldsymbol{\Xi}(t) = \int_{b-\tau}^{t} \boldsymbol{\Theta}(s)\,\mathrm{d}s + \mathbf{c} \qquad a \leq t \leq b$$

per un'opportuno vettore costante $\mathbf{c}$.
Sostituendo le espressioni di $\boldsymbol{\Xi}$ e $\boldsymbol{\Theta}$ in quest'ultima equazione si ottiene la tesi. $\square$

Corollario 3.2. *Con le notazioni introdotte, supponiamo che* $\mathbf{q} \in \Gamma$ *sia un estremale debole per* $\mathcal{I}^\tau$. *Allora* $\mathbf{q}$ *risolve la seguente coppia di equazioni differenziali:*

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big] = \\ \qquad = \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_4 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) & \textit{se } a \leq t \leq b-\tau \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\Big] = \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) & \textit{se } b-\tau \leq t \leq b \end{cases} \tag{9}$$

Osservazione. In realtà, nella dimostrazione dei due precedenti risultati si utilizza soltanto l'ipotesi che le funzioni ammissibili siano di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, con la convenzione che se una condizione coinvolge $\dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau)$ per un $t \in [a,b]$ tale che qualcuna di queste quantità non sia ben definita, la condizione stessa è intesa valere con le derivate interpretate sia come destre, sia come sinistre. Le conclusioni del corollario restano valide, tranne nei punti di non derivabilità delle funzioni ammissibili.
Osserviamo inoltre che, essendo L di classe $\mathcal{C}^1$ e differenziabile due volte, è possibile che i membri di sinistra delle precedenti uguaglianze abbiano delle discontinuità. In particolare, nel limite $t \to (b-\tau)^-$, si considererà valida la prima equazione, nel limite $t \to (b-\tau)^+$ la seconda.

Definizione 3.3. Chiameremo *estremali con ritardo* τ le soluzioni nella classe Γ del sistema di equazioni differenziali (9).

Consideriamo, mantenendo le stesse notazioni finora introdotte, famiglie di trasformazioni di tempi e coordinate ad un parametro $\alpha \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ del tipo (1), che sviluppate in un intorno di $\alpha = 0$ al prim'ordine hanno questa espressione:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t + \alpha\eta(t,\mathbf{q}) + o(\alpha) \\ \bar{\mathbf{q}} &= \mathbf{q} + \alpha\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}) + o(\alpha) \end{aligned} \tag{10}$$

con $\eta \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^{1+n}, \mathbb{R}\big)$ e $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^{1+n}, \mathbb{R}^n\big)$.

Definizione 3.4. Con le notazioni introdotte, il funzionale $\mathcal{I}^\tau$ risulta invariante per le trasformazioni sviluppate in (10) se per ogni sottointervallo $[t_a, t_b] \subseteq [a,b]$ si ha

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\Big|_{\alpha=0} \int_{t_a}^{t_b} L\Bigg(& t + \alpha\eta(t,\mathbf{q}(t)), \mathbf{q}(t) + \alpha\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)), \frac{\dot{\mathbf{q}}(t) + \alpha\dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t))}{1+\alpha\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))}, \\
& \mathbf{q}(t-\tau) + \alpha\boldsymbol{\xi}(t-\tau,\mathbf{q}(t-\tau)), \\
& \frac{\dot{\mathbf{q}}(t-\tau) + \alpha\dot{\boldsymbol{\xi}}(t-\tau,\mathbf{q}(t-\tau))}{1+\alpha\dot{\eta}(t-\tau,\mathbf{q}(t-\tau))}\Bigg)\Big(1+\alpha\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\Big)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Osserviamo che la definizione appena data estende la (2.3) ai funzionali di azione con ritardo; abbiamo trascurato i termini di ordine superiore al primo in α perché ininfluenti.

Proposizione 3.5. *Con le notazioni introdotte, se il funzionale $\mathcal{I}^\tau$ è invariante per le trasformazioni infinitesime* (10)*, allora vale la seguente coppia di condizioni necessarie:*

$$
\begin{aligned}
\int_a^{b-\tau} & \Big\{\partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\eta(t,\mathbf{q}(t)) + \Big[\partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_4 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big]\cdot\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)) \\
& + \Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big]\cdot\Big(\dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t)) - \dot{\mathbf{q}}(t)\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\Big) \\
& + L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\Big\}\,\mathrm{d}t = 0 \\
\int_{b-\tau}^{b} & \Big\{\partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\eta(t,\mathbf{q}(t)) + \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)) \\
& + \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\Big(\dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t)) - \dot{\mathbf{q}}(t)\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\Big) + L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\Big\}\,\mathrm{d}t = 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Dimostrazione. Consideriamo la definizione di invarianza (3.4) scegliendo $t_a = a$ e $t_b = b$. Calcoliamo esplicitamente il secondo membro dell'uguaglianza, tenendo presente che possiamo derivare sotto il segno di integrale per le ipotesi di regolarità effettuate. Prima di tutto, poniamo

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\zeta}_\alpha(t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)) \doteq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{\dot{\mathbf{q}}(t) + \alpha\dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t))}{1+\alpha\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))}\right) = & \\
-\frac{\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))}{\big[1+\alpha\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\big]^2}\big[\dot{\mathbf{q}}(t) + \alpha\dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t))\big] + \frac{1}{1+\alpha\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))}\dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t)). &
\end{aligned}
$$

Calcolando la derivata presente nella definizione (3.4), risulta (omettendo dove risultano ovvie le dipendenze funzionali)

$$
\begin{aligned}
0 = \int_a^b & \Big\{ \Big[\partial_1 L\, \eta(t, \mathbf{q}(t)) + \partial_2 L \cdot \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}(t)) + \partial_3 L \cdot \boldsymbol{\zeta}_\alpha(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \Big] \big(1 + \alpha \dot{\eta}(t, \mathbf{q}(t))\big) \\
& + L\, \dot{\eta}(t, \mathbf{q}(t)) \Big\} \,\mathrm{d}t \\
+ \int_a^b & \Big[\partial_4 L \cdot \boldsymbol{\xi}\big(t-\tau, \mathbf{q}(t-\tau)\big) \\
& + \partial_5 L \cdot \boldsymbol{\zeta}_\alpha\big(t-\tau, \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\big) \Big] \big(1 + \alpha \dot{\eta}(t, \mathbf{q}(t))\big) \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Valutiamo il tutto per $\alpha = 0$:

$$
\begin{aligned}
0 = \int_a^b & \Big\{ \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \eta(t, \mathbf{q}(t)) + \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}(t)) \\
& + \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \big[-\dot{\eta}\left(t, \mathbf{q}(t)\right) \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{q}(t)) \big] \\
& + L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \dot{\eta}(t, \mathbf{q}(t)) \Big\} \,\mathrm{d}t \\
+ \int_a^b & \Big\{ \partial_4 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \boldsymbol{\xi}\big(t-\tau, \mathbf{q}(t-\tau)\big) \\
& + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \big[-\dot{\eta}\big(t-\tau, \mathbf{q}(t-\tau)\big) \dot{\mathbf{q}}(t-\tau) + \dot{\boldsymbol{\xi}}\big(t-\tau, \mathbf{q}(t-\tau)\big) \big] \Big\} \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Effettuiamo nel secondo integrale il cambio di variabili $s = t - \tau$, ripristiniamo la variabile muta t e tenendo presente che $L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)_{|[a-\tau,a]} \equiv 0$ risulta

$$
\begin{aligned}
0 = \int_a^b & \Big\{ \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \eta(t, \mathbf{q}(t)) + \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}(t)) \\
& + \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \big[-\dot{\eta}\left(t, \mathbf{q}(t)\right) \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{q}(t)) \big] \\
& + L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \dot{\eta}(t, \mathbf{q}(t)) \Big\} \,\mathrm{d}t \\
+ \int_a^{b-\tau} & \Big\{ \partial_4 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big) \cdot \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}(t)) \\
& + \partial_5 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big) \cdot \big[-\dot{\eta}\left(t, \mathbf{q}(t)\right) \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{q}(t)) \big] \Big\} \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Riorganizziamo dunque gli addendi:

$$
\begin{aligned}
0 = \int_a^{b-\tau} & \Big\{ \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \eta(t, \mathbf{q}(t)) + \Big[\partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_4 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big) \Big] \cdot \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}(t)) \\
& + \Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big) \Big] \cdot \big(- \dot{\eta}\,(t, \mathbf{q}(t))\, \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{q}(t)) \big) \\
& + L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \dot{\eta}(t, \mathbf{q}(t)) \Big\}\, \mathrm{d}t \\
+ \int_{b-\tau}^{b} & \Big\{ \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \eta(t, \mathbf{q}(t)) + \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}(t)) \\
& + \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \big[- \dot{\eta}\,(t, \mathbf{q}(t))\, \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{q}(t)) \big] \\
& + L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \dot{\eta}(t, \mathbf{q}(t)) \Big\}\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

La tesi segue dunque dal fatto che l'ultima uguaglianza può essere identicamente dimostrata (per la definizione di invarianza che abbiamo adottato) per ogni sottointervallo $[t_a, t_b] \subset [a, b]$. □

Definizione 3.6. (cfr. definizione (1.3))
Siano $L, \mathcal{I}^\tau$ come sopra. Una funzione

$$C\big(t, t+\tau, \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau)\big)$$

si dice *integrale primo* o *costante del moto con ritardo* se

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} C\big(t, t+\tau, \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau)\big) = 0$$

lungo ogni curva $\mathbf{q} \in \Gamma$ che sia un estremale con ritardo di $\mathcal{I}^\tau$.

Proposizione 3.7. *(Condizione necessaria di du Bois-Reymond con ritardo) Supponiamo che la curva $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ sia un estremale con ritardo. Allora essa soddisfa le seguenti condizioni:*

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big) \Big) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) \Big] &= \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \\
& \qquad a \le t \le b - \tau \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) \Big] &= \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \\
& \qquad b - \tau \le t \le b
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Dimostrazione. Le ipotesi su L permettono di dimostrare simultaneamente le equazioni, in quanto $\partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)_{|[b-\tau, b]} \equiv 0$.

Abbiamo

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big)\Big)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\,\mathrm{d}t\\
&= \int_a^b \Big[\partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t) + \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\ddot{\mathbf{q}}(t)\\
&\quad + \partial_4 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t-\tau) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\ddot{\mathbf{q}}(t-\tau)\\
&\quad - \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big)\Big)\cdot\ddot{\mathbf{q}}(t)\\
&\quad - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\,\mathrm{d}t\\
&= \int_a^b \Big[\partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t) - \partial_5 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big)\cdot\ddot{\mathbf{q}}(t)\\
&\quad - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big)\Big)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\,\mathrm{d}t\\
&+ \int_a^b \Big[\partial_4 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t-\tau) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\ddot{\mathbf{q}}(t-\tau)\Big]\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Effettuando il cambio di variabili $s = t-\tau$, e ripristinando la variabile muta t, si ottiene complessivamente

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big)\Big)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\,\mathrm{d}t\\
&= \int_a^b \Big[\partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t) - \partial_5 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big)\cdot\ddot{\mathbf{q}}(t)\\
&\qquad - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big)\Big)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\,\mathrm{d}t\\
&+ \int_a^{b-\tau} \Big[\partial_4 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t) + \partial_5 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big)\cdot\ddot{\mathbf{q}}(t)\Big]\,\mathrm{d}t\\
&= \int_a^{b-\tau} \Big[\partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \Big(\partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_4 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big)\Big)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\\
&\qquad - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big)\Big)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\,\mathrm{d}t\\
&+ \int_{b-\tau}^b \Big[\partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\\
&\qquad - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big)\Big)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Ma d'altra parte, per le proprietà di L, nell'ultimo integrale il termine $\partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)$ è nullo; risulta dunque

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big)\Big)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^{b-\tau}\Bigg\{\partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \Bigg[\Big(\partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_4 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big)\Big) \\
&\qquad - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big)\Big)\Bigg]\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Bigg\}\,\mathrm{d}t \\
&+ \int_{b-\tau}^b\Big\{\partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \Big[\partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\Big)\Big]\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big\}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Sostituendo dunque nel primo e nel secondo addendo rispettivamente la prima e la seconda delle equazioni di Eulero con ritardo (9), otteniamo

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \dot{\mathbf{q}}(t)\cdot\Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\big([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\big)\Big)\Big]\,\mathrm{d}t = \int_a^b \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\,\mathrm{d}t$$

e la tesi segue osservando che la dimostrazione puo' essere ripetuta sostituendo $[a,b]$ con un suo qualsiasi sottointervallo.

□

Teorema 3.8. *(di Noether esteso al caso con ritardo)*
Siano $L, \mathcal{I}^\tau, \Gamma$ come sopra. Sia

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= t + \alpha\eta(t,\mathbf{q}) + o(\alpha) \\
\bar{\mathbf{q}} &= \mathbf{q} + \alpha\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}) + o(\alpha)
\end{aligned}$$

lo sviluppo al prim'ordine in un intorno di 0 nel parametro $\alpha \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ di una famiglia di trasformazioni $\mathcal{C}^2$ di tempi e coordinate (di cui perciò η e $\boldsymbol{\xi}$ rappresentano i generatori infinitesimali). Supponiamo che il funzionale $\mathcal{I}^\tau$ risulti invariante rispetto alle trasformazioni introdotte, nel senso precisato dalla definizione (3.4)*. Allora la funzione $C\big(t, t+\tau, \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau)\big)$ definita da*

$$\begin{cases}
\Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big]\cdot\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)) \\
\quad + \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\eta(t,\mathbf{q}(t)) \\
\hfill \textit{se } a \le t \le b-\tau \\
\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)) + \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\eta(t,\mathbf{q}(t)) \\
\hfill \textit{se } b-\tau \le t \le b
\end{cases}$$

è un integrale primo (con ritardo τ) del sistema lagrangiano, ossia si conserva lungo ogni soluzione in Γ delle equazioni di Eulero-Lagrange (9)*.*

Dimostrazione. Riprendiamo la prima condizione necessaria delle (11)

$$\int_a^{b-\tau} \Big\{ \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \eta(t,\mathbf{q}(t)) + \Big[\partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_4 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) \Big] \cdot \boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)) \\ + \Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) \Big] \cdot \Big(\dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t)) - \dot{\mathbf{q}}(t)\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t)) \Big) \\ + L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t)) \Big\} \,\mathrm{d}t = 0$$

e sostituiamo in essa la prima delle relazioni (12) di du Bois-Reymond con ritardo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) \Big) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) \Big] = \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)$$

e la prima delle equazioni in (9)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) \Big] = \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_4 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)$$

ottenendo

$$0 = \int_a^{b-\tau} \Bigg\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) \Big) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) \Big] \eta(t,\mathbf{q}(t)) \\ + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) \right] \cdot \boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)) \\ + \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) \Big) \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t)) \\ + \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) \Big) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) \Big] \dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t)) \Bigg\} \,\mathrm{d}t \\ = \int_a^{b-\tau} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Bigg\{ \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) \Big) \cdot \boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)) \\ + \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) \Big) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) \Big] \eta(t,\mathbf{q}(t)) \Bigg\} \,\mathrm{d}t.$$

La prima parte della tesi segue dal fatto che tale uguaglianza può essere dimostrata in modo identico per ogni sottointervallo $J \subset [a, b-\tau]$.
Analogamente proviamo la seconda equazione. Riprendiamo la seconda delle condizioni necessarie (11),

$$\int_{b-\tau}^{b} \Big\{ \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \eta(t,\mathbf{q}(t)) + \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)) \\ + \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \Big(\dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t)) - \dot{\mathbf{q}}(t)\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t)) \Big) + L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t)) \Big\} \,\mathrm{d}t = 0$$

e sostituiamo in essa la seconda delle relazioni (12) di du Bois-Reymond con ritardo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big] = \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)$$

e la seconda delle equazioni in (9)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\Big] = \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)$$

ottenendo

$$\begin{aligned} 0 = \int_{b-\tau}^{b} \Big\{ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\eta(t,\mathbf{q}(t)) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\right]\cdot\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)) \\ &+ \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t)) + \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\Big\}\,\mathrm{d}t \\ = \int_{b-\tau}^{b} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)) + \Big(L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\mathbf{q}(t)\Big)\eta(t,\mathbf{q}(t))\Big]\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Otteniamo perciò la tesi osservando che tale equazione può essere identicamente dimostrata su ogni sottointervallo $J \subset [b-\tau, b]$.

□

Esempio 3.9. Studiamo (per $n = 1$) il funzionale

$$\mathcal{J}[q(\cdot)] = \int_0^3 \left(\dot{q}(t) + \dot{q}(t-1)\right)^2\,\mathrm{d}t$$

sulla classe delle curve[5]

$$\begin{aligned} &q : [-1, 3] \to \mathbb{R} \\ &q(t) = -t \qquad -1 \le t \le 0 \\ &q(3) = 2 \end{aligned}$$

Poiché la variabile t è ciclica nella lagrangiana, il funzionale $\mathcal{I}^\tau$ è chiaramente invariante (nel senso precisato dalla definizione (3.4)) rispetto alla famiglia di trasformazioni ad un parametro $\alpha \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t + \alpha \\ \bar{q} &= q \end{aligned}$$

i cui generatori infinitesimali sono rispettivamente

$$\begin{aligned} \eta(t, q(t)) &\equiv 1 \\ \xi(t, q(t)) &\equiv 0 \end{aligned}$$

Il teorema di Noether (3.8) afferma nel nostro caso che

[5]non abbiamo volutamente specificato la regolarità richiesta sulle funzioni ammissibili, in conclusione dell'esempio il lettore capirà il motivo di questa scelta.

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[L\left([q]_\tau(t)\right) - \Big(\partial_3 L\left([q]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([q]_\tau(t+\tau)\right)\Big)\dot{q}(t)\Big] = 0 & \text{se} \quad a \le t \le b-\tau \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[L\left([q]_\tau(t)\right) - \partial_3 L\left([q]_\tau(t)\right)\dot{q}(t)\Big] = 0 & \text{se} \quad b-\tau \le t \le b \end{cases} \tag{13}$$

dunque valgono le equazioni

$$\begin{cases} \left(\dot{q}(t) + \dot{q}(t-1)\right)^2 - 2\dot{q}(t)\big(2\dot{q}(t) + \dot{q}(t-1) + \dot{q}(t+1)\big) = c_1 & \text{se} \quad 0 \le t \le 2 \\ \left(\dot{q}(t) + \dot{q}(t-1)\right)^2 - 2\dot{q}(t)\big(\dot{q}(t) + \dot{q}(t-1)\big) = c_2 & \text{se} \quad 2 \le t \le 3 \end{cases} \tag{14}$$

dove $c_j \in \mathbb{R}$, lungo gli estremali con ritardo di $\mathcal{I}^\tau$.
In questo speciale caso gli integrali primi che abbiamo formulato coincidono con la coppia di condizioni necessarie di du Bois-Reymond (12): ciò è dovuto al fatto che $\frac{\partial L}{\partial t} \equiv 0$ essendo t una coordinata ciclica in L.
Ricaviamo una condizione necessaria: affinché una curva q risulti un estremale debole è necessario che soddisfi il sistema di equazioni (9), dunque risulta

$$\begin{cases} 2\dot{q}(t) + \dot{q}(t-1) + \dot{q}(t+1) = c_3 & \text{se} \quad 0 \le t \le 2 \\ \dot{q}(t) + \dot{q}(t-1) = c_4 & \text{se} \quad 2 \le t \le 3 \end{cases} \tag{15}$$

dove $c_j \in \mathbb{R}$. Una soluzione di (15) (cioè, secondo la nostra definizione, un estremale con ritardo) con la scelta $c_3 = c_4 = \frac{1}{2}$ è la funzione $\mathcal{C}^2$ a tratti

$$q_0(t) = \begin{cases} -t & \text{se} -1 \le t \le 0 \\ \frac{3}{2}t & \text{se} \quad 0 \le t \le 1 \\ -\frac{3}{2}t + 3 & \text{se} \quad 1 \le t \le 2 \\ 2t - 4 & \text{se} \quad 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

D'altra parte, un semplice conto mostra che la regolarità $\mathcal{C}^2$ a tratti e non $\mathcal{C}^2$ di q_0 su $[0,3]$ fa sì che la prima delle equazioni del sistema delle condizioni di Noether (14) non sia soddisfatta: nel sottointervallo intervallo $[0,1]$ la costante c_1 dovrebbe essere $-\frac{5}{4}$, mentre nel sottointervallo $[1,2]$ dovrebbe essere $\frac{3}{2}$.
Una seconda soluzione del sistema (15), con $c_3 = 2$ e $c_4 = 0$, è la funzione $\mathcal{C}^2$ a tratti

$$q_1(t) = \begin{cases} -t & \text{se} -1 \le t \le 0 \\ t & \text{se} \quad 0 \le t \le 2 \\ -t + 4 & \text{se} \quad 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

Di nuovo un semplice conto mostra che la regolarità $\mathcal{C}^2$ a tratti e non $\mathcal{C}^2$ di q_1 su $[0,3]$ implica che la prima delle equazioni del sistema delle condizioni di Noether (14) non sia soddisfatta nemmeno in questo caso: nel sottointervallo $[0,1]$ la costante c_1

dovrebbe essere -4, mentre nel sottointervallo $[1, 2]$ dovrebbe essere 0.
Questo esempio mostra, già in dimensione $n = 1$, che gli estremali con ritardo *non* di classe $\mathcal{C}^2$ possono non soddisfare le equazioni di conservazione del teorema di Noether conseguenti l'invarianza del funzionale $\mathcal{I}^\tau$.

4. Leggi di conservazione con ritardo per estremali non lisci.

Scelti $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$, e un parametro di ritardo $0 < \tau < b-a$, continueremo a definire in questa sezione *lagrangiana* una funzione $L : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ e differenziabile due volte dell'argomento

$$[\mathbf{q}]_\tau(t) \doteq (t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau))$$

estesa per convenzione a $L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)_{|[a-\tau,a]} \equiv 0$.
Fissiamo $\mathbf{q}_b \in \mathbb{R}^n$ ed una $\boldsymbol{\delta} : [a-\tau, a] \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti. Siano inoltre

$$\widetilde{\Gamma} = \left\{\mathbf{q} : [a-\tau, b] \to \mathbb{R}^n, \mathbf{q}(b) = \mathbf{q}_b, \mathbf{q}_{|[a-\tau,a]} = \boldsymbol{\delta}, \mathbf{q}\ \ \mathcal{C}^1\big([a-\tau,b],\mathbb{R}^n\big)\ \text{ a tratti}\right\}$$

la classe delle curve ammissibili e, come nel capitolo precedente,

$$\mathcal{I}^\tau[\mathbf{q}(\cdot)] = \int_a^b L\big([\mathbf{q}]_\tau(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Introduciamo una famiglia di trasformazioni ad un parametro reale $\alpha \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t + \alpha\eta(t,\mathbf{q}) + o(\alpha) \\ \bar{\mathbf{q}} &= \mathbf{q} + \alpha\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}) + o(\alpha) \end{aligned} \tag{16}$$

dove $\eta \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^{1+n}, \mathbb{R}\big)$ e $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^{1+n}, \mathbb{R}^n\big)$.
Continueremo a definire *estremali con ritardo* le soluzioni, anche solo di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, delle equazioni di Eulero-Lagrange (9); ciò, come già osservato nel capitolo 3, ha senso con la convenzione che se una condizione coinvolge $\dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)$ o $\dot{\mathbf{q}}(t+\tau)$ in un punto $t \in [a,b]$ tale che qualcuna di queste quantità non sia ben definita, la condizione stessa è intesa valere con le derivate interpretate o come destre o come sinistre. Lavoreremo in questa sezione con una definizione di invarianza più generale rispetto alla (3.4) e precisamente, diamo la

Definizione 4.1. Il funzionale $\mathcal{I}^\tau$ si dice *invariante a meno di un termine di gauge* Φ rispetto alla famiglia di trasformazioni infinitesimali (16) se

$$\begin{aligned} \int_{t_a}^{t_b} \dot{\Phi}\big([\mathbf{q}]_\tau(t)\big)\,\mathrm{d}t = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} \int_{t_a}^{t_b} L\Bigg(& t + \alpha\eta\left(t,\mathbf{q}(t)\right), \mathbf{q}(t) + \alpha\boldsymbol{\xi}\left(t,\mathbf{q}(t)\right), \\ & \frac{\dot{\mathbf{q}}(t) + \alpha\dot{\boldsymbol{\xi}}\left(t,\mathbf{q}(t)\right)}{1+\alpha\dot{\eta}\left(t,\mathbf{q}(t)\right)}, \\ & \mathbf{q}(t-\tau) + \alpha\boldsymbol{\xi}\left(t-\tau,\mathbf{q}(t-\tau)\right), \\ & \frac{\dot{\mathbf{q}}(t-\tau) + \alpha\dot{\boldsymbol{\xi}}\left(t-\tau,\mathbf{q}(t-\tau)\right)}{1+\alpha\dot{\eta}\left(t-\tau,\mathbf{q}(t-\tau)\right)}\Bigg)\big(1+\alpha\dot{\eta}\left(t,\mathbf{q}(t)\right)\big)\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{17}$$

per ogni sottointervallo $[t_a, t_b] \subseteq [a, b]$.

Proposizione 4.2. *Se il funzionale $\mathcal{I}^\tau$ è invariante a meno di Φ rispetto alle trasformazioni infinitesime* (16) *nel senso precisato dalla definizione* (4.1)*, allora vale la seguente coppia di equazioni:*

$$
\begin{aligned}
&\int_a^{b-\tau} \Big\{ -\dot{\Phi}\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\eta(t,\mathbf{q}(t)) \\
&\qquad + \Big[\partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_4 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big]\cdot \boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)) \\
&\qquad + \Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big]\cdot \Big(\dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t)) - \dot{\mathbf{q}}(t)\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\Big) \\
&\qquad + L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\Big\}\,\mathrm{d}t = 0 \\
&\int_{b-\tau}^{b} \Big\{ -\dot{\Phi}\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\eta(t,\mathbf{q}(t)) + \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot \boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)) \\
&\qquad + \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot \Big(\dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t)) - \dot{\mathbf{q}}(t)\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\Big) + L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\Big\}\,\mathrm{d}t = 0.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Dimostrazione. Prima di tutto, poniamo

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\zeta}_\alpha(t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)) &\doteq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{\dot{\mathbf{q}}(t) + \alpha\dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t))}{1+\alpha\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))}\right) = \\
&\qquad - \frac{\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))}{\left[1+\alpha\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\right]^2}\left[\dot{\mathbf{q}}(t) + \alpha\dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t))\right] + \frac{1}{1+\alpha\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))}\dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t))
\end{aligned}
$$

e sviluppiamo come segue la definizione di invarianza (17), scegliendo $t_a = a$ e $t_b = b$ ed omettendo dove ovvie le dipendenze funzionali :

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \dot{\Phi}\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\,\mathrm{d}t = &\int_a^b \Big\{ \Big[\partial_1 L\,\eta(t,\mathbf{q}(t)) \\
&\quad + \partial_2 L\cdot\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)) + \partial_3 L\cdot\boldsymbol{\zeta}_\alpha(t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t))\Big]\big(1+\alpha\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\big) \\
&\quad + L\,\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\Big\}\,\mathrm{d}t \\
&+ \int_a^b \Big[\partial_4 L\cdot\boldsymbol{\xi}\left(t-\tau,\mathbf{q}(t-\tau)\right) \\
&\quad + \partial_5 L\cdot\boldsymbol{\zeta}_\alpha\left(t-\tau,\mathbf{q}(t-\tau),\dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right)\Big]\big(1+\alpha\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\big)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Valutiamo per $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned}
0 = \int_a^b & \Big\{ - \dot{\Phi}\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \eta(t, \mathbf{q}(t)) + \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}(t)) \\
& + \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \big[- \dot{\eta}\left(t, \mathbf{q}(t)\right) \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{q}(t)) \big] \\
& + L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \dot{\eta}(t, \mathbf{q}(t)) \Big\} \, \mathrm{d}t \\
+ \int_a^b & \Big\{ \partial_4 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \boldsymbol{\xi}(t-\tau, \mathbf{q}(t-\tau)) \\
& + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \big[- \dot{\eta}\left(t-\tau, \mathbf{q}(t-\tau)\right) \dot{\mathbf{q}}(t-\tau) + \dot{\boldsymbol{\xi}}(t-\tau, \mathbf{q}(t-\tau)) \big] \Big\} \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Effettuiamo nel secondo integrale il cambio di variabili $s = t - \tau$, ripristiniamo la variabile muta t e tenendo presente che $L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)_{|[a-\tau,a]} \equiv 0$, risulta

$$\begin{aligned}
0 = \int_a^b & \Big\{ - \dot{\Phi}\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \eta(t, \mathbf{q}(t)) + \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}(t)) \\
& + \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \big[- \dot{\eta}\left(t, \mathbf{q}(t)\right) \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{q}(t)) \big] \\
& + L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \dot{\eta}(t, \mathbf{q}(t)) \Big\} \, \mathrm{d}t \\
+ \int_a^{b-\tau} & \Big\{ \partial_4 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) \cdot \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}(t)) \\
& + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) \cdot \big[- \dot{\eta}\left(t, \mathbf{q}(t)\right) \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{q}(t)) \big] \Big\} \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Riorganizzando dunque gli addendi, risulta

$$\begin{aligned}
0 = \int_a^{b-\tau} & \Big\{ - \dot{\Phi}\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \eta(t, \mathbf{q}(t)) \\
& + \Big[\partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_4 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) \Big] \cdot \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}(t)) \\
& + \Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) \Big] \cdot \big(- \dot{\eta}\left(t, \mathbf{q}(t)\right) \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{q}(t)) \big) \\
& + L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \dot{\eta}(t, \mathbf{q}(t)) \Big\} \, \mathrm{d}t \\
+ \int_{b-\tau}^b & \Big\{ - \dot{\Phi}\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \eta(t, \mathbf{q}(t)) + \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}(t)) \\
& + \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \big[- \dot{\eta}\left(t, \mathbf{q}(t)\right) \dot{\mathbf{q}}(t) + \dot{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{q}(t)) \big] \\
& + L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \dot{\eta}(t, \mathbf{q}(t)) \Big\} \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

La tesi segue dunque dal fatto che l'ultima uguaglianza può essere identicamente dimostrata per ogni sottointervallo $[t_a, t_b] \subset [a, b]$, data la definizione di invarianza adottata.

$\square$

In coda al capitolo precedente, abbiamo già mostrato tramite un esempio esplicito che le condizioni (9) non sono sufficienti per estremali non di classe $\mathcal{C}^2$ su $[a, b]$ affinché essi soddisfino le condizioni di du Bois-Reymond con ritardo (12) e lungo essi si conservi la costante del moto data dal teorema di Noether (3.8). Del resto, nella dimostrazione della proposizione (3.7) si è utilizzata questa ipotesi di regolarità. Ciò che vogliamo mostrare ora è che è però sufficiente restringere la ricerca degli estremali con ritardo a quelli che soddisfano (12) (con la consueta convenzione sui punti di non derivabilità degli estremali) per ottenere lungo essi la conservazione di un nuovo integrale primo che tenga conto della più generale definizione di invarianza di $\mathcal{I}^\tau$ che abbiamo adottato.

Teorema 4.3. *(di Noether esteso al caso con ritardo per estremali $\mathcal{C}^1$ a tratti)* *Siano $L, \mathcal{I}^\tau, \widetilde{\Gamma}$ come sopra. Introduciamo la famiglia ad un parametro reale $\alpha \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ di tempi e coordinate*

$$\begin{aligned}\bar{t} &= t + \alpha\eta(t, \mathbf{q}) + o(\alpha)\\ \bar{\mathbf{q}} &= \mathbf{q} + \alpha\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}) + o(\alpha)\end{aligned}$$

dove $\eta \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^{1+n}, \mathbb{R}\big)$ e $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}^{1+n}, \mathbb{R}^n\big)$. Supponiamo che $\mathcal{I}^\tau$ risulti invariante a meno di Φ rispetto alle trasformazioni introdotte, nel senso precisato dalla definizione (4.1)*. Allora la funzione $C\big(t, t+\tau, \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau)\big)$ definita da*

$$\begin{cases} -\Phi\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big]\cdot\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}(t)) \\ \quad + \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\eta(t, \mathbf{q}(t)) \\ \hfill \textit{se } a \le t \le b-\tau \\ -\Phi\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{q}(t)) \\ \quad + \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\eta(t, \mathbf{q}(t)) \qquad \textit{se } b-\tau \le t \le b \end{cases}$$

risulta una costante del moto con ritardo lungo ogni $\mathbf{q} \in \widetilde{\Gamma}$ che soddisfi contemporaneamente le condizioni necessarie (9) *e le equazioni di du Bois-Reymond* (12)*.*

Dimostrazione. Dimostriamo l'espressione nel primo sottointervallo, considerando innanzitutto la prima delle condizioni necessarie ricavate nella proposizione (4.2).

$$\begin{aligned}\int_a^{b-\tau} \Big\{ &- \dot{\Phi}\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\eta(t,\mathbf{q}(t)) \\ &+ \Big[\partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_4 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big]\cdot \boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)) \\ &+ \Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big]\cdot \Big(\dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t)) - \dot{\mathbf{q}}(t)\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\Big) \\ &+ L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\Big\}\,\mathrm{d}t = 0.\end{aligned}$$

Sostituendo in quest'ultima la prima delle (9)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\right] = \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_4 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)$$

e la prima delle (12)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big] = \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)$$

otteniamo:

$$\begin{aligned}0 = \int_a^{b-\tau} \Bigg\{ &- \dot{\Phi}\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \\ &+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\eta(t,\mathbf{q}(t)) \\ &+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\right]\cdot\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)) \\ &+ \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big)\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t)) \\ &+ \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\Bigg\}\,\mathrm{d}t \\ = \int_a^{b-\tau} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg\{ &- \Phi\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big)\cdot\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)) \\ &+ \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\eta(t,\mathbf{q}(t))\Bigg\}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

e la prima parte della tesi segue dal fatto che un'identica dimostrazione può essere ripetuta per ogni sottointervallo $J \subseteq [a, b-\tau]$.
Mostriamo ora l'espressione di C nel sottointervallo $[b-\tau, b]$, partendo dalla seconda delle condizioni necessarie ricavate nella proposizione (4.2):

$$\int_{b-\tau}^{b} \Big\{ -\dot{\Phi}\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\eta(t,\mathbf{q}(t)) + \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot \boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t))$$
$$+ \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot \Big(\dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t)) - \dot{\mathbf{q}}(t)\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\Big) + L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\Big\}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Sostituiamo in essa la seconda delle (9)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\right] = \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)$$

e la seconda delle (12)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big] = \partial_1 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)$$

ottenendo

$$0 = \int_{b-\tau}^{b} \Bigg\{ -\dot{\Phi}\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\eta(t,\mathbf{q}(t))$$
$$+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\right]\cdot\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t))$$
$$+ \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}}(t,\mathbf{q}(t)) + \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\dot{\eta}(t,\mathbf{q}(t))\Bigg\}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{b-\tau}^{b} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg\{ -\Phi\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t))$$
$$+ \Big(L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\cdot\mathbf{q}(t)\Big)\eta(t,\mathbf{q}(t))\Bigg\}\,\mathrm{d}t.$$

Otteniamo perciò la tesi osservando che tale equazione può essere identicamente dimostrata su ogni sottointervallo $J \subset [b-\tau, b]$.

□

Esempio 4.4. Consideriamo ancora il funzionale $\mathcal{J}$, la classe di curve ammissibili e le trasformazioni di tempi e coordinate esposti nell'esempio (3.9). Vogliamo fornire un esempio di estremale con ritardo che soddisfi anche le condizioni di du Bois-Reymond e lungo il quale esista la costante del moto con ritardo del teorema (4.3). Sia

$$q(t) = \begin{cases} -t & \text{se } -1 \le t \le 0 \\ t & \text{se } \quad 0 \le t \le 1 \\ -t+2 & \text{se } \quad 1 \le t \le 2 \\ t-2 & \text{se } \quad 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

Un semplice conto mostra che le condizioni (15), corrispondenti alle equazioni di Eulero-Lagrange, vengono soddisfatte da q con la scelta di $c_3 = c_4 = 0$. Il problema è autonomo, cioè L non dipende esplicitamente da t; con le trasformazioni introdotte si ha $\xi \equiv 0$ e $\eta \equiv 1$, e scegliendo $\Phi \equiv 0$ si verifica l'equivalenza fra le condizioni di du Bois-Reymond con ritardo e l'esistenza dell'integrale primo C, con le (14): esse vengono banalmente soddisfatte ponendo $c_1 = c_2 = 0$.
Vogliamo in conclusione di questo esempio mostrare che il sistema (15) non ammette soluzioni di classe $\mathcal{C}^1$ (e perciò nemmeno di classe $\mathcal{C}^2$) su $[0,3]$: ciò rende non banale la questione affrontata in questo capitolo.
Definiamo la funzione

$$\begin{aligned} r : [0,3] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \dot{q}(t) + \dot{q}(t-1) \end{aligned}$$

Risulta, con la stessa notazione del sistema (15),

$$\begin{cases} r(t) + r(t+1) = c_3 & 0 \le t \le 2 \\ r(t) = c_4 & 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

e in particolare deduciamo che $c_3 = r(2) + r(3) = 2c_4$. Perciò, abbiamo

$$\begin{cases} r(t) + r(t+1) = 2c_4 & 0 \le t \le 1 \\ r(t) + r(t+1) = 2c_4 & 1 \le t \le 2 \\ r(t) = c_4 & 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} r(t) + r(t+1) = 2c_4 & 0 \le t \le 1 \\ r(t) = c_4 & 1 \le t \le 3 \end{cases}$$

ossia $r(t) \equiv c_4$ per $t \in [0,3]$. Ora, si ha $r(0) = \dot{q}(0) + \dot{q}(-1) = -2 = c_4$; dunque, $r(t) \equiv -2$ per $t \in [0,3]$. Osservando inizialmente che $\dot{q}(t) \equiv -1$ per $t \in [-1,0]$, si deduce per sostituzioni successive che $\dot{q}(t) \equiv -1$ per $t \in [-1,3]$. Perciò, l'unica soluzione $\mathcal{C}^1$ della (15) è $q(t) = -t$, ma la condizione $q(3) = 2$ non è compatibile con questo risultato.

5. Una condizione necessaria: la funzione eccesso di Weierstrass

Facciamo un rapido passo indietro: siano $a, b \in \mathbb{R}, \mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b \in \mathbb{R}^n, L, \mathcal{I}, \Gamma$ come nella sezione 2. Diamo la seguente

Definizione 5.1. Si dice *funzione eccesso* di Weierstrass

$$E : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(t, \mathbf{q}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) \mapsto L(t, \mathbf{q}, \mathbf{w}) - L(t, \mathbf{q}, \mathbf{z}) - (\mathbf{w} - \mathbf{z}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t, \mathbf{q}, \mathbf{z})$$

In altre parole, $E(t, \mathbf{q}, \mathbf{z}, \mathbf{w})$ rappresenta la differenza fra il valore di L, vista come funzione dei suoi ultimi n argomenti, nel punto $\mathbf{w}$ e i primi due termini della sua espansione in serie di Taylor di centro $\mathbf{z}$.
Dunque, nel caso in cui L sia di classe $\mathcal{C}^2$, possiamo riscrivere, esplicitando il resto della serie di Taylor,

$$E(t, \mathbf{q}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} (\mathbf{w}_j - \mathbf{z}_j)(\mathbf{w}_k - \mathbf{z}_k) \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j \dot{\mathbf{q}}_k} \Big(t, \mathbf{q}, \mathbf{z} + \theta(\mathbf{w} - \mathbf{z})\Big)$$

dove $\theta \in (0, 1)$.

Definizione 5.2. Supponiamo che $t \mapsto \hat{\mathbf{q}}(t)$ sia un estremale per il funzionale $\mathcal{I}$. Diremo che $\mathcal{I}$ ha un *minimo locale debole* per $\mathbf{q}(\cdot) = \hat{\mathbf{q}}(\cdot)$ se esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $\mathcal{I}[\mathbf{q}(\cdot)] - \mathcal{I}[\hat{\mathbf{q}}(\cdot)]$ mantenga segno positivo per ogni $\mathbf{q} \in \Gamma$ con $||\mathbf{q}(\cdot) - \hat{\mathbf{q}}(\cdot)||_1 < \varepsilon$.
Diremo invece che $\mathcal{I}$ ha un *minimo locale forte* per $\mathbf{q}(\cdot) = \hat{\mathbf{q}}(\cdot)$ se esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $\mathcal{I}[\mathbf{q}(\cdot)] - \mathcal{I}[\hat{\mathbf{q}}(\cdot)]$ mantenga segno positivo per ogni $\mathbf{q} \in \Gamma$ con $||\mathbf{q}(\cdot) - \hat{\mathbf{q}}(\cdot)||_0 < \varepsilon$.

Teorema 5.3. *Siano $a, b, \mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b, L, \mathcal{I}, \Gamma$ come sopra.*
Supponiamo che L abbia derivate seconde limitate e che il funzionale $\mathcal{I}$ abbia un minimo forte in corrispondenza dell'estremale $t \mapsto \mathbf{q}(t)$. Allora $E(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$.

Per una trattazione esauriente su questo risultato, si può ad esempio consultare [7, pag. 149 e segg.] e [3, pag. 31 e segg.].
Graficamente, almeno nel caso $n = 1$, l'interpretazione è la seguente: se L è vista come funzione della sua ultima variabile con parametri t, q, fissato uno $z \in \mathbb{R}$ e condotta la tangente al grafico di L nel punto $\big(z, L(t, q, z)\big)$, $E(t, q, z, w)$ descrive la distanza verticale nel punto w fra il grafico di L e la tangente condotta.

Vogliamo ora estendere a problemi con ritardo nella variabile t la condizione necessaria relativa alla funzione eccesso che abbiamo richiamato nel caso classico.
A tal fine, introduciamo la seguente funzione *eccesso* (che, in analogia con quanto già trattato continueremo a etichettare con la medesima lettera)

$$E : [a,b] \times \left(\mathbb{R}^n\right)^7 \to \mathbb{R}$$

$$E\Big(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau), \mathbf{p}\Big) =$$

$$= \begin{cases} L\left(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}, \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right) + L\left(t+\tau, \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau), \mathbf{q}(t), \mathbf{p}\right) \\ \quad -L\left(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right) \\ \quad -L\left(t+\tau, \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau), \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\right) \\ \quad -\left(\mathbf{p} - \dot{\mathbf{q}}(t)\right) \cdot \Big[\partial_3 L\left(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right) + \\ \qquad\qquad \partial_5 L\left(t+\tau, \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau), \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\right)\Big] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{se } a \le t \le b-\tau \\ L\left(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{p}, \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right) - L\left(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right) + \\ \quad -\left(\mathbf{p} - \dot{\mathbf{q}}(t)\right) \cdot \partial_3 L\left(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right) \qquad \text{se } b-\tau \le t \le b \end{cases}$$

Anche in questo paragrafo, considereremo ammissibili per il funzionale $\mathcal{I}^\tau$ anche le curve $\mathbf{q} : [a-\tau, b] \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti che soddisfino le condizioni

$$\mathbf{q}(b) = \mathbf{q}_b, \qquad \mathbf{q}_{|[a-\tau,a]} = \boldsymbol{\delta}$$

dove $\mathbf{q}_b \in \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{\delta}$ è una fissata funzione vettoriale $\mathcal{C}^1$ a tratti. Coerentemente con la notazione del capitolo 4, continueremo a chiamare $\widetilde{\Gamma}$ la classe di tali curve ammissibili. Supporremo che L sia una lagrangiana $\mathcal{C}^1$, differenziabile due volte e con derivate seconde limitate. Infine, lavoreremo sotto la consueta convenzione sui punti di non derivabilità degli estremali già esposta in precedenza.

Teorema 5.4. *Siano $a, b, \mathbf{q}_b, \boldsymbol{\delta}, L, \mathcal{I}^\tau, \widetilde{\Gamma}$ come sopra.*
Supponiamo che $\mathbf{q} \in \widetilde{\Gamma}$ sia un minimo locale forte per il funzionale $\mathcal{I}^\tau$. Allora, tenendo presente la convenzione precedente, si ha

$$E\Big(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau), \mathbf{p}\Big) \ge 0$$

per ogni $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sia $\alpha \in (a, b-\tau)$ tale che $\alpha, \alpha-\tau, \alpha+\tau$ non corrispondano a punti di non differenziabilità della curva $t \mapsto \mathbf{q}(t)$.
Scegliamo inoltre γ tale che $\gamma < b-\tau$, $0 < \gamma - \alpha < \tau$ e che non compaiano punti di non differenziabilità di $t \mapsto \mathbf{q}(t)$ per $\alpha - \tau \le t \le \gamma - \tau, \alpha \le t \le \gamma, \alpha + \tau \le t \le \gamma + \tau$.
Sia $t \mapsto \mathbf{Y}(t)$ una qualsiasi funzione vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti con la proprietà che $\mathbf{Y}(\alpha) = \mathbf{q}(\alpha)$ e $\dot{\mathbf{Y}}(\alpha) \neq \dot{\mathbf{q}}(\alpha)$ e su cui, per il momento, non poniamo alcuna altra condizione.
Al variare del parametro σ tale che $\alpha < \sigma < \gamma$, costruiamo una funzione vettoriale

$(t, \sigma) \mapsto \boldsymbol{\varphi}(t, \sigma)$ data dalla formula

$$\boldsymbol{\varphi}(t, \sigma) = \mathbf{q}(t) + \frac{\gamma - t}{\gamma - \sigma} \left(\mathbf{Y}(\sigma) - \mathbf{q}(\sigma) \right)$$

Infine, sia $t \mapsto \mathbf{w}(t)$ la curva così definita:

$$\mathbf{w}(t) = \begin{cases} \mathbf{q}(t) & a - \tau \leq t \leq \alpha \\ \mathbf{Y}(t) & \alpha < t \leq \sigma \\ \boldsymbol{\varphi}(t, \sigma) & \sigma < t \leq \gamma \\ \mathbf{q}(t) & \gamma < t \leq b \end{cases}$$

Poiché $t \mapsto \mathbf{w}(t)$ è una curva continua (tale proprietà segue per verifica diretta da come è stata definita) e in ogni tratto di definizione le funzioni vettoriali sono $\mathcal{C}^1$ a tratti, essa rientra nella classe delle curve ammissibili.
Ora, per definizione di minimo locale forte, esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\mathcal{I}[\mathbf{w}(\cdot)] - \mathcal{I}[\mathbf{q}(\cdot)] \geq 0$$

per $\mathbf{w} \in \widetilde{\Gamma}$ tale che $||\mathbf{w} - \mathbf{q}||_0 < \varepsilon$: scegliendo opportunamente $\mathbf{Y}$ tale condizione è verificata dalla $\mathbf{w}$ definita sopra.
Definiamo

$$G(\sigma) \doteq \mathcal{I}[\mathbf{w}(\cdot)] - \mathcal{I}[\mathbf{q}(\cdot)]$$

Tenendo presente la definizione della curva $t \mapsto \mathbf{w}(t)$ e la scelta di α, γ, σ, risulta:

$$\begin{aligned} G(\sigma) = & \int_\alpha^\sigma L\left(t, \mathbf{Y}(t), \dot{\mathbf{Y}}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right) \mathrm{d}t \\ & + \int_\sigma^\gamma L\left(t, \boldsymbol{\varphi}(t,\sigma), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right) \mathrm{d}t \\ & + \int_{\alpha+\tau}^{\sigma+\tau} L\left(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{Y}(t-\tau), \dot{\mathbf{Y}}(t-\tau)\right) \mathrm{d}t \\ & + \int_{\sigma+\tau}^{\gamma+\tau} L\Big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \boldsymbol{\varphi}(t-\tau,\sigma), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t-\tau,\sigma)\Big) \mathrm{d}t \\ & - \int_\alpha^\gamma L\Big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\Big) \mathrm{d}t \\ & - \int_{\alpha+\tau}^{\gamma+\tau} L\Big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\Big) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Effettuiamo il cambio di variabili $s = t - \tau$ nel terzo, quarto e sesto addendo della somma di integrali:

$$
\begin{aligned}
G(\sigma) = & \int_\alpha^\sigma L\left(t, \mathbf{Y}(t), \dot{\mathbf{Y}}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right) \mathrm{d}t \\
& + \int_\sigma^\gamma L\left(t, \boldsymbol{\varphi}(t,\sigma), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right) \mathrm{d}t \\
& + \int_\alpha^\sigma L\left(s+\tau, \mathbf{q}(s+\tau), \dot{\mathbf{q}}(s+\tau), \mathbf{Y}(s), \dot{\mathbf{Y}}(s)\right) \mathrm{d}s \\
& + \int_\sigma^\gamma L\left(s+\tau, \mathbf{q}(s+\tau), \dot{\mathbf{q}}(s+\tau), \boldsymbol{\varphi}(s,\sigma), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(s,\sigma)\right) \mathrm{d}s \\
& - \int_\alpha^\gamma L\Big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\Big) \mathrm{d}t \\
& - \int_\alpha^\gamma L\Big(s+\tau, \mathbf{q}(s+\tau), \dot{\mathbf{q}}(s+\tau), \mathbf{q}(s), \dot{\mathbf{q}}(s)\Big) \mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Ripristinando la variabile muta t, e riorganizzando le somme, otteniamo:

$$
\begin{aligned}
G(\sigma) = & \int_\alpha^\sigma \Big[L\left(t, \mathbf{Y}(t), \dot{\mathbf{Y}}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right) \\
& \qquad + L\left(t+\tau, \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau), \mathbf{Y}(t), \dot{\mathbf{Y}}(t)\right) \Big] \mathrm{d}t \\
& + \int_\sigma^\gamma \left[L\left(t, \boldsymbol{\varphi}(t,\sigma), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right) \right. \\
& \qquad \left. + L\left(t+\tau, \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau), \boldsymbol{\varphi}(t,\sigma), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma)\right) \right] \mathrm{d}t \\
& - \int_\alpha^\gamma \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) \Big] \mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Risulta, inoltre,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma) = L &\Big(\sigma, \mathbf{Y}(\sigma), \dot{\mathbf{Y}}(\sigma), \mathbf{q}(\sigma-\tau), \dot{\mathbf{q}}(\sigma-\tau)\Big) \\
&+ L\Big(\sigma+\tau, \mathbf{q}(\sigma+\tau), \dot{\mathbf{q}}(\sigma+\tau), \mathbf{Y}(\sigma), \dot{\mathbf{Y}}(\sigma)\Big) \\
&- L\left(\sigma, \boldsymbol{\varphi}(\sigma,\sigma), \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\sigma,\sigma), \mathbf{q}(\sigma-\tau), \dot{\mathbf{q}}(\sigma-\tau)\right) \\
&- L\left(\sigma+\tau, \mathbf{q}(\sigma+\tau), \dot{\mathbf{q}}(\sigma+\tau), \boldsymbol{\varphi}(\sigma,\sigma), \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\sigma,\sigma)\right) \\
&+ \int_\sigma^\gamma \Bigg[\partial_2 L\left(t, \boldsymbol{\varphi}(t,\sigma), \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right)\cdot \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\sigma}(t,\sigma) \\
&\qquad + \partial_3 L\left(t, \boldsymbol{\varphi}(t,\sigma), \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right)\cdot \frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma) \\
&\qquad + \partial_4 L\left(t+\tau, \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau), \boldsymbol{\varphi}(t,\sigma), \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma)\right)\cdot \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\sigma}(t,\sigma) \\
&\qquad + \partial_5 L\left(t+\tau, \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau), \boldsymbol{\varphi}(t,\sigma), \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma)\right)\cdot \frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma)\Bigg]\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Tramite una semplice verifica diretta, si constata che

$$
\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\sigma}(t,\sigma)
$$

Utilizziamo tale proprietà per integrare per parti, ottenendo

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma) = {} & L\left(\sigma, \mathbf{Y}(\sigma), \dot{\mathbf{Y}}(\sigma), \mathbf{q}(\sigma-\tau), \dot{\mathbf{q}}(\sigma-\tau)\right) \\
& + L\left(\sigma+\tau, \mathbf{q}(\sigma+\tau), \dot{\mathbf{q}}(\sigma+\tau), \mathbf{Y}(\sigma), \dot{\mathbf{Y}}(\sigma)\right) \\
& - L\left(\sigma, \boldsymbol{\varphi}(\sigma,\sigma), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\sigma,\sigma), \mathbf{q}(\sigma-\tau), \dot{\mathbf{q}}(\sigma-\tau)\right) \\
& - L\left(\sigma+\tau, \mathbf{q}(\sigma+\tau), \dot{\mathbf{q}}(\sigma+\tau), \boldsymbol{\varphi}(\sigma,\sigma), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\sigma,\sigma)\right) \\
& + \int_\sigma^\gamma \left\{ \left[\partial_2 L\left(t, \boldsymbol{\varphi}(t,\sigma), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right) \right.\right. \\
& \qquad \left. + \partial_4 L\left(t+\tau, \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau), \boldsymbol{\varphi}(t,\sigma), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma)\right) \right] \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \sigma}(t,\sigma) \\
& \qquad - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\partial_3 L\left(t, \boldsymbol{\varphi}(t,\sigma), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right) \right. \\
& \qquad \left.\left. + \partial_5 L\left(t+\tau, \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau), \boldsymbol{\varphi}(t,\sigma), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma)\right) \right] \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \sigma}(t,\sigma) \right\} \mathrm{d}t \\
& + \left[\partial_3 L\left(t, \boldsymbol{\varphi}(t,\sigma), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right) \right. \\
& \quad \left. \left. + \partial_5 L\left(t+\tau, \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau), \boldsymbol{\varphi}(t,\sigma), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma)\right) \right] \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \sigma}(t,\sigma) \right|_\sigma^\gamma
\end{aligned}
$$

Abbiamo

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \sigma}(t,\sigma) = \frac{\gamma - t}{\gamma - \sigma}\big[\dot{\mathbf{Y}}(\sigma) - \dot{\mathbf{q}}(\sigma)\big] - \frac{\gamma - t}{(\gamma-\sigma)^2}\big[\mathbf{Y}(\sigma) - \mathbf{q}(\sigma)\big]$$

perciò

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \sigma}(\gamma,\sigma) = \mathbf{0}$$

e

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \sigma}(\sigma,\sigma) = \big[\dot{\mathbf{Y}}(\sigma) - \dot{\mathbf{q}}(\sigma)\big] - \frac{1}{\gamma - \sigma}\big[\mathbf{Y}(\sigma) - \mathbf{q}(\sigma)\big]$$

Dunque,

$$\begin{aligned}
&\left[\partial_3 L\left(t, \boldsymbol{\varphi}(t,\sigma), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right)\right.\\
&\quad \left.+ \partial_5 L\left(t+\tau, \mathbf{q}(t+\tau), \dot{\mathbf{q}}(t+\tau), \boldsymbol{\varphi}(t,\sigma), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma)\right)\right] \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \sigma}(t,\sigma)\Bigg|_{\sigma}^{\gamma}\\
&= -\left\{\left[\dot{\mathbf{Y}}(\sigma) - \dot{\mathbf{q}}(\sigma)\right] - \frac{1}{\gamma-\sigma}\left[\mathbf{Y}(\sigma) - \mathbf{q}(\sigma)\right]\right\}\cdot\\
&\quad \cdot \left[\partial_3 L\left(\sigma, \mathbf{Y}(\sigma), \dot{\mathbf{q}}(\sigma) - \frac{\mathbf{Y}(\sigma)-\mathbf{q}(\sigma)}{\gamma-\sigma}, \mathbf{q}(\sigma-\tau), \dot{\mathbf{q}}(\sigma-\tau)\right)\right.\\
&\quad\quad \left.+ \partial_5 L\left(\sigma+\tau, \mathbf{q}(\sigma+\tau), \dot{\mathbf{q}}(\sigma+\tau), \mathbf{Y}(\sigma), \dot{\mathbf{q}}(\sigma) - \frac{\mathbf{Y}(\sigma)-\mathbf{q}(\sigma)}{\gamma-\sigma}\right)\right]
\end{aligned}$$

Osserviamo che $\alpha < \sigma < \gamma$ e che, per ipotesi, non ci sono punti di non derivabilità della curva $\mathbf{q}$ per $\alpha - \tau \leq t \leq \gamma - \tau$, $\alpha \leq t \leq \gamma$, $\alpha + \tau \leq t \leq \gamma + \tau$; essendo L di classe $\mathcal{C}^1$ e ogni argomento di $\partial_i L$ nella precedente espressione continuo, è possibile calcolarne il limite per $\sigma \to \alpha^+$ ottenendo

$$\begin{aligned}
-\left[\dot{\mathbf{Y}}(\alpha) - \dot{\mathbf{q}}(\alpha)\right] \cdot &\Big[\partial_3 L\big(\alpha, \mathbf{q}(\alpha), \dot{\mathbf{q}}(\alpha), \mathbf{q}(\alpha-\tau), \dot{\mathbf{q}}(\alpha-\tau)\big)\\
&+ \partial_5 L\big(\alpha+\tau, \mathbf{q}(\alpha+\tau), \dot{\mathbf{q}}(\alpha+\tau), \mathbf{q}(\alpha), \dot{\mathbf{q}}(\alpha)\big)\Big]
\end{aligned}$$

Tenendo presenti le stesse ipotesi, poiché $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma) = \dot{\mathbf{q}}(t) - \frac{\left[\mathbf{Y}(\sigma)-\mathbf{q}(\sigma)\right]}{\gamma-\sigma}$, si conclude che

$$\begin{aligned}
&\lim_{\sigma\to\alpha^+} L\left(\sigma, \mathbf{Y}(\sigma), \dot{\mathbf{Y}}(\sigma), \mathbf{q}(\sigma-\tau), \dot{\mathbf{q}}(\sigma-\tau)\right)\\
&\qquad\qquad = L\left(\alpha, \mathbf{q}(\alpha), \dot{\mathbf{Y}}(\alpha), \mathbf{q}(\alpha-\tau), \dot{\mathbf{q}}(\alpha-\tau)\right)\\
&\lim_{\sigma\to\alpha^+} L\left(\sigma+\tau, \mathbf{q}(\sigma+\tau), \dot{\mathbf{q}}(\sigma+\tau), \mathbf{Y}(\sigma), \dot{\mathbf{Y}}(\sigma)\right)\\
&\qquad\qquad = L\left(\alpha+\tau, \mathbf{q}(\alpha+\tau), \dot{\mathbf{q}}(\alpha+\tau), \mathbf{q}(\alpha), \dot{\mathbf{Y}}(\alpha)\right)\\
&\lim_{\sigma\to\alpha^+} L\left(\sigma, \boldsymbol{\varphi}(\sigma,\sigma), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\sigma,\sigma), \mathbf{q}(\sigma-\tau), \dot{\mathbf{q}}(\sigma-\tau)\right)\\
&\qquad\qquad = L\Big(\alpha, \mathbf{q}(\alpha), \dot{\mathbf{q}}(\alpha), \mathbf{q}(\alpha-\tau), \dot{\mathbf{q}}(\alpha-\tau)\Big)\\
&\lim_{\sigma\to\alpha^+} L\left(\sigma+\tau, \mathbf{q}(\sigma+\tau), \dot{\mathbf{q}}(\sigma+\tau), \boldsymbol{\varphi}(\sigma,\sigma), \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(\sigma,\sigma)\right)\\
&\qquad\qquad = L\Big(\alpha+\tau, \mathbf{q}(\alpha+\tau), \dot{\mathbf{q}}(\alpha+\tau), \mathbf{q}(\alpha), \dot{\mathbf{q}}(\alpha)\Big)
\end{aligned}$$

Utilizzando il teorema di convergenza dominata, possiamo inoltre concludere che

$$\begin{aligned}
&\lim_{\sigma\to\alpha^+}\int_\sigma^\gamma \Bigg\{\Bigg[\partial_2 L\left(t,\boldsymbol{\varphi}(t,\sigma),\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma),\mathbf{q}(t-\tau),\dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right)\\
&\qquad+\partial_4 L\left(t+\tau,\mathbf{q}(t+\tau),\dot{\mathbf{q}}(t+\tau),\boldsymbol{\varphi}(t,\sigma),\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma)\right)\Bigg]\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\sigma}(t,\sigma)\\
&\qquad-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Bigg[\partial_3 L\left(t,\boldsymbol{\varphi}(t,\sigma),\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma),\mathbf{q}(t-\tau),\dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\right)\\
&\qquad+\partial_5 L\left(t+\tau,\mathbf{q}(t+\tau),\dot{\mathbf{q}}(t+\tau),\boldsymbol{\varphi}(t,\sigma),\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(t,\sigma)\right)\Bigg]\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\sigma}(t,\sigma)\Bigg\}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_\alpha^\gamma\Bigg\{\Big[\partial_2 L\big(t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t),\mathbf{q}(t-\tau),\dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\big)\\
&\qquad+\partial_4 L\big(t+\tau,\mathbf{q}(t+\tau),\dot{\mathbf{q}}(t+\tau),\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)\big)\Big]\\
&\qquad-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\partial_3 L\big(t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t),\mathbf{q}(t-\tau),\dot{\mathbf{q}}(t-\tau)\big)\\
&\qquad+\partial_5 L\big(t+\tau,\mathbf{q}(t+\tau),\dot{\mathbf{q}}(t+\tau),\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)\big)\Big]\Bigg\}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\sigma}(t,\alpha)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Osserviamo che, poiché $t\mapsto\mathbf{q}(t)$ è un estremale debole per $\mathcal{I}^\tau$, nell'intervallo $[a,b-\tau]$ tale curva soddisfa la prima delle equazioni (9). Dunque, l'ultima integranda è identicamente nulla essendo $a<\alpha<\gamma<b-\tau$.

Ora, $G(\alpha)=0$ (si verifica direttamente), ossia per $\sigma=\alpha$ si ha $\mathcal{I}[\mathbf{w}]=\mathcal{I}[\mathbf{q}]$, valore corrispondente al minimo locale forte di $\mathcal{I}$. Dev'essere

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\sigma}(\alpha)\geq 0$$

per la proprietà di minimo, dunque otteniamo la seguente disuguaglianza:

$$\begin{aligned}
&L\left(\alpha,\mathbf{q}(\alpha),\dot{\mathbf{Y}}(\alpha),\mathbf{q}(\alpha-\tau),\dot{\mathbf{q}}(\alpha-\tau)\right)+L\left(\alpha+\tau,\mathbf{q}(\alpha+\tau),\dot{\mathbf{q}}(\alpha+\tau),\mathbf{q}(\alpha),\dot{\mathbf{Y}}(\alpha)\right)\\
&-L\Big(\alpha,\mathbf{q}(\alpha),\dot{\mathbf{q}}(\alpha),\mathbf{q}(\alpha-\tau),\dot{\mathbf{q}}(\alpha-\tau)\Big)-L\Big(\alpha+\tau,\mathbf{q}(\alpha+\tau),\dot{\mathbf{q}}(\alpha+\tau),\mathbf{q}(\alpha),\dot{\mathbf{q}}(\alpha)\Big)\\
&-\left(\dot{\mathbf{Y}}(\alpha)-\dot{\mathbf{q}}(\alpha)\right)\cdot\Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(\alpha)\right)+\partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(\alpha+\tau)\right)\Big]\geq 0.
\end{aligned}$$

Dunque la disuguaglianza risulta provata per i valori di $t\in[a,b-\tau]$ corrispondenti a punti di derivabilità di $\dot{\mathbf{q}}(\cdot),\dot{\mathbf{q}}(\cdot-\tau),\dot{\mathbf{q}}(\cdot+\tau)$. Con la convenzione adottata, e

ricordando che L è di classe $\mathcal{C}^1$, per continuità essa risulta provata anche nei punti di non derivabilità in riferimento alle derivate destre e sinistre.
La condizione relativa all'intervallo $[b-\tau, b]$ si prova con una costruzione analoga.
$\square$

6. Controllo ottimo

Incominciamo questa sezione con una introduzione alla teoria del controllo ottimo. I risultati che verranno solo citati si possono trovare dimostrati ad esempio in [13]
Supponiamo di esaminare un problema la cui evoluzione temporale è descritta da una mappa $\mathbf{q} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, almeno continua, che prenderà il nome di *variabile di stato*, con una condizione iniziale $\mathbf{q}(a) = \mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^n$.
Supponiamo inoltre che, ad ogni istante t, il sistema dipenda dal valore assunto da una funzione $\mathbf{u} : [a, b] \to U \subset \mathbb{R}^r$, dove U è chiuso e convesso; tale funzione è detta *variabile di controllo.* Assumeremo sempre che la $\mathbf{u}$ sia continua a tratti, e abbia discontinuità al più di prima specie: ciò implica, in particolare, che ogni controllo è limitato a valori in U.

Esempio 6.1. Ponendo $r = 2$, un semplice esempio di controllo è dato dalla mappa $\mathbf{u} : [0, 2\pi] \to [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2, \mathbf{u}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

Fissata $\mathbf{u}$, la relazione di dipendenza della variabile di stato $\mathbf{q}$ dalla variabile di controllo $\mathbf{u}$ è data da un sistema differenziale (che prende il nome di *dinamica*) del tipo

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{q}, \mathbf{u})$$

con $\mathbf{g} : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$.
Chiaramente, senza alcuna ipotesi di regolarità su $\mathbf{g}$, non è affatto detto che esista una soluzione dell'equazione appena scritta, che tale soluzione sia definita su tutto l'intervallo $[a, b]$ e che sia eventualmente unica. Supporremo perciò intanto $\mathbf{g}$ di classe $\mathcal{C}^1$: per un noto teorema[6] la soluzione esiste ed è localmente unica.
Consideriamo una partizione $a = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{k-1} < \theta_k = b$ dove i θ_j sono tutti e soli i punti di discontinuità (di prima specie) di $\mathbf{u}$ e introduciamo innanzitutto un primo sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{q}, \mathbf{u}) & a \le t \le \theta_1 \\ \mathbf{q}(a) = \mathbf{q}_a \end{cases}$$

La soluzione esiste, almeno localmente, su un sottointervallo $[a, \rho_1]$ con $\rho_1 \le \theta_1$; denotiamo con $\mathbf{q}_0$ tale soluzione e supponiamo sia definita su tutto $[a, \theta_1]$.
Consideriamo ora il sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{q}, \mathbf{u}) & \theta_1 \le t \le \theta_2 \\ \mathbf{q}(\theta_1) = \mathbf{q}_0(\theta_1) \end{cases}$$

[6]Ne riportiamo una versione: Sia $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e siano $\mathbf{f}, \mathbf{f}_{\mathbf{x}_1}, \ldots, \mathbf{f}_{\mathbf{x}_n}$ continue in un aperto $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ con $(t_0, \mathbf{x}_{t_0}) \in D \subset [a, b] \times \mathbb{R}^n$. Allora esiste un intorno J di t_0 tale che il problema di Cauchy $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ con condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_{t_0}$ abbia una *sola* soluzione $\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)$ definita su tutto J.

La soluzione esiste, almeno localmente, sul un sottointervallo $[\theta_1, \rho_2]$, con $\rho_2 \leq \theta_2$; denotiamo con $\mathbf{q}_1$ tale soluzione e supponiamo sia definita su tutto $[\theta_1, \theta_2]$.
Procediamo iterativamente, supponendo che per ogni $j = 1, \ldots, k-1$ la soluzione $\mathbf{q}_j$ dello stesso sistema differenziale con dato iniziale $\mathbf{q}_j(\theta_j) = \mathbf{q}_{j-1}(\theta_j)$ sia definita su tutto $[\theta_j, \theta_{j+1}]$. Infine, definiamo la funzione vettoriale $\mathbf{q} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ nel seguente modo:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_j(t) \qquad t \in [\theta_j, \theta_{j+1}],\ j = 0, \ldots, k-1$$

Per costruzione, dato che $\mathbf{g}$ è di classe $\mathcal{C}^1$, la $\mathbf{q}$ risulta continua e differenziabile con continuità tranne al più in un numero finito di punti angolosi. Essa, definita su tutto $[a, b]$ e tale che $\mathbf{q}(a) = \mathbf{q}_a$, prende il nome di *traiettoria corrispondente* al controllo $\mathbf{u}$ e si dice che $\mathbf{u}$ è *ammissibile*.
Se il problema presenta una ulteriore condizione finale $\mathbf{q}(b) = \mathbf{q}_b \in \mathbb{R}^n$, diremo che $\mathbf{u}$ *trasferisce* lo stato da $\mathbf{q}_a$ a $\mathbf{q}_b$ qualora la condizione finale sia rispettata dalla soluzione costruita.

Esempio 6.2. Mostriamo con un esempio che alcune classi $\mathcal{C}$ di controlli possono contenere solo controlli non ammissibili.
Consideriamo, in dimensione 1, il problema

$$\begin{cases} \dot{q} = uq^2 \\ q(0) = 1 \\ \mathcal{C} = \{u : [0, 3] \to \mathbb{R}, u(t) \equiv a \geq \frac{1}{3}\} \end{cases}$$

La traiettoria soluzione, che si trova tramite una integrazione diretta, è

$$q(t) = \frac{1}{1 - at}$$

Essa può essere definita con continuità solo sul sottointervallo $[0, \frac{1}{a}[$ che, avendo scelto $a \geq \frac{1}{3}$, è un sottointervallo proprio di $[0, 3]$.

Esempio 6.3. Mostriamo un esempio in cui invece la traiettoria è definita globalmente e il controllo è ammissibile, sempre in dimensione 1.
Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \dot{q} = uq \\ q(0) = 1 \\ \mathcal{C} = \{u : [0, 3] \to \mathbb{R}, u \text{ continua a tratti}\} \end{cases}$$

Se il controllo è così definito

$$u(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t \leq 2 \\ t & 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

allora la traiettoria corrispondente risulta

$$q(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ e^{t-1} & 1 \leq t \leq 2 \\ e^{\frac{t^2}{2}-1} & 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

Osservazione 6.4. Una situazione in cui è possibile trovare la traiettoria corrispondente ad ogni controllo $\mathbf{u}$ a valori in U è il contesto *lineare* [7], ossia quello in cui il sistema differenziale è della forma

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = A(t)\mathbf{q}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)$$

dove $A(t) = (a_{ij}(t))$ è una matrice quadrata di ordine n e $B(t) = (b_{ij}(t))$ è una matrice rettangolare $n \times r$. Questo poiché possiamo stimare

$$||A(t)\mathbf{q}(t) + B(t)\mathbf{u}(t)|| \leq A||\mathbf{q}(t)|| + B$$

dove

$$A = \sqrt{n} \max \Big\{ |a_{ij}(t)|,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n,\ t \in [a,b] \Big\}$$

$$B = \sqrt{n} \max \Big\{ |b_{ij}(t)|,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq r,\ t \in [a,b] \Big\} \sup_{t \in [a,b]} ||\mathbf{u}(t)||$$

Supponiamo ora che sia data una $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ e consideriamo il seguente problema: minimizzare il funzionale

$$\mathcal{J}[\mathbf{q}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)] = \int_a^b f\big(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t)\big)\, \mathrm{d}t$$

dove, fissata la condizione iniziale $\mathbf{q}(a) = \mathbf{q}_a$, ci limitiamo a considerare tutti e soli i controlli ammissibili $\mathbf{u}$ a valori in $U \subset \mathbb{R}^r$ (tale classe verrà indicata con $\mathcal{C}$, come al solito).

Dato che il legame fra la traiettoria e il controllo è dato dal sistema differenziale

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{q}, \mathbf{u})$$

il funzionale $\mathcal{J}$ dipende in realtà soltanto da $\mathbf{u}$.

Definizione 6.5. Con riferimento alle notazioni della sezione, $\mathbf{u}^* \in \mathcal{C}$ si dice *controllo ottimo* per il sistema se $\mathcal{J}[\mathbf{u}(\cdot)] \geq \mathcal{J}[\mathbf{u}^*(\cdot)]$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{C}$. La traiettoria corrispondente al controllo ottimo si indica con $\mathbf{q}^*$ e prende il nome di *traiettoria ottima.*

[7] Con la notazione della nota a pié pagina numero 6, ci stiamo riferendo al risultato per cui se esistono due numeri reali A, B tali che $||\mathbf{f}(t, \mathbf{x})|| \leq A||\mathbf{x}|| + B$ per ogni $(t, \mathbf{x}) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$, allora la soluzione del problema di Cauchy è definita su tutto l'intervallo $[a,b]$.

Introduciamo il vettore $(\lambda_0, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, che prenderà il nome di *variabile di co-stato* o *moltiplicatore* e definiamo la funzione hamiltoniana

$$\begin{aligned} H : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (t, \mathbf{q}, \mathbf{u}, \lambda_0, \boldsymbol{\lambda}) &\mapsto \lambda_0 f(t, \mathbf{q}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{g}(t, \mathbf{q}, \mathbf{u}) \end{aligned}$$

Riportiamo infine, come risultato classico, una condizione necessaria di ottimalità (per una dimostrazione, si può consultare ad esempio [13]):

Teorema 6.6. *(di Pontryagin)*
Siano $f, \mathbf{g}, \mathcal{J}, H, \mathcal{C}$ *come sopra,* $\mathbf{u}^*$ *controllo ottimo e* $\mathbf{q}^*$ *traiettoria ottima.*
Esiste allora un moltiplicatore $(\lambda_0^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ *(con* λ_0^* *costante e* $\boldsymbol{\lambda}^*$ *a valori in* $\mathbb{R}^n$*) di classe* $\mathcal{C}^1$ *a tratti che soddisfi le seguenti equazioni:*

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\lambda}^* = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} & a \le t \le b \\ \boldsymbol{\lambda}^*(b) = 0 & \\ \lambda_0^* \equiv 1 & a \le t \le b \end{cases}$$

e tale che per ogni $t \in [a,b]$

$$H\big(t, \mathbf{q}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \lambda_0^*, \boldsymbol{\lambda}^*(t)\big) = \max_{\mathbf{v} \in U} H\big(t, \mathbf{q}^*(t), \mathbf{v}, \lambda_0^*, \boldsymbol{\lambda}^*(t)\big)$$

Le eventuali discontinuità di $\dot{\boldsymbol{\lambda}}^*$ *corrispondono alle discontinuità di* $\mathbf{u}^*$*.*

La prima delle due equazioni prende il nome di *equazione aggiunta*; osserviamo infine che un modo sintetico di scrivere la dinamica è

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}.$$

7. Controllo ottimo con ritardo

In questa sezione ci poniamo come obiettivo di arrivare ad una formulazione hamiltoniana del teorema di Noether con ritardo. Il problema consiste nel minimizzare il funzionale

$$\mathcal{I}^\tau[\mathbf{q}(\cdot),\mathbf{u}(\cdot)] = \int_a^b L\big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{q}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau)\big)\,\mathrm{d}t \tag{19}$$

vincolato al sistema di controllo con ritardo

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \boldsymbol{\varphi}\big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{q}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau)\big) \tag{20}$$

con la condizione iniziale

$$\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\delta}(t) \qquad t\in[a-\tau,a], \tag{21}$$

ove $\boldsymbol{\delta}:[a-\tau,a]\to\mathbb{R}^n$ sarà di classe $\mathcal{C}^1$a tratti.
Considereremo ammissibili le $\mathbf{q}:[a-\tau,b]\to\mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1$ su $[a,b]$, e includeremo fra i possibili controlli le $\mathbf{u}:[a-\tau,b]\to\mathbb{R}^r$ di classe $\mathcal{C}^0$, mentre la funzione lagrangiana $L:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}$ sarà di classe $\mathcal{C}^1$ e differenziabile due volte, e $\boldsymbol{\varphi}:[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\to\mathbb{R}^n$ sarà di classe $\mathcal{C}^1$; come al solito, a,b sono fissati in $\mathbb{R}$ e $0<\tau<b-a$.
Osserviamo che, naturalmente, nel caso particolare in cui

$$\boldsymbol{\varphi}\big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{q}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau)\big) = \mathbf{u}(t)$$

ci si riconduce al problema già trattato nella sezione 3: analizzeremo tale questione approfonditamente in seguito.

Notazione. Introduciamo i seguenti simboli:

$$[\mathbf{q},\mathbf{u}]_\tau(t) = \big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{q}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau)\big)$$
$$[\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{p}]_\tau(t) = \big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{q}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau),\mathbf{p}(t)\big)$$

ove $\mathbf{p}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ sarà di classe $\mathcal{C}^1$.

Teorema 7.1. *(di Pontryagin con ritardo)*
Con le notazioni appena introdotte, supponiamo che $(\mathbf{q}_0(\cdot),\mathbf{u}_0(\cdot))$ sia un punto di minimo del funzionale $\mathcal{I}^\tau[\mathbf{q}(\cdot),\mathbf{u}(\cdot)]$ per il problema (19) − (21). Allora esiste un moltiplicatore $\mathbf{p}_0:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1$, tale che valgano le seguenti condizioni:

- *i sistemi hamiltoniani con ritardo*

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{q}}_0(t) = \partial_6 H\left([\mathbf{q}_0,\mathbf{u}_0,\mathbf{p}_0]_\tau(t)\right) & a\le t\le b-\tau\\ \dot{\mathbf{p}}_0(t) = -\partial_2 H\left([\mathbf{q}_0,\mathbf{u}_0,\mathbf{p}_0]_\tau(t)\right) - \partial_4 H\left([\mathbf{q}_0,\mathbf{u}_0,\mathbf{p}_0]_\tau(t+\tau)\right) & a\le t\le b-\tau\end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{q}}_0(t) = \partial_6 H\left([\mathbf{q}_0,\mathbf{u}_0,\mathbf{p}_0]_\tau(t)\right) & b-\tau\le t\le b\\ \dot{\mathbf{p}}_0(t) = -\partial_2 H\left([\mathbf{q}_0,\mathbf{u}_0,\mathbf{p}_0]_\tau(t)\right) & b-\tau\le t\le b\end{cases} \tag{23}$$

- *le condizioni stazionarie con ritardo*

$$\begin{cases} \partial_3 H\left([\mathbf{q}_0,\mathbf{u}_0,\mathbf{p}_0]_\tau(t)\right) + \partial_5 H\left([\mathbf{q}_0,\mathbf{u}_0,\mathbf{p}_0]_\tau(t+\tau)\right) = \mathbf{0} & a \le t \le b-\tau \\ \partial_3 H\left([\mathbf{q}_0,\mathbf{u}_0,\mathbf{p}_0]_\tau(t)\right) = \mathbf{0} & b-\tau \le t \le b \end{cases} \tag{24}$$

dove si è definita la funzione hamiltoniana

$$H\left([\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{p}_0]_\tau(t)\right) = L\left([\mathbf{q},\mathbf{u}]_\tau(t)\right) + \mathbf{p}_0(t)\cdot\boldsymbol{\varphi}\left([\mathbf{q},\mathbf{u}]_\tau(t)\right)$$

Dimostrazione. Considereremo il problema di minimo (19) – (21) come un calcolo di minimo sul vincolo

$$Z = \Big\{ \big(\mathbf{q}(\cdot),\mathbf{u}(\cdot)\big) : \dot{\mathbf{q}}(t) = \boldsymbol{\varphi}\left(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{q}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau)\right)$$
$$\mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\delta}(t) \ \text{ se } \ t\in[a-\tau,a] \Big\}.$$

Ovviamente vale la seguente proprietà: $\mathcal{I}^\tau[\mathbf{q}(\cdot),\mathbf{u}(\cdot)]$ ha minimo in $\big(\mathbf{q}_0(\cdot),\mathbf{u}_0(\cdot)\big)\in Z$ se e soltanto se la mappa

$$\mathcal{C}^1\big([a-\tau,b],\mathbb{R}^n\big)\times\mathcal{C}^0\big([a-\tau,b],\mathbb{R}^r\big) \ni (\mathbf{h},\mathbf{k}) \mapsto \mathcal{I}^\tau[(\mathbf{q}_0+\mathbf{h})(\cdot),(\mathbf{u}_0+\mathbf{k})(\cdot)]$$

ha minimo in $(\mathbf{0},\mathbf{0})$. Studiamo perciò

$$\mathcal{I}_0^\tau[\mathbf{h}(\cdot),\mathbf{k}(\cdot)] \doteq \mathcal{I}^\tau[(\mathbf{q}_0+\mathbf{h})(\cdot),(\mathbf{u}_0+\mathbf{k})(\cdot)]$$

sullo spazio

$$X = \Big\{ \big(\mathbf{h}(\cdot),\mathbf{k}(\cdot)\big) \in \mathcal{C}^1\big([a-\tau,b],\mathbb{R}^n\big)\times\mathcal{C}^0\big([a-\tau,b],\mathbb{R}^r\big) :$$
$$\mathbf{h}_{|[a-\tau,a]} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k}_{|[a-\tau,a]} = \mathbf{0} \Big\}.$$

Ponendo

$$\boldsymbol{\phi}\left([\mathbf{q},\mathbf{u}]_\tau(t)\right) = \mathbf{q}(t) - \boldsymbol{\delta}(a) - \int_a^t \boldsymbol{\varphi}\left([\mathbf{q},\mathbf{u}]_\tau(s)\right)\,\mathrm{d}s$$

e

$$\boldsymbol{\phi}_0\left(\mathbf{h},\mathbf{k}\right) = \boldsymbol{\phi}\left([\mathbf{q}_0+\mathbf{h},\mathbf{u}_0+\mathbf{k}]_\tau(t)\right)$$

il vincolo diventa

$$Z_0 = \Big\{ \big(\mathbf{h}(\cdot),\mathbf{k}(\cdot)\big) \in X : \boldsymbol{\phi}_0\left(\mathbf{h},\mathbf{k}\right) = \mathbf{0} \Big\}.$$

Osserviamo che $\boldsymbol{\phi}_0 : X \to Y = \mathcal{C}_0\big([a,b],\mathbb{R}^n\big) = \big\{ \mathbf{f}\in\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}^n\big) : \mathbf{f}(a) = \mathbf{0} \big\}$.
Dimostriamo intanto il

Teorema 7.2. *Siano $a<b$ in $\mathbb{R}$, $0<\tau<b-a$, $\mathbf{f}\in\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}^n\big)$, $\mathbf{K}_1(t,s)$ e $\mathbf{K}_2(t,s)$ matrici quadrate di ordine n di funzioni continue rispettivamente per $a\le s\le t\le b$ e $a\vee(t-\tau)\le s\le t-\tau\le b-\tau$. Esiste, nell'intervallo $[a,b]$, una soluzione dell'equazione*

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{f}(t) + \int_a^t \mathbf{K}_1(t,s)\mathbf{h}(s)\,\mathrm{d}s + \int_{a\vee(t-\tau)}^{t-\tau} \mathbf{K}_2(t,s)\mathbf{h}(s)\,\mathrm{d}s \tag{25}$$

Dimostrazione. Costruiamo una successione di funzioni $\{\mathbf{h}_n(\cdot)\}$ continue su $[a, b]$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1(t) &= \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{h}_{n+1}(t) &= \mathbf{f}(t) + \int_a^t \mathbf{K}(t,s)\mathbf{h}_n(s)\,\mathrm{d}s + \int_{a\vee(t-\tau)}^{t-\tau} \mathbf{K}_2(t,s)\mathbf{h}_n(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{26}$$

Siano

$$M_1 = \max_{a\leq s\leq t\leq b} ||\mathbf{K}_1(t,s)||$$

$$M_2 = \max_{a\leq s\leq t-\tau\leq b-\tau} ||\mathbf{K}_2(t,s)||$$

$$M = \max\{M_1, M_2\}$$

e

$$L = \max_{a\leq t\leq b} ||\mathbf{f}(t)||$$

e consideriamo la serie

$$\mathbf{h}_1(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\mathbf{h}_{n+1}(t) - \mathbf{h}_n(t)\big) \tag{27}$$

la cui somma parziale k-esima è $\mathbf{h}_k(t)$. Mostriamo induttivamente che

$$||\mathbf{h}_{n+1}(t) - \mathbf{h}_n(t)|| \leq \frac{L(2M)^n(t-a)^n}{n!}$$

Se $n = 1$, segue dalla (26) che

$$\begin{aligned} ||\mathbf{h}_2(t) - \mathbf{h}_1(t)|| &= ||\mathbf{f}(t) + \int_a^t \mathbf{K}_1(t,s)\mathbf{f}(s)\,\mathrm{d}s + \int_{a\vee(t-\tau)}^{t-\tau} \mathbf{K}_2(t,s)\mathbf{f}(s)\,\mathrm{d}s - \mathbf{f}(t)|| \\ &\leq \int_a^t ||\mathbf{K}_1(t,s)\mathbf{f}(s)||\,\mathrm{d}s + \int_{a\vee(t-\tau)}^{t-\tau} ||\mathbf{K}_2(t,s)\mathbf{f}(s)||\,\mathrm{d}s \\ &\leq LM_1(t-a) + LM_2(t-\tau-a) \leq 2LM(t-a) \end{aligned}$$

dunque nel caso base la tesi è verificata.
Assumiamo ora che essa valga al passo n e mostriamola per il passo $n+1$. Risulta

$$\begin{aligned}
||\mathbf{h}_{n+2}(t) - \mathbf{h}_{n+1}(t)|| &= ||\mathbf{f}(t) + \int_a^t \mathbf{K}_1(t,s)\mathbf{h}_{n+1}(s)\,\mathrm{d}s + \int_{a\vee(t-\tau)}^{t-\tau} \mathbf{K}_2(t,s)\mathbf{h}_{n+1}(s)\,\mathrm{d}s \\
&\quad - \mathbf{f}(t) - \int_a^t \mathbf{K}_1(t,s)\mathbf{h}_n(s)\,\mathrm{d}s - \int_{a\vee(t-\tau)}^{t-\tau} \mathbf{K}_2(t,s)\mathbf{h}_n(s)\,\mathrm{d}s\,|| \\
&\le \int_a^t ||\mathbf{K}_1(t,s)||||\mathbf{h}_{n+1}(s) - \mathbf{h}_n(s)||\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_{a\vee(t-\tau)}^{t-\tau} ||\mathbf{K}_2(t,s)||||\mathbf{h}_{n+1}(s) - \mathbf{h}_n(s)||\,\mathrm{d}s \\
&\le M\int_a^t ||\mathbf{h}_{n+1}(s) - \mathbf{h}_n(s)||\,\mathrm{d}s \\
&\quad + M\int_{a\vee(t-\tau)}^{t-\tau} ||\mathbf{h}_{n+1}(s) - \mathbf{h}_n(s)||\,\mathrm{d}s \\
&\le M\int_a^t \frac{L(2M)^n(s-a)^n}{n!}\,\mathrm{d}s + M\int_{a\vee(t-\tau)}^{t-\tau} \frac{L(2M)^n(s-a)^n}{n!}\,\mathrm{d}s \\
&\le \frac{2^n L M^{n+1}(t-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{2^n L M^{n+1}(t-\tau-a)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&\le \frac{L(2M)^{n+1}(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

come richiesto. Ora, il termine

$$\frac{L(2M)^n(t-a)^n}{n!}$$

è l'n-esimo addendo dell'espansione in serie di Taylor di centro $t = a$ della funzione $t \mapsto Le^{2M(t-a)}$; tale serie converge uniformemente e totalmente su $[a, b]$, perciò la serie (27) converge (per confronto) uniformemente su $[a, b]$ ad una funzione limite continua che denotiamo con $\mathbf{h}(\cdot)$.
Prendendo il limite per $n \to +\infty$ e passandolo sotto il segno di integrale in (26), otteniamo

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{f}(t) + \int_a^t \mathbf{K}_1(t,s)\mathbf{h}(s)\,\mathrm{d}s + \int_{a\vee(t-\tau)}^{t-\tau} \mathbf{K}_2(t,s)\mathbf{h}(s)\,\mathrm{d}s$$

ossia $\mathbf{h}(\cdot)$ risulta una soluzione dell'equazione integrale (25).

□

Osserviamo che, utilizzando in una forma adeguata il lemma di Grönwall, è possibile dimostrare anche l'unicità della soluzione della precedente equazione.

Riprendiamo la dimostrazione del teorema (7.1).
Omettendo, dove risultano ovvie, le dipendenze funzionali, risulta

$$\boldsymbol{\phi}_0'(\mathbf{0},\mathbf{0})(\mathbf{h},\mathbf{k})(t)=\mathbf{h}(t)-\int_a^t\Big[\boldsymbol{\partial}_2\boldsymbol{\varphi}\mathbf{h}(s)+\boldsymbol{\partial}_3\boldsymbol{\varphi}\mathbf{k}(s)+\boldsymbol{\partial}_4\boldsymbol{\varphi}\mathbf{h}(s-\tau)+\boldsymbol{\partial}_5\boldsymbol{\varphi}\mathbf{k}(s-\tau)\Big]\,\mathrm{d}s$$

dove stiamo denotando con $\boldsymbol{\partial}_i\boldsymbol{\varphi}$ la matrice delle derivate della funzione vettoriale $\boldsymbol{\varphi}$ rispetto al suo i-esimo argomento vettoriale.
Fissiamo $\mathbf{f}\in Y$ e consideriamo il problema con ritardo

$$\begin{cases}\mathbf{h}(t)-\int_a^t\Big[\boldsymbol{\partial}_2\boldsymbol{\varphi}\mathbf{h}(s)+\boldsymbol{\partial}_3\boldsymbol{\varphi}\mathbf{k}(s)+\boldsymbol{\partial}_4\boldsymbol{\varphi}\mathbf{h}(s-\tau)+\boldsymbol{\partial}_5\boldsymbol{\varphi}\mathbf{k}(s-\tau)\Big]\,\mathrm{d}s=\mathbf{f}(t)\\ \mathbf{h}_{|[a-\tau,a]}=\mathbf{0}\\ \mathbf{k}_{|[a-\tau,a]}=\mathbf{0}\end{cases}\tag{28}$$

Scegliendo $\mathbf{k}\equiv\mathbf{0}$ si può applicare il teorema (7.2) al problema (28) che si presenta nella forma

$$\begin{cases}\mathbf{h}(t)-\int_a^t\mathbf{K}_1(t,s)\mathbf{h}(s)\,\mathrm{d}s-\int_{a\vee(t-\tau)}^{t-\tau}\mathbf{K}_2(t,s)\mathbf{h}(s)\,\mathrm{d}s=\mathbf{f}(t)\\ \mathbf{K}_1(t,s)=\boldsymbol{\partial}_2\boldsymbol{\varphi}\big([\mathbf{q},\mathbf{u}]_\tau(s)\big) & a\le s\le t\le b\\ \mathbf{K}_2(t,s)=\boldsymbol{\partial}_4\boldsymbol{\varphi}\big([\mathbf{q},\mathbf{u}]_\tau(s+\tau)\big) & a\vee(t-\tau)\le s\le t-\tau\le b\\ \mathbf{h}_{|[a-\tau,a]}=\mathbf{0}\end{cases}$$

ottenendone una soluzione. Ciò significa che $\boldsymbol{\phi}_0'(\mathbf{0},\mathbf{0})$ è un operatore lineare surgettivo.
Il risultato che segue si può trovare dimostrato in [11, pag. 498 e segg.].

Teorema 7.3. *Siano X e Y spazi di Banach reali, $F:X\to\mathbb{R}$ e $\Phi:X\to Y$ funzioni di classe $\mathcal{C}^1$, $Z_0=\big\{x\in X:\Phi(x)=0\big\}$. Fissiamo $x_0\in Z_0$ e supponiamo che l'applicazione lineare $\Phi'(x_0)$ abbia immagine chiusa in Y. Se x_0 è un punto di massimo o di minimo relativo per $F_{|Z_0}$, allora esistono $\lambda_0\in\mathbb{R}$ e $\theta\in Y^*$, non entrambi nulli e tali che*

$$\lambda_0F'(x_0)+\Phi'(x_0)^*\theta=0\in X^*$$

dove $\Phi'(x_0)^*$ denota l'operatore aggiunto di $\Phi'(x_0)$. In particolare, se $\Phi'(x_0)$ è un operatore lineare surgettivo, è possibile scegliere $\lambda_0\neq0$.

Il nostro problema soddisfa tutte le ipotesi del teorema (7.3), con $F=\mathcal{I}_0^\tau,\Phi=\boldsymbol{\phi}_0$, X,Y e Z_0 introdotti in precedenza; come abbiamo mostrato, l'operatore $\boldsymbol{\phi}_0'(\mathbf{0},\mathbf{0})$, essendo $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ punto di minimo relativo, è surgettivo. Perciò, possiamo scegliere ad esempio (con la notazione del teorema (7.3)) $\lambda_0=-1$ e $\theta=\mathbf{p}_0\in Y^*$ tale che

$$-\mathcal{I}_0^\tau(\mathbf{0},\mathbf{0})+\boldsymbol{\phi}_0'(\mathbf{0},\mathbf{0})^*\mathbf{p}_0=0\in X^*\tag{29}$$

D'altra parte, lo spazio duale di $Y=\mathcal{C}_0\big([a,b],\mathbb{R}^n\big)=\big\{\mathbf{f}\in\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}^n\big):\mathbf{f}(a)=\mathbf{0}\big\}$ è costituito dalle n-uple di differenze di misure di Lebesgue-Stieltjes associate a funzioni

g crescenti, continue a sinistra, con la condizione $g(b) = 0$ (si veda, ad esempio, [4]). Osserviamo infatti che, in dimensione $n = 1$, ogni elemento di $\big(\mathcal{C}\big([a,b]\big)\big)^*$ è un elemento di $\big(\mathcal{C}_0\big([a,b]\big)\big)^*$ dato che ogni $g \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$ si può scrivere come $f(t) = f_0(t) + f(a)$ dove $f_0 \in \mathcal{C}_0\big([a,b]\big)$. Viceversa, applicando il teorema di Hahn-Banach, ogni funzionale di $\big(\mathcal{C}_0\big([a,b]\big)\big)^*$ si può estendere ad un funzionale di $\big(\mathcal{C}\big([a,b]\big)\big)^*$. Più precisamente la valutazione in $t = a$ induce una successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{C}_0\big([a,b]\big) \to \mathcal{C}\big([a,b]\big) \to \mathbb{R} \to 0$$

Applicando il teorema di Hahn-Banach è possibile costruire una successione duale esatta corta

$$0 \to \mathbb{R} \to \big(\mathcal{C}\big([a,b]\big)\big)^* \to \big(\mathcal{C}_0\big([a,b]\big)\big)^* \to 0$$

da cui segue $\big(\mathcal{C}_0\big([a,b]\big)\big)^* \cong \big(\mathcal{C}\big([a,b]\big)\big)^*/\mathbb{R}$. Il significato del quoziente è precisamente una condizione di annullamento delle funzioni rappresentanti le misure, che ad esempio possiamo porre in $t = b$.
Dunque, per ogni $\big(\mathbf{h}(\cdot), \mathbf{k}(\cdot)\big) \in X$ vale la (29): denotando con $\langle \cdot, \cdot \rangle : Y^* \times Y \to \mathbb{R}$ il prodotto di dualità,

$$-\mathcal{I}_0^{\tau\prime}(\mathbf{0},\mathbf{0})(\mathbf{h},\mathbf{k}) + \langle \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\phi}_0'(\mathbf{0},\mathbf{0})(\mathbf{h},\mathbf{k})\rangle = 0 \in \mathbb{R} \tag{30}$$

Risulta quindi, (omettendo dove ovvie le dipendenze funzionali)

$$\begin{aligned}
0 = &-\int_a^b \Big[\partial_2 L \cdot \mathbf{h}(t) + \partial_3 L \cdot \mathbf{k}(t) + \partial_4 L \cdot \mathbf{h}(t-\tau) + \partial_5 L \cdot \mathbf{k}(t-\tau)\Big]\, \mathrm{d}t \\
&+ \int_a^b \left[\mathbf{h}(t) - \int_a^t \Big[\boldsymbol{\partial}_2\boldsymbol{\varphi}\mathbf{h}(s) + \boldsymbol{\partial}_3\boldsymbol{\varphi}\mathbf{k}(s) + \boldsymbol{\partial}_4\boldsymbol{\varphi}\mathbf{h}(s-\tau) + \boldsymbol{\partial}_5\boldsymbol{\varphi}\mathbf{k}(s-\tau)\Big]\, \mathrm{d}s\right] \cdot \mathrm{d}\mathbf{p}_0(t) \\
= &-\int_a^b \Big[\partial_2 L \cdot \mathbf{h}(t) + \partial_3 L \cdot \mathbf{k}(t) + \partial_4 L \cdot \mathbf{h}(t-\tau) + \partial_5 L \cdot \mathbf{k}(t-\tau)\Big]\, \mathrm{d}t \\
&+ \left[\mathbf{h}(t) - \int_a^t \Big[\boldsymbol{\partial}_2\boldsymbol{\varphi}\mathbf{h}(s) + \boldsymbol{\partial}_3\boldsymbol{\varphi}\mathbf{k}(s) + \boldsymbol{\partial}_4\boldsymbol{\varphi}\mathbf{h}(s-\tau) + \boldsymbol{\partial}_5\boldsymbol{\varphi}\mathbf{k}(s-\tau)\Big]\, \mathrm{d}s\right] \cdot \mathbf{p}_0(t)\Bigg|_a^b \\
&- \int_a^b \Big\{\Big[\dot{\mathbf{h}}(t) - \boldsymbol{\partial}_2\boldsymbol{\varphi}\mathbf{h}(t) - \boldsymbol{\partial}_3\boldsymbol{\varphi}\mathbf{k}(t) - \boldsymbol{\partial}_4\boldsymbol{\varphi}\mathbf{h}(t-\tau) - \boldsymbol{\partial}_5\boldsymbol{\varphi}\mathbf{k}(t-\tau)\Big] \cdot \mathbf{p}_0(t)\Big\}\, \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Scegliendo $\mathbf{h}$ e $\mathbf{k}$ nulle in b, e ricordando che $\mathbf{p}_0(b) = \mathbf{0}$, otteniamo

$$
\begin{aligned}
0 = &-\int_a^b \Big[\partial_2 L\cdot\mathbf{h}(t)+\partial_3 L\cdot\mathbf{k}(t)+\partial_4 L\cdot\mathbf{h}(t-\tau)+\partial_5 L\cdot\mathbf{k}(t-\tau)\Big]\,\mathrm{d}t\\
&+\int_a^b \Big[-\dot{\mathbf{h}}(t)\cdot\mathbf{p}_0(t)+\big(\mathbf{p}_0(t)^t\cdot\boldsymbol{\partial}_2\boldsymbol{\varphi}\big)\cdot\mathbf{h}(t)+\big(\mathbf{p}_0(t)^t\cdot\boldsymbol{\partial}_3\boldsymbol{\varphi}\big)\cdot\mathbf{k}(t)\\
&\qquad+\big(\mathbf{p}_0(t)^t\cdot\boldsymbol{\partial}_4\boldsymbol{\varphi}\big)\cdot\mathbf{h}(t-\tau)+\big(\mathbf{p}_0(t)^t\cdot\boldsymbol{\partial}_5\boldsymbol{\varphi}\big)\cdot\mathbf{k}(t-\tau)\Big]\,\mathrm{d}t\\
=&\int_a^b\Bigg[\Big(-\partial_2 L+\big(\mathbf{p}_0(t)^t\cdot\boldsymbol{\partial}_2\boldsymbol{\varphi}\big)\Big)\cdot\mathbf{h}(t)+\Big(-\partial_3 L+\big(\mathbf{p}_0(t)^t\cdot\boldsymbol{\partial}_3\boldsymbol{\varphi}\big)\Big)\cdot\mathbf{k}(t)\\
&\qquad\Big(-\partial_4 L+\big(\mathbf{p}_0(t)^t\cdot\boldsymbol{\partial}_4\boldsymbol{\varphi}\big)\Big)\cdot\mathbf{h}(t-\tau)\\
&\qquad\Big(-\partial_5 L+\big(\mathbf{p}_0(t)^t\cdot\boldsymbol{\partial}_5\boldsymbol{\varphi}\big)\Big)\cdot\mathbf{k}(t-\tau)-\dot{\mathbf{h}}(t)\cdot\mathbf{p}_0(t)\Bigg]\,\mathrm{d}t\\
=&\int_a^b\Bigg[\Big(-\partial_2 L+\big(\mathbf{p}_0(t)^t\cdot\boldsymbol{\partial}_2\boldsymbol{\varphi}\big)\Big)\cdot\mathbf{h}(t)+\Big(-\partial_3 L+\big(\mathbf{p}_0(t)^t\cdot\boldsymbol{\partial}_3\boldsymbol{\varphi}\big)\Big)\cdot\mathbf{k}(t)\\
&\qquad\Big(-\partial_4 L+\big(\mathbf{p}_0(t)^t\cdot\boldsymbol{\partial}_4\boldsymbol{\varphi}\big)\Big)\cdot\mathbf{h}(t-\tau)\\
&\qquad\Big(-\partial_5 L+\big(\mathbf{p}_0(t)^t\cdot\boldsymbol{\partial}_5\boldsymbol{\varphi}\big)\Big)\cdot\mathbf{k}(t-\tau)+\mathbf{h}(t)\cdot\dot{\mathbf{p}}_0(t)\Bigg]\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo integrato per parti il termine $\dot{\mathbf{h}}\cdot\mathbf{p}_0$ e tenuto conto che $\mathbf{h}(a)=\mathbf{h}(b)=0$. Possiamo rinominare $\mathbf{p}_0$, invertendone in partenza il segno; riordinando le somme, e reintroducendo le dipendenze funzionali,

$$
\begin{aligned}
0 = &\int_a^b\Big\{\Big[\partial_2 L\left([\mathbf{q}_0,\mathbf{u}_0]_\tau(t)\right)+\big(\mathbf{p}_0(t)^t\cdot\boldsymbol{\partial}_2\boldsymbol{\varphi}\left([\mathbf{q}_0,\mathbf{u}_0]_\tau(t)\right)\big)+\dot{\mathbf{p}}_0(t)\Big]\cdot\mathbf{h}(t)\Big\}\,\mathrm{d}t\\
&+\int_a^b\Big\{\Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}_0,\mathbf{u}_0]_\tau(t)\right)+\big(\mathbf{p}_0(t)^t\cdot\boldsymbol{\partial}_3\boldsymbol{\varphi}\left([\mathbf{q}_0,\mathbf{u}_0]_\tau(t)\right)\big)\Big]\cdot\mathbf{k}(t)\Big\}\,\mathrm{d}t\\
&+\int_a^{b-\tau}\Big\{\Big[\partial_4 L\left([\mathbf{q}_0,\mathbf{u}_0]_\tau(t+\tau)\right)+\big(\mathbf{p}_0(t+\tau)^t\cdot\boldsymbol{\partial}_4\boldsymbol{\varphi}\left([\mathbf{q}_0,\mathbf{u}_0]_\tau(t+\tau)\right)\big)\Big]\cdot\mathbf{h}(t)\Big\}\,\mathrm{d}t\\
&+\int_a^{b-\tau}\Big\{\Big[\partial_5 L\left([\mathbf{q}_0,\mathbf{u}_0]_\tau(t+\tau)\right)+\big(\mathbf{p}_0(t+\tau)^t\cdot\boldsymbol{\partial}_5\boldsymbol{\varphi}\left([\mathbf{q}_0,\mathbf{u}_0]_\tau(t+\tau)\right)\big)\Big]\cdot\mathbf{k}(t)\Big\}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Segue che

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_0(t) = -\Big[\partial_2 L\left([\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0]_\tau(t)\right) + \big(\mathbf{p}_0(t)^t \cdot \boldsymbol{\partial}_2\boldsymbol{\varphi}\left([\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0]_\tau(t)\right)\big)\Big] \\ \qquad\qquad -\Big[\partial_4 L\left([\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0]_\tau(t+\tau)\right) + \big(\mathbf{p}_0(t+\tau)^t \cdot \boldsymbol{\partial}_4\boldsymbol{\varphi}\left([\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0]_\tau(t+\tau)\right)\big)\Big] \\ \hfill a \le t \le b-\tau \\ \Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0]_\tau(t)\right) + \big(\mathbf{p}_0(t)^t \cdot \boldsymbol{\partial}_3\boldsymbol{\varphi}\left([\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0]_\tau(t)\right)\big)\Big] \\ +\Big[\partial_5 L\left([\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0]_\tau(t+\tau)\right) + \big(\mathbf{p}_0(t+\tau)^t \cdot \boldsymbol{\partial}_5\boldsymbol{\varphi}\left([\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0]_\tau(t+\tau)\right)\big)\Big] = \mathbf{0} \\ \hfill a \le t \le b-\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_0(t) = -\Big[\partial_2 L\left([\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0]_\tau(t)\right) + \big(\mathbf{p}_0(t)^t \cdot \boldsymbol{\partial}_2\boldsymbol{\varphi}\left([\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0]_\tau(t)\right)\big)\Big] & b-\tau \le t \le b \\ \partial_3 L\left([\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0]_\tau(t)\right) + \big(\mathbf{p}_0(t)^t \cdot \boldsymbol{\partial}_3\boldsymbol{\varphi}\left([\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0]_\tau(t)\right)\big) = \mathbf{0} & b-\tau \le t \le b \end{cases}$$

tenuto conto che per $t \in [a, b]$

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = \boldsymbol{\varphi}\left([\mathbf{q}_0, \mathbf{u}_0]_\tau(t)\right).$$

Queste condizioni corrispondono esattamente alle (22) – (24).

□

Definizione 7.4. Una terna $(\mathbf{q}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{p}(\cdot))$ che soddisfi le condizioni (22) – (24) si dice *estremale di Pontryagin con ritardo.*

Osservazione 7.5. Verifichiamo che, nel caso particolare in cui

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \boldsymbol{\varphi}\big(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \mathbf{u}(t-\tau)\big) = \mathbf{u}(t)$$

il teorema appena enunciato fornisce le condizioni (9) della sezione 3.
Osserviamo che

$$H\left([\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{p}]_\tau(t)\right) = L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \mathbf{p}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t)$$

e che in questo caso

$$[\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{p}]_\tau(t) = \big(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \dot{\mathbf{q}}(t-\tau), \mathbf{p}(t)\big)$$

Nel sottointervallo $[a, b-\tau]$, la condizione stazionaria

$$\partial_3 H\left([\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{p}]_\tau(t)\right) + \partial_5 H\left([\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{p}]_\tau(t+\tau)\right) = \mathbf{0}$$

si traduce quindi in

$$\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \mathbf{p}(t) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) = \mathbf{0}$$

ossia

$$\mathbf{p}(t) = -\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right).$$

Ma contemporaneamente, dal teorema risulta

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}(t) &= -\partial_2 H\left([\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{p}]_\tau(t)\right) - \partial_4 H\left([\mathbf{q}, \mathbf{u}, \mathbf{p}]_\tau(t+\tau)\right) \\ &= -\partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \partial_4 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right). \end{aligned}$$

Dunque, ritroviamo la prima delle (9)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big] = \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_4 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right).$$

Nel sottointervallo $[b-\tau, b]$, la condizione stazionaria

$$\partial_3 H\left([\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{p}]_\tau(t)\right) = \mathbf{0}$$

si traduce in

$$\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$$

ossia

$$\mathbf{p}(t) = -\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right).$$

Ma contemporaneamente, dal teorema risulta

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}(t) &= -\partial_2 H\left([\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{p}]_\tau(t)\right)\\ &= -\partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right).\end{aligned}$$

e dunque ritroviamo la seconda delle (9)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)\Big] = \partial_2 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right).$$

Questa verifica ci permette di concludere che gli estremali di Pontryagin con ritardo sono una generalizzazione degli estremali di Eulero-Lagrange con ritardo.

Consideriamo ora, confrontandolo con la (10), il seguente sistema di trasformazioni infinitesimali di tempi, coordinate, controlli e variabili co-stato ad un parametro reale $\alpha \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$

$$\begin{cases}\bar{t} = t + \alpha\eta\left(t,\mathbf{q},\mathbf{u}\right) + o(\alpha)\\ \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \alpha\boldsymbol{\xi}\left(t,\mathbf{q},\mathbf{u}\right) + o(\alpha)\\ \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \alpha\boldsymbol{\rho}\left(t,\mathbf{q},\mathbf{u}\right) + o(\alpha)\\ \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \alpha\boldsymbol{\varsigma}\left(t,\mathbf{q},\mathbf{u}\right) + o(\alpha)\end{cases} \tag{31}$$

ove $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{1+n+r},\mathbb{R}), \boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\varsigma} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{1+n+r},\mathbb{R}^n), \boldsymbol{\rho} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{1+n+r},\mathbb{R}^r)$ sono dati; osserviamo che valutando ognuna delle trasformazioni elencate per $\alpha = 0$ si ottiene l'identità.

Definizione 7.6. Il funzionale $\mathcal{I}^\tau[\mathbf{q}(\cdot),\mathbf{u}(\cdot)]$ si dice invariante rispetto alle trasformazioni (31) se

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}\int_{t_a}^{t_b}\Bigg[&H\Big(t+\alpha\eta\left(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t)\right),\mathbf{q}(t)+\alpha\boldsymbol{\xi}\left(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t)\right),\mathbf{u}(t)+\alpha\boldsymbol{\rho}\left(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t)\right),\\ &\mathbf{q}(t-\tau)+\alpha\boldsymbol{\xi}\left(t-\tau,\mathbf{q}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau)\right),\\ &\mathbf{u}(t-\tau)+\alpha\boldsymbol{\rho}\left(t-\tau,\mathbf{q}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau)\right),\\ &\mathbf{p}(t)+\alpha\boldsymbol{\varsigma}\left(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t)\right)\Big)\\ &-\Big(\mathbf{p}(t)+\alpha\boldsymbol{\varsigma}\left(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t)\right)\Big)\cdot\\ &\cdot\frac{\dot{\mathbf{q}}(t)+\alpha\dot{\boldsymbol{\xi}}\left(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t)\right)}{1+\alpha\dot{\eta}\left(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t)\right)}\Bigg]\Big(1+\alpha\dot{\eta}\left(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t)\right)\Big)\,\mathrm{d}t=0\end{aligned} \tag{32}$$

per ogni sottointervallo $[t_a,t_b]\subseteq[a,b]$.

Definizione 7.7. Una funzione $C\left(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{q}(t-\tau),\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t-\tau),\mathbf{p}(t)\right)$ che sia costante nell'intervallo $[a,b]$ lungo ogni estremale con ritardo $(\mathbf{q}(\cdot),\mathbf{u}(\cdot),\mathbf{p}(\cdot))$ del problema di minimo (19) – (21) per $\mathcal{I}^\tau[\mathbf{q}(\cdot),\mathbf{u}(\cdot)]$ si dice *costante del moto con ritardo* per tale problema.

Teorema 7.8. *Siano $H,\mathcal{I}^\tau[\mathbf{q}(\cdot),\mathbf{u}(\cdot)]$ come sopra. Consideriamo un sistema di trasformazioni ad un parametro $\alpha\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ di tempi, coordinate, controlli e co-stati del tipo* (31)*. Supponiamo che il funzionale $\mathcal{I}^\tau[\mathbf{q}(\cdot),\mathbf{u}(\cdot)]$ sia invariante rispetto alle trasformazioni introdotte, nel senso precisato dalla definizione* (7.6)*.*
Allora la funzione

$$\begin{aligned}C\left(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{q}(t-\tau),\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t-\tau),\mathbf{p}(t)\right)&=-\mathbf{p}(t)\cdot\boldsymbol{\xi}\left(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t)\right)\\ &\quad+H\big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{q}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau),\mathbf{p}(t)\big)\eta\left(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t)\right)\end{aligned}$$

è una costante del moto con ritardo per il problema di minimo (19) – (21) *per* $\mathcal{I}^\tau[\mathbf{q}(\cdot),\mathbf{u}(\cdot)]$.

Dimostrazione. Per definizione, si ha

$$L\big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{q}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau)\big)=H\big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{q}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau),\mathbf{p}(t)\big)-\mathbf{p}(t)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)$$

Dunque la lagrangiana del problema *non* dipende esplicitamente da $\dot{\mathbf{q}}(\cdot-\tau)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(\cdot-\tau)$, $\dot{\mathbf{p}}(t)$, ed in essa compaiono, rispetto al problema trattato nel capitolo 3, il parametro di controllo $\mathbf{u}(\cdot)$ e di controllo di ritardo $\mathbf{u}(\cdot-\tau)$.
La condizione di invarianza (32) che è per ipotesi soddisfatta implica quella della definizione (3.4), considerando L come funzione di $[\mathbf{q},\mathbf{u}]_\tau(\cdot)$ e non solo di $[\mathbf{q}]_\tau(\cdot)$; è perciò possibile applicare il teorema di Noether (3.8).

Indicando per maggiore chiarezza in questo contesto con $\partial_{\dot{\mathbf{q}}(\cdot)}L$ e con $\partial_{\dot{\mathbf{q}}(\cdot-\tau)}L$ gli operatori di derivata di L rispetto alle variabili $\dot{\mathbf{q}}(\cdot)$ e $\dot{\mathbf{q}}(\cdot-\tau)$ che durante la dimostrazione del teorema (3.8) avevamo indicato con $\partial_3 L$ e $\partial_5 L$ in relazione alla posizione degli argomenti, sappiamo che valgono

$$\begin{aligned}
&\Big(\partial_{\dot{\mathbf{q}}(\cdot)}L\left([\mathbf{q},\mathbf{u}]_\tau(t)\right)+\partial_{\dot{\mathbf{q}}(\cdot-\tau)}L\left([\mathbf{q},\mathbf{u}]_\tau(t+\tau)\right)\Big)\cdot\boldsymbol{\xi}\left(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t)\right)\\
&\qquad+\Big[L\left([\mathbf{q},\mathbf{u}]_\tau(t)\right)\\
&\qquad\quad-\Big(\partial_{\dot{\mathbf{q}}(\cdot)}L\left([\mathbf{q},\mathbf{u}]_\tau(t)\right)+\partial_{\dot{\mathbf{q}}(\cdot-\tau)}L\left([\mathbf{q},\mathbf{u}]_\tau(t+\tau)\right)\Big)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\eta\left(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t)\right)\\
&\hspace{28em}\text{se }\ a\le t\le b-\tau\\
&\partial_{\dot{\mathbf{q}}(\cdot)}L\left([\mathbf{q},\mathbf{u}]_\tau(t)\right)\cdot\boldsymbol{\xi}\left(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t)\right)\\
&\qquad+\Big[L\left([\mathbf{q},\mathbf{u}]_\tau(t)\right)-\partial_{\dot{\mathbf{q}}(\cdot)}L\left([\mathbf{q},\mathbf{u}]_\tau(t)\right)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\eta\left(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t)\right)\\
&\hspace{28em}\text{se }\ b-\tau\le t\le b
\end{aligned}\tag{33}$$

Ora, nel nostro caso,

$$\begin{cases}\partial_{\dot{\mathbf{q}}(\cdot)}L\left([\mathbf{q},\mathbf{u}]_\tau(t)\right)=-\mathbf{p}(t)\\ \partial_{\dot{\mathbf{q}}(\cdot-\tau)}L\left([\mathbf{q},\mathbf{u}]_\tau(t+\tau)\right)\equiv\mathbf{0}\end{cases}$$

e sostituendo tali relazioni nella (33) si ottiene precisamente la tesi. □

Osservazione 7.9. Osserviamo che la costante del moto con ritardo la cui esistenza è stata appena dimostrata ha la stessa espressione nei due sottointervalli $[a,b-\tau]$ e $[b-\tau,b]$; inoltre, le uniche trasformazioni significative affinché esista un integrale primo non banale sono quelle che coinvolgono almeno il tempo o le coordinate, in quanto nell'espressione di C compaiono solo i generatori infinitesimali η e $\boldsymbol{\xi}$.

Osservazione 7.10. Nell'osservazione (7.5) abbiamo già sottolineato che, nel caso particolare in cui

$$\dot{\mathbf{q}}(t)=\boldsymbol{\varphi}\big(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{q}(t-\tau),\mathbf{u}(t-\tau)\big)=\mathbf{u}(t)$$

cioè quando la funzione hamiltoniana assume l'espressione

$$H\left([\mathbf{q},\mathbf{u},\mathbf{p}]_\tau(t)\right)=L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)+\mathbf{p}(t)\cdot\dot{\mathbf{q}}(t)$$

per gli estremali di Pontryagin con ritardo del problema (19) – (21) le condizioni stazionarie (24) del teorema (7.1) implicano le relazioni

$$\begin{aligned}
&\mathbf{p}(t)=-\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right)-\partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right) &&a\le t\le b-\tau\\
&\mathbf{p}(t)=-\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) &&b-\tau\le t\le b
\end{aligned}\tag{34}$$

In questo caso, il funzionale $\mathcal{I}^\tau[\mathbf{q}(\cdot),\mathbf{u}(\cdot)]$ si riduce al funzionale $\mathcal{I}^\tau$; la condizione di invarianza (32) coincide esattamente con quella della definizione (3.4) e la costante del moto con ritardo del teorema (7.8) si riduce (sostituendo le (34) nella sua espressione generale) a

$$\begin{cases} \Big[\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big] \cdot \boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)) \\ \quad + \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \Big(\partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) + \partial_5 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t+\tau)\right)\Big) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\eta(t,\mathbf{q}(t)) \\ \hfill a \le t \le b-\tau \\ \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{q}(t)) + \Big[L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) - \partial_3 L\left([\mathbf{q}]_\tau(t)\right) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t)\Big]\eta(t,\mathbf{q}(t)) \\ \hfill b-\tau \le t \le b \end{cases}$$

cioè quella già dimostrata per il caso lagrangiano del teorema (3.8).

Esempio 7.11. Consideriamo un altro caso particolare: supponiamo che nel problema (19) $-$ (21) la variabile t sia ciclica sia nella lagrangiana L, sia nella funzione vettoriale $\boldsymbol{\varphi}$.
Introduciamo la famiglia di trasformazioni ad un parametro $\alpha \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$

$$\begin{cases} \bar{t} = t + \alpha \\ \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \\ \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \end{cases}$$

in cui, con riferimento al sistema (32), $\eta \equiv 1, \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\varsigma} \equiv \mathbf{0}$.
Chiaramente, poiché il problema è *autonomo*, si ha invarianza rispetto a queste trasformazioni nel senso della (33) e segue dal teorema (7.8) che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H\big(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{q}(t-\tau), \mathbf{u}(t-\tau), \mathbf{p}(t)\big) = 0$$

lungo ogni estremale di Pontryagin con ritardo $(\mathbf{q}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{p}(t))$ del problema.

8. Appendice : Principi variazionali e funzionale d'azione.

Siano $a < b$ in $\mathbb{R}$, $\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b \in \mathbb{R}^n$, $L : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una lagrangiana di classe $\mathcal{C}^1$ e differenziabile due volte.
Siano
$$\Lambda \doteq \{\mathbf{q} : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \mathbf{q}(a) = \mathbf{q}_a, \mathbf{q}(b) = \mathbf{q}_b, \mathbf{q} \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R}^n)\}$$
e $\mathcal{I} : \Lambda \to \mathbb{R}$ il funzionale d'azione dato da
$$\mathcal{I}[\mathbf{q}(\cdot)] = \int_a^b L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathrm{d}t.$$
Introduciamo lo spazio
$$\Lambda_0 \doteq \{\boldsymbol{\zeta} : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\zeta}_{|(a,b)^c} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R}^n)\}$$
ed osserviamo esplicitamente che, per ogni $\mathbf{q}$ ammissibile e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha
$$(\mathbf{q} + \lambda\boldsymbol{\zeta})(a) = \mathbf{q}_a$$
$$(\mathbf{q} + \lambda\boldsymbol{\zeta})(b) = \mathbf{q}_b$$

Definizione 8.1. Con le notazioni appena introdotte, sia $\mathcal{J} : \Lambda \to \mathbb{R}$ un funzionale. Fissate $\mathbf{q} \in \Lambda$, $\boldsymbol{\zeta} \in \Lambda_0$, se esiste ed è finita si dice *derivata di Gâteaux* di $\mathcal{J}$ nel punto $\mathbf{q}$ e nella direzione $\boldsymbol{\zeta}$ la quantità
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{J}[\mathbf{q} + \lambda\boldsymbol{\zeta}]\Big|_{\lambda=0}$$
e se tale derivata è ben definita per ogni direzione $\boldsymbol{\zeta}$, il funzionale $\mathcal{J}$ si dice *derivabile secondo Gâteaux* nel punto $\mathbf{q}$.
Il punto $\mathbf{q}$ di dice *estremale debole* per $\mathcal{J}$ se $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{J}[\mathbf{q} + \lambda\boldsymbol{\zeta}]\Big|_{\lambda=0} = 0$ per ogni $\boldsymbol{\zeta} \in \Lambda_0$.

Proposizione 8.2. *Mantenendo le notazioni introdotte, il funzionale di azione $\mathcal{I}$ è derivabile secondo Gâteaux in ogni punto $\mathbf{q} \in \Lambda$.*

Dimostrazione. Dimostriamo il risultato esibendo esplicitamente il calcolo della derivata.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{I}[\mathbf{q} + \lambda\boldsymbol{\zeta}]\Big|_{\lambda=0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\Big|_{\lambda=0} \int_a^b L\left(t, \mathbf{q}(t) + \lambda\boldsymbol{\zeta}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \lambda\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\left(t, \mathbf{q}(t) + \lambda\boldsymbol{\zeta}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \lambda\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)\right) \cdot \boldsymbol{\zeta}(t)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\left(t, \mathbf{q}(t) + \lambda\boldsymbol{\zeta}(t), \dot{\mathbf{q}}(t) + \lambda\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)\right) \cdot \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t)\right]\Bigg|_{\lambda=0} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Integrando per parti il secondo addendo dell'integrale e ricordando che $\boldsymbol{\zeta} \in \Lambda_0$, cioè sugli estremi a e b ha come immagine il vettore nullo, otteniamo che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{I}[\mathbf{q}+\lambda\boldsymbol{\zeta}]\Big|_{\lambda=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t))\right]\cdot\boldsymbol{\zeta}(t)\,\mathrm{d}t$$

che, viste le ipotesi, è una quantità ben definita e reale. □

Concludiamo questa sezione richiamando prima di tutto il

Lemma 8.3. *(fondamentale del calcolo delle variazioni)*
Sia $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ tale che $\int_a^b f(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t = 0$ per ogni funzione $\phi \in \mathcal{C}^1$, con supporto contenuto in (a,b). Allora $f \equiv 0$.

Siamo quindi in grado di dimostrare il

Teorema 8.4. *(Principio variazionale di Hamilton)*
Seguendo le definizioni introdotte, $\mathbf{q}$ risolve nello spazio delle funzioni ammissibili Λ le equazioni di Eulero-Lagrange relative alla lagrangiana L se e soltanto se $\mathbf{q}$ è un estremale debole di $\mathcal{I}$.

Dimostrazione. La sufficienza è ovvia dalla definizione di estremale debole e dal calcolo esplicito della derivata di Gâteaux di $\mathcal{I}$.
Per la necessità, è sufficiente applicare il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni all'espressione $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{I}[\mathbf{q}+\lambda\boldsymbol{\zeta}]\Big|_{\lambda=0}$, che è una somma di n integrali in cui ne valgono le ipotesi. □

Vediamo un'applicazione del principio variazionale di Hamilton.

Definizione 8.5. Diremo che due lagrangiane L e $\mathcal{L}$ sono *equivalenti* se le relative equazioni di Eulero-Lagrange sono le stesse.

Ad esempio, sommando una costante ad una lagrangiana L, o moltiplicandola per una costante non nulla, le equazioni chiaramente restano le stesse. C'è però almeno un caso non banale che vale la pena di illustrare. Supponiamo che $F : [a,b]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sia di classe $\mathcal{C}^2$; data una lagrangiana $L : [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ come al solito $\mathcal{C}^1$ e differenziabile due volte, poniamo

$$\mathcal{L}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t,\mathbf{q})$$

e sia $\mathcal{F}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \doteq \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t,\mathbf{q}) = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}_j}\dot{\mathbf{q}}_j$. Risulta

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\right] + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}}\right].$$

Per concludere che L e $\mathcal{L}$ sono equivalenti è sufficiente osservare che

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}_i}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q}_i \partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q}_i \partial \mathbf{q}_j} \dot{\mathbf{q}}_j$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \mathbf{q}_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{q}_j \partial \mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_j$$

perciò, utilizzando il teorema di Schwarz, si conclude che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}$.
Ora, se denotiamo con $\mathcal{I}^L$ e $\mathcal{I}^{\mathcal{L}}$ i funzionali d'azione associati rispettivamente a L e $\mathcal{L}$, per ogni $\mathbf{q} \in \Gamma$ risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{\mathcal{L}}[\mathbf{q}(\cdot)] &= \int_a^b \mathcal{L}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\, \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \Big[L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\big(t, \mathbf{q}(t)\big) \Big]\, \mathrm{d}t \\ &= \mathcal{I}^L[\mathbf{q}(\cdot)] + F(b, \mathbf{q}(b)) - F(a, \mathbf{q}(a)) \end{aligned}$$

Poiché abbiamo mostrato che i funzionali differiscono per una opportuna costante, l'insieme dei loro estremali è lo stesso: ciò è consistente con il principio di Hamilton, coincidendo le equazioni di Eulero-Lagrange dei due sistemi.

Riferimenti bibliografici

[1] G. V. Bokov, *Pontryagin's maximum principle in a problem with time delay*, J. Math. Sci. (New York), **172** (2011), n. 5, 623-634.

[2] T. A. Burton, *Volterra integral and differential equations*, Academic Press, 1983.

[3] G. Buttazzo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *One-dimensional variational problems. An introduction*, Oxford lecture series in Mathematics and its applications, 15, Oxford Science Publications.

[4] N. J. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators*, Wiley Classics Library, Wiley Interscience, 1988.

[5] G. S. F. Frederico, T. Odzijewicz, D. F. M. Torres, *Noether's theorem for nonsmooth extremals of variational problems with time delay*, arXiv: 1212.4932v1 [math. OC] (submitted: 20/12/2012)

[6] G. S. F. Frederico, D. F. M. Torres, *Noether's symmetry theorem for variational and optimal control problems with time delay*, Numer. Algebra control optim. **2** (2012), n. 3, 619-630. arXiv: 1203.3656v1

[7] J. M. Gelfand, S. V. Fomin, *Calculus of variations*, revised english edition, Prentice-Hall inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.

[8] G. L. Haratišvili, *The maximum principle in the theory of optimal processes involving delay*, Doklady Akademii Nauk SSSR, **136** (1961), 39-42.

[9] D. K. Hughes, *Variational and optimal control problems with delayed argument*, J. Optimization Theory Appl., **2** (1968), 1-14.

[10] J. Jost, X. Li-Jost, *Calculus of variations*, Cambridge studies in advanced mathematics, 64, Cambridge University Press, 1998.

[11] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, Mir, 1980.

[12] M. N. Oğustöreli, *Time-lag control systems*, Mathematics in science and engineering, 24, Academic Press, New York and London (1966)

[13] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal processes*, L. W. Neustadt interscience publishers, John Wiley and sons inc., New York, 1962.