

Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Triennale in Matematica

TESI DI LAUREA

**MODELLI MATEMATICI DI DIFFUSIONE EPIDEMICA
DELLE INFORMAZIONI**

Relatore: Prof. Paolo Acquistapace

Candidato: Luca Macchi



*«Cominciate col fare ciò che è necessario,
poi ciò che vi è possibile.
E all'improvviso vi sorprenderete di saper fare l'impossibile»*

San Francesco d'Assisi

Indice

Introduzione	7
1 Preliminari	11
1.1 Notazioni e definizioni	11
1.2 Teorema di esistenza	12
1.3 Il principio del massimo di Pontryagin	20
2 Modello SIS	21
2.1 Introduzione e definizioni	21
2.2 Il problema di controllo ottimale nell'epidemia SIS	24
2.3 Esistenza della soluzione del problema	25
2.4 Calcolo della soluzione del problema	25
2.5 Unicità della soluzione del problema	27
3 Modello SIR	31
3.1 Introduzione e definizioni	31
3.2 Il problema di controllo ottimale nell'epidemia SIR	34
3.3 Calcolo della soluzione del problema	35
3.4 Unicità della soluzione del problema	36
4 Conclusioni	39
4.1 Confronto tra presenza e assenza di controllo	39
4.2 Possibili scelte della funzione $\beta(t)$	41
A Disuguaglianza di Gronwall	43

Introduzione

Il bisogno di comunicare è insito nella natura umana. Ogni individuo, sin dal concepimento, sente la necessità di esternare e comunicare pensieri, emozioni, stati d'animo, idee, talenti artistici o di altra natura. Molti sono i modi per farlo, scoperti o inventati dall'uomo nel corso della storia: la gestualità, la comunicazione verbale, la scrittura, la stampa, la radio, la telefonia, la televisione, internet fino ai moderni social network come Facebook e Twitter.

Con l'evolversi della potenza mediatica e tecnologica dei mezzi di comunicazione, è aumentata progressivamente la velocità di diffusione dell'informazione e, per diretta conseguenza, anche il numero di persone raggiungibili. Un articolo scientifico, che fino a trent'anni fa doveva, una volta stampato, viaggiare a lungo per giungere a destinatari distanti, oggi può essere inviato via e-mail in pochi minuti a parecchie persone, ed essere letto senza nemmeno bisogno della stampa, quindi anche con un contenimento di costo. In modo simile, anche le attività di leader politici, cantanti, attori famosi e guide religiose sono divenute, come si suol dire, "a portata di tweet": non solo è possibile seguirle in tempo reale, ma anche esprimere commenti e ritrasmettere ad altri un loro messaggio con un click.

Chiamiamo allora *epidemia d'informazione* la diffusione di un dato messaggio ad una certa popolazione. La nomenclatura vuole riferirsi alle similitudini con la ben più nota epidemia sanitaria: se le scienze biologiche studiano la malattia e il sistema esterno in modo che un virus raggiunga il minor numero di individui, nell'epidemia d'informazione l'obiettivo della "fonte" (la casa discografica, l'uomo politico, il cantante e via dicendo) è invece l'opposto, quello di "infettare", cioè trasmettere una notizia mediante un'azione di *contagio*, il maggior numero di individui possibile. Questa forma di contagio si attua, molto spesso, con un vero e proprio *bombardamento* informatico nella popolazione, proponendo pubblicità, slogan e simili in maniera anche ripetitiva (addirittura subliminale, in certi casi) nel tempo: maggiore sarà il bombardamento, maggiore sarà la probabilità di infettare il maggior numero di persone. Un esempio di questa tecnica (solo per citarne uno) lo si può trovare su Facebook. A fine maggio 2014, la Walt Disney Pictures ha distribuito in Italia il film fantasy "Maleficent", storia del classico "La bella addormentata nel bosco" riletta dall'antagonista del racconto, la strega Malefica, interpretata dalla famosa attrice americana Angelina Jolie. A luglio 2012 è stata aperta su Facebook la pagina ufficiale della versione italiana del film, accessibile liberamente da qualsiasi utente iscritto al social network. Man mano che trapelavano le prime foto del set, le prime locandine, i primi trailer, i primi

scoop, questi venivano pubblicati mediante linkaggio sulla pagina la quale, a fine marzo 2014, contava già 40.000 “seguaci”: in altre parole, almeno 40.000 persone erano state infettate dalla notizia dell’uscita del film, e continuavano a rimanere contagiate grazie al bombardamento appena descritto che, oltre a mantener vive l’attenzione e la curiosità degli infetti, aumentava il numero dei contagiati grazie alle condivisioni visualizzabili da utenti ancora “sani”. In Italia, a fine giugno 2014, ossia appena un mese dopo l’uscita nelle sale cinematografiche, “Maleficent” ha incassato oltre 10 milioni di euro, rivelandosi un vero e proprio successo per la Walt Disney Pictures.

Questa tesi si propone di presentare e studiare due modelli matematici capaci di descrivere qualitativamente come una certa informazione assegnata possa diffondersi tra il maggior numero di persone. Storicamente, il primo modello di tipo matematico epidemiologico fu formulato da Daniel Bernoulli nel 1760, nel tentativo di supportare la vaccinazione contro il vaiolo. L’uso di modelli deterministici e probabilistici nell’analisi dello sviluppo di malattie infettive si è grandemente diffuso a partire dal ventesimo secolo. Dopo i primi modelli discreti di Hamer e Ross (rispettivamente 1906 e 1911), negli anni venti Kermack e McKendrick proposero un modello di tipo differenziale (SIR) per spiegare la crescita e la decrescita del numero di persone infette in alcune epidemie come la peste che colpì Bombay nel 1906 e il colera che colpì Londra nel 1865. Dalla seconda metà del ventesimo secolo, il numero di modelli matematici in quest’ambito è aumentato esponenzialmente; oltre a quelli di tipo deterministico, ne sono stati proposti altri che tengono conto di effetti stocastici. In questa tesi faremo riferimento a due modelli che non tengono conto di tali effetti, il modello SIS (susceptible-infected-susceptible) e il modello SIR (susceptible-infected-recovered).

Il modello biologico SIS divide una popolazione costituita da N persone in due gruppi: nel primo sono compresi gli individui *suscettibili*, ossia i sani che possono contrarre la malattia; nel secondo sono compresi gli individui *infetti*, ossia quelli che, avendo già contratto il virus, possono diffonderla per contatto. Si suppone che la guarigione non produca alcun tipo di immunità, e per questo un infetto, una volta guarito, torna suscettibile:

$$S \longrightarrow I \longrightarrow S$$

Il modello biologico SIR, in aggiunta alla struttura precedente, inserisce la categoria dei *rimossi*, l’insieme degli individui che, una volta guariti, non tornano né infetti né suscettibili grazie all’acquisizione dell’immunità, e dunque sono rimossi dall’azione di studio:

$$S \longrightarrow I \longrightarrow R$$

Vedremo come questi due modelli, con i dovuti adattamenti esclusivamente di tipo lessicale, descrivono anche le epidemie di informazione. Per chiarire meglio la trattazione, facciamo alcune ipotesi preliminari.

IPOTESI SULLA POPOLAZIONE. Assumeremo sempre una popolazione omogenea, in cui gli individui sono in grado di comunicare e scambiarsi i messaggi l’un l’altro in modo proprio, dando così luogo al contagio. Il numero totale N sarà sempre supposto sempre “molto grande” in modo da escludere casi poco interessanti e

considerare $I(t), S(t), R(t)$ (rispettivamente il numero totale di individui infetti, suscettibili e rimossi), come funzioni continue e non discrete del tempo.

IPOTESI SULLA VARIABILE t . I modelli biologici SIS e SIR si distinguono a loro volta in due casi, epidemico ed endemico. Nel caso epidemico, si suppone che la malattia si propaghi in un periodo di tempo limitato $[0, T]$ (con $0 < T < \infty$), considerando trascurabile il numero di nascite e di decessi. Nel secondo, quello endemico, si analizzano malattie che si propagano per un periodo molto lungo, approssimabile matematicamente con $[0, \infty[$, e in cui si deve tener conto del numero di nascite e di decessi avvenuti (supposti tali da mantenere N costante). La nostra analisi dell'informazione si rifarà al modello epidemico, ossia $t \in [0, T]$, anzitutto perché modella situazioni reali, come ad esempio il periodo di campagna elettorale se la fonte è il candidato sindaco, o il periodo di prevendita di biglietti per il concerto di un cantante. Ovviamente, supporremo sempre che le funzioni $I(t), S(t), R(t)$ prendano a priori valori in $[0, \infty[$, restringendoci a $[0, T]$ per trarne le opportune conclusioni.

IPOTESI SUL VIRUS/INFORMAZIONE. Nei modelli biologici SIS e SIR si suppone trascurabile il tempo di incubazione della malattia: in altre parole, un individuo, non appena contrae il virus, diventa immediatamente infetto e immediatamente capace di trasmetterlo ad altri. Stessa ipotesi, ovviamente, si fa nel caso dell'informazione. Nei primi (supponendo che il virus non muti con le stagioni) si suppone costante nel tempo sia la velocità di infezione che la velocità di recupero. Ciò non sarà vero nel caso dell'informazione perché, ad esempio, l'intensità con cui un candidato sindaco propone il suo programma tende, almeno da un punto di vista statistico, ad aumentare con l'avvicinarsi delle elezioni. Dunque, almeno la velocità di diffusione dipenderà da t .

La diffusione dell'epidemia informatica, al pari di quella biologica, dipende da molti fattori: vediamo i più importanti, suddividendoli in tre categorie.

FATTORI QUANTIFICABILI. Sono fattori quantificabili il budget e le risorse economiche a disposizione del candidato all'inizio della campagna elettorale, le spese preventive relative al marketing, alla pubblicità (sui giornali, alla televisione, alla radio o su internet) e ai mezzi di spostamento. Siccome tali risorse sono sempre limitate, è impossibile che la fonte riesca ad arrivare esattamente a infettare tutta la popolazione. Per questo, e sarà lo scopo principale di questo lavoro, la fonte dovrà cercare di investire le sue risorse in maniera ottimale, in modo da avere il più alto numero di infetti con la minor spesa possibile. Matematicamente, significa impostare un problema di controllo teso ad ottimizzare un opportuno costo funzionale, soggetto ad opportune equazioni di stato.

FATTORI SEMI-QUANTIFICABILI. I fattori semi-quantificabili sono quelli che possono essere solo stimati sulla base di ricerche statistiche, come ad esempio il fattore *notorietà* relativo ad un attore, un cantante o un regista; il livello *generale* di cultura e di istruzione di una certa popolazione; la domanda relativa ad un certo prodotto o servizio che si intende mettere sul mercato.

FATTORI NON QUANTIFICABILI. Questi fattori sono tali perché riguardano la sfera personale e psicologica dell'individuo o della popolazione. Comprendono il cari-

sma, l'autorevolezza e le doti mediatiche del candidato politico, le doti interpretative del cantante o dell'attore, che, pur non essendo quantificabili numericamente, molto influiscono sulla diffusione delle informazioni che li riguardano.

Le soluzioni che andremo a ricercare e ad analizzare, prescriveranno una ripartizione ottimale delle risorse nell'intervallo temporale, e proprio il tempo sarà considerato come variabile utile a misurare il cambiamento del livello di interesse degli individui finchè non sia raggiunto il termine finale. In entrambi i casi, dimostreremo l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema in un intervallo sufficientemente piccolo di scadenza.

Capitolo 1

Preliminari

In questo primo capitolo richiameremo alcuni risultati di calcolo delle variazioni utili allo studio della nostra trattazione.

1.1 Notazioni e definizioni

Siano $n, m \geq 1$ due interi, $U \subset \mathbb{R}^m$ un sottoinsieme chiuso non necessariamente compatto e $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Supporremo $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ e $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ funzioni continue da un fissato intervallo $[t_0, t_1] \subseteq \mathbb{R}$ a valori, rispettivamente, in \mathbb{R}^n e U . In particolare, \mathbf{u} identificherà la funzione di controllo.

Definizione 1.1.1. Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione che verifica le seguenti proprietà:

- (1.A) \mathbf{f} è continua;
- (1.B) la mappa $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ è di classe C^1 ;
- (1.C) esiste una costante reale e positiva C_1 tale che $|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})| \leq C_1[1 + |\mathbf{x}| + |\mathbf{u}|]$
 $\forall t \in [t_0, t_1], \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{u} \in U$;
- (1.D) $|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}', \mathbf{u})| \leq C_2|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|(1 + |\mathbf{u}|), \forall t \in [t_0, t_1], \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{u} \in U$,
con C_2 costante reale e positiva.

Allora, fissato un controllo \mathbf{u} , diciamo che la soluzione $\mathbf{x}(t)$ dell'equazione differenziale

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \tag{1.1}$$

con condizione $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ fissata, è la *traiettoria* corrispondente al controllo \mathbf{u} .

Definizione 1.1.2. Sia $\mathcal{L} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che verifica le seguenti proprietà:

- (2.A) \mathcal{L} è continua;
- (2.B) la mappa $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \mapsto \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ è di classe C^1 ;
- (2.C) esiste $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ funzione non negativa, tale che $\mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq g(\mathbf{u}) \forall \mathbf{u} \in U$,
e $\lim_{|\mathbf{u}| \rightarrow \infty} \frac{g(\mathbf{u})}{|\mathbf{u}|} = +\infty$.

Una funzione \mathcal{L} con le suddette proprietà sarà l'*integrand* del funzionale costo che andremo a minimizzare.

Definizione 1.2.3. Siano $S \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto e $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 . Definiamo *funzione obiettivo* il funzionale

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \phi(\mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)) ds. \quad (1.2)$$

Definizione 1.2.4. Una coppia $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ si dice *ammissibile* se e solo se sono verificate le seguenti proprietà:

(i) $\mathbf{x} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ risolve il problema (1.1), ossia è una traiettoria:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)) ds, \quad t_0 \leq t \leq t_1; \quad (1.3)$$

(ii) $\mathbf{u} : [t_0, t_1] \rightarrow U$ è sommabile;

(iii) $\mathbf{x}(t_1) \in S$.

Denoteremo poi con \mathcal{F} l'insieme delle coppie (\mathbf{x}, \mathbf{u}) ammissibili.

1.2 Teorema di esistenza

Per poter dimostrare il risultato a noi utile più avanti, occorre dimostrare una serie di lemmi preliminari.

Lemma 1.2.1. Sia $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathcal{F}$. Allora vale la disuguaglianza

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(s)| \leq [1 + e^{C_1(t-s)}] \int_s^t [1 + |\mathbf{x}(\tau)| + |\mathbf{u}(\tau)|] d\tau, \quad \forall t_0 \leq s \leq t \leq t_1.$$

Dimostrazione. Sia $m(t) = |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(s)|$, $s \leq t \leq t_1$. Grazie all'ipotesi (1.C), e ricordando che $|\mathbf{x}(t)| \leq m(t) + |\mathbf{x}(s)|$, abbiamo

$$\begin{aligned} 0 \leq m(t) &= \left| \int_s^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau \right| \leq \int_s^t C_1 [1 + |\mathbf{x}(\tau)| + |\mathbf{u}(\tau)|] d\tau \\ &\leq C_1 \int_s^t m(\tau) d\tau + C_1 \int_s^t [1 + |\mathbf{x}(s)| + |\mathbf{u}(\tau)|] d\tau. \end{aligned}$$

Usando il lemma di Gronwall (v. appendice A), risulta

$$\begin{aligned} m(t) &\leq C_1 \int_s^t [1 + |\mathbf{x}(s)| + |\mathbf{u}(\tau)|] d\tau + \int_s^t C_1 e^{C_1(t-\tau)} \left[\int_s^\tau [1 + |\mathbf{x}(s)| + |\mathbf{u}(\sigma)|] d\sigma \right] d\tau \\ &\leq [1 + e^{C_1(t-s)}] \int_s^t [1 + |\mathbf{x}(s)| + |\mathbf{u}(\tau)|] d\tau. \end{aligned}$$

□

Lemma 1.2.2. Siano t ed \mathbf{x} fissati, e definiamo

$$F(t, \mathbf{x}) := \{(\mathbf{z}, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists \mathbf{u} \in U : \mathbf{z} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), z_{n+1} \geq \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\}.$$

Allora $F(t, \mathbf{x})$ è chiuso.

Dimostrazione. Sia $\{\tilde{\mathbf{z}}_j\} \subseteq F(t, \mathbf{x})$ una successione tale che $\tilde{\mathbf{z}}_j \rightarrow \tilde{\mathbf{z}}$ in \mathbb{R}^{n+1} per $j \rightarrow \infty$, dove

$$\tilde{\mathbf{z}}_j = (\mathbf{z}_j, z_{n+1,j}), \quad \tilde{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}, z_{n+1}).$$

Per ogni j esiste $\mathbf{u}_j \in U$ tale che $\mathbf{z}_j = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_j)$ e $z_{n+1} \geq \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_j)$. Poiché $0 \leq g(\mathbf{u}_j) \leq \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_j) \leq z_{n+1,j}$, la limitatezza di $\{\tilde{\mathbf{z}}_j\}$ implica la limitatezza di $\{g(\mathbf{u}_j)\}$. Inoltre, anche $\{\mathbf{u}_j\}$ è limitata: infatti, se $\{\mathbf{u}_j\}$ contenesse per assurdo una sottosuccessione $\{\mathbf{u}_{j_k}\}$ tale che $|\mathbf{u}_{j_k}| \rightarrow \infty$ avremmo anche, per l'ipotesi (2.C),

$$g(\mathbf{u}_{j_k}) \geq \frac{g(\mathbf{u}_{j_k})}{|\mathbf{u}_{j_k}|} \rightarrow \infty,$$

che è impossibile, essendo $\{g(\mathbf{u}_j)\}$ limitata. Per cui esiste una sottosuccessione $\{\mathbf{u}_{j_h}\} \subseteq \{\mathbf{u}_j\}$ tale che $\mathbf{u}_{j_h} \rightarrow \mathbf{u} \in U$ perchè U è chiuso. Siccome \mathbf{f} ed \mathcal{L} sono continue, abbiamo anche $\mathbf{z} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ e $z_{n+1} \geq \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, ossia $\tilde{\mathbf{z}} \in F(t, \mathbf{x})$ che dunque è chiuso. □

Lemma 1.2.3. Sia $\mathbf{u} : [t_0, t_1] \rightarrow U$ sommabile. Per ogni $\sigma > 0$ e $\eta > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $A \subset [t_0, t_1]$ ha misura $m(A) < \delta$, allora

$$\int_{t_0}^{t_1} g(\mathbf{u}(t)) dt < \sigma \implies \int_A |\mathbf{u}(t)| dt < \eta.$$

Dimostrazione. Poiché $\frac{g(\mathbf{u})}{|\mathbf{u}|} \rightarrow \infty$ per $|\mathbf{u}| \rightarrow \infty$, per ogni $B > 0$ esiste $\vartheta_B > 0$ tale che $|\mathbf{u}| \leq \vartheta_B g(\mathbf{u})$ per $|\mathbf{u}| > B$ e $\mathbf{u} \in U$. Inoltre, $\vartheta_B \searrow 0$ per $B \nearrow \infty$. Scegliamo allora $B > 0$ tale che $\vartheta_B \sigma < \eta/2$, e sia $\delta > 0$ tale che $B\delta < \eta/2$. Dunque, se $A \subset [t_0, t_1]$ e $m(A) < \delta$, posto $A_1 := \{t \in A \mid |\mathbf{u}(t)| \leq B\}$ si ha

$$\begin{aligned} \int_A |\mathbf{u}(t)| dt &= \int_{A_1} |\mathbf{u}(t)| dt + \int_{A/A_1} |\mathbf{u}(t)| dt \leq Bm(A_1) + \vartheta_B \int_{A/A_1} g(\mathbf{u}(t)) dt \\ &\leq Bm(A) + \vartheta_B \int_{t_0}^{t_1} g(\mathbf{u}(t)) dt \leq B\delta + \vartheta_B \sigma < \eta. \end{aligned}$$

□

Lemma 1.2.4. Esiste una successione $(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r) \subset \mathcal{F}$ tale che $J(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r) \rightarrow \inf_{\mathcal{F}} J$, e $\mathbf{x}_r \rightarrow \mathbf{x}^*$ uniformemente in $[t_0, t_1]$ per $r \rightarrow \infty$. Inoltre, \mathbf{x}^* è assolutamente continua in $[t_0, t_1]$.

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j\} \subset \mathcal{F}$ un'arbitraria successione minimizzante, ossia tale che $J(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j) \rightarrow \inf_{\mathcal{F}} J$; in particolare esiste $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che

$$\gamma \geq J(\mathbf{x}_j, \mathbf{u}_j) = \phi(\mathbf{x}_j(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(s, \mathbf{x}_j(s), \mathbf{u}_j(s)) ds \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Poiché $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e S è compatto, esiste $N \geq 0$ tale che $|\phi| \leq N$ su S . Perciò

$$\gamma \geq -N + \int_{t_0}^{t_1} g(\mathbf{u}_j(s))ds \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} g(\mathbf{u}_j(s))ds \leq \gamma + N.$$

Adesso dobbiamo mostrare che le $\{\mathbf{x}_j\}$ sono equi-assolutamente continue ed equilimitate. Siccome S è compatto, $|\mathbf{x}_j(t_0)| \leq B$ per ogni j . Inoltre, essendo

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{u}_j(s)ds &= \int_{\{\mathbf{u}_j \leq B\}} \mathbf{u}_j(s)ds + \int_{[t_0, t_1]/\{\mathbf{u}_j \leq B\}} \mathbf{u}_j(s)ds \\ &\leq B(t_1 - t_0) + \vartheta_B \int_{t_0}^{t_1} g(\mathbf{u}_j(s))ds \leq B(t_1 - t_0) + \vartheta_B(N + \gamma) \end{aligned}$$

(ove ϑ_B è tale che $|\mathbf{u}| \leq \vartheta_B g(\mathbf{u})$ per $|\mathbf{u}| > B$), otteniamo dal lemma 1.2.1

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_j(t)| &\leq |\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_j(t_0)| + |\mathbf{x}_j(t_0)| \\ &\leq [1 + e^{C_1(t_1-t_0)}] \int_t^{t_1} [1 + |\mathbf{x}_j(t_0)| + |\mathbf{u}_j(s)|]ds + B \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Poniamo adesso $k = C_1 e^{C_1(t_1-t_0)}$. Fissato $\varepsilon > 0$, e scelti $\eta := \frac{\varepsilon}{2(1+k)}$, $\sigma := N + \gamma$, esiste $\delta \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2(1+k)(1+B)}\right)$ tale che (per il lemma 1.2.3)

$$A = \bigsqcup_{h=1}^p [s_h, t_h], \quad m(A) < \delta \implies \int_A |\mathbf{u}_j(t)|dt < \eta \quad \forall j.$$

Perciò abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^p |\mathbf{x}_j(t_h) - \mathbf{x}_j(s_h)| &\leq \sum_{h=1}^p [1 + C_1 e^{C_1(t_h-s_h)}] \int_{s_h}^{t_h} [1 + |\mathbf{x}_j(t_0)| + |\mathbf{u}_j(s)|]ds \\ &\leq \sum_{h=1}^p \left[(1+k)(1+B)(t_h - s_h) + \int_{s_h}^{t_h} |\mathbf{u}_j(s)|ds \right] \\ &\leq (1+k)(1+B)\delta + (1+k)\eta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Abbiamo con ciò dimostrato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\sum_{h=1}^p |t_h - s_h| < \delta \implies \sum_{h=1}^p |\mathbf{x}_j(t_h) - \mathbf{x}_j(s_h)| < \varepsilon \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

In altre parole sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelà, e dunque esiste una sottosuccessione $\{\mathbf{x}_{j_r}\} \subseteq \{\mathbf{x}_j\}$ tale che $\mathbf{x}_{j_r} \rightarrow \mathbf{x}^*$ uniformemente in $[t_0, t_1]$; inoltre

$$\sum_{h=1}^p |t_h - s_h| < \delta \implies \sum_{h=1}^p |\mathbf{x}^*(t_h) - \mathbf{x}^*(s_h)| \leq \varepsilon,$$

quindi \mathbf{x}^* è assolutamente continua.

□

Lemma 1.2.5. Supponiamo che l'insieme $F(t, \mathbf{x})$ sia convesso per ogni $(t, \mathbf{x}) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$. Per $\eta > 0$ poniamo

$$F_\eta(t, \mathbf{x}) := \bigcup_{|s-t|+|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|<\eta} F(s, \mathbf{x}') \quad (1.4)$$

$$C_\eta(t, \mathbf{x}) := \text{co}(F_\eta(t, \mathbf{x})) \quad (1.5)$$

ove $\text{co}(F_\eta(t, \mathbf{x}))$ è l'involuppo convesso di $F_\eta(t, \mathbf{x})$. Allora

$$F(t, \mathbf{x}) = \bigcap_{\eta>0} \overline{C_\eta(t, \mathbf{x})}.$$

Dimostrazione.

(\subseteq). Questa inclusione è ovvia, perché $F(t, \mathbf{x}) \subset \bigcap_{\eta>0} F_\eta(t, \mathbf{x}) \subset \bigcap_{\eta>0} \overline{C_\eta(t, \mathbf{x})}$.

(\supseteq). Sia $\tilde{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}, z_{n+1}) \in \bigcap_{\eta>0} \overline{C_\eta(t, \mathbf{x})}$. Scelto $\eta = 1/j$ per $j \in \mathbb{N}^*$, esiste $\tilde{\mathbf{z}}_j \in C_{1/j}(t, \mathbf{x})$ tale che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{z}}_j = \tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (1.6)$$

Siccome $\tilde{\mathbf{z}}_j \in C_{1/j}(t, \mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, esiste una combinazione convessa di al più $n+2$ punti di $F_{1/j}(t, \mathbf{x})$ tale che

$$\tilde{\mathbf{z}}_j = \sum_{h=0}^{n+1} \lambda_{jh} \tilde{\mathbf{z}}_{jh}$$

con le proprietà

$$\lambda_{jh} \geq 0, \quad \sum_{h=0}^{n+1} \lambda_{jh} = 1, \quad \tilde{\mathbf{z}}_{jh} \in F_{1/j}(t, \mathbf{x}),$$

quindi esistono $\mathbf{u}_{jh} \in U$, $s_{jh} \in [t_0, t_1]$, $\mathbf{x}_{jh} \in \mathbb{R}^n$ con $|s_{jh} - t| + |\mathbf{x}_{jh} - \mathbf{x}| < 1/j$ tali che

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{jh} &= \mathbf{f}(s_{jh}, \mathbf{x}_{jh}, \mathbf{u}_{jh}), \\ \tilde{z}_{jh, n+1} &\geq \mathcal{L}(s_{jh}, \mathbf{x}_{jh}, \mathbf{u}_{jh}). \end{aligned}$$

Esiste allora una sottosuccessione $\{j_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, che per brevità non esplicitiamo, tale che per $h = 0, 1, \dots, n+1$

$$\mathbf{u}_{j_m h} \rightarrow \mathbf{u}_h \text{ in } \mathbb{R}^m \text{ oppure } |\mathbf{u}_{j_m h}| \rightarrow +\infty; \quad (1.7)$$

$$\lambda_{j_m h} \rightarrow \lambda_h \in [0, 1] \text{ con } \lambda_h \geq 0 \text{ e } \sum_{h=0}^{n+1} \lambda_h = 1. \quad (1.8)$$

Nella (1.7) possiamo altresì supporre che $\mathbf{u}_{j_m h} \rightarrow \mathbf{u}_h$ in \mathbb{R}^m per $h = 0, 1, \dots, \ell$ e $|\mathbf{u}_{j_m h}|_{\mathbb{R}^m} \rightarrow +\infty$ per $h = \ell + 1, \dots, n+1$. Proviamo adesso che il nostro $\tilde{\mathbf{z}}$ verifica

$$\mathbf{z} = \sum_{h=0}^{\ell} \lambda_h \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_h), \quad z_{n+1} \geq \sum_{h=0}^{\ell} \lambda_h \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_h). \quad (1.9)$$

Ora,

$$z_{j,n+1} = \sum_{h=0}^{n+1} \lambda_{jh} z_{jh,n+1} \geq \sum_{h=0}^{n+1} \lambda_{jh} \mathcal{L}(s_{jh}, \mathbf{x}_{jh}, \mathbf{u}_{jh}) \geq \sum_{h=0}^{n+1} \lambda_{jh} g(\mathbf{u}_{jh}). \quad (1.10)$$

Siccome $z_{n+1,j} \rightarrow z_{n+1}$ in \mathbb{R} , la somma all'ultimo membro è limitata. Ma poiché per $h > \ell$ si ha $\lambda_{jh} \rightarrow \lambda_h$, e $g(\mathbf{u}_{jh}) \rightarrow \infty$, necessariamente $\lambda_h = 0$ per $h = \ell + 1, \dots, n + 1$. D'altronde per tali h si ha anche

$$g(\mathbf{u}_{jh}) > 0 \quad \forall j \geq J_0$$

con J_0 opportuno, e dunque

$$z_{j,n+1} \geq \sum_{h=0}^{n+1} \lambda_{jh} g(\mathbf{u}_{jh}) \geq \sum_{h=0}^{\ell} \lambda_{jh} g(\mathbf{u}_{jh}).$$

Passando al limite per $j \rightarrow \infty$ e ricordando la (1.10) si ha $z_{n+1} \geq \sum_{h=0}^{\ell} \lambda_h \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_h)$, che è la seconda di (1.9). Poi, in \mathbb{R}^n ,

$$\mathbf{z}_j = \sum_{h=0}^{n+1} \lambda_{jh} \mathbf{f}(s_{jh}, \mathbf{x}_{jh}, \mathbf{u}_{jh}) \rightarrow \mathbf{z},$$

e se $h > \ell$ si ha, per $j \geq J_0$, $g(\mathbf{u}_{jh}) > 0$; quindi

$$0 \leq \frac{|\mathbf{f}(s_{jh}, \mathbf{x}_{jh}, \mathbf{u}_{jh})|}{\mathcal{L}(s_{jh}, \mathbf{x}_{jh}, \mathbf{u}_{jh})} \leq C_1 \frac{1 + |\mathbf{x}_{jh}| + |\mathbf{u}_{jh}|}{g(\mathbf{u}_{jh})} \rightarrow 0, \quad \ell + 1 \leq h \leq n + 1.$$

Essendo $\lambda_{jh} g(\mathbf{u}_{jh}) \leq C$ per un'opportuna costante C , per $h = \ell + 1, \dots, n + 1$ e $j \in \mathbb{N}$ si ha, per $j \geq J_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{h=\ell+1}^{n+1} \lambda_{jh} \mathbf{f}(s_{jh}, \mathbf{x}_{jh}, \mathbf{u}_{jh}) \right| &\leq \sum_{h=\ell+1}^{n+1} \lambda_{jh} \frac{|\mathbf{f}(s_{jh}, \mathbf{x}_{jh}, \mathbf{u}_{jh})|}{\mathcal{L}(s_{jh}, \mathbf{x}_{jh}, \mathbf{u}_{jh})} \mathcal{L}(s_{jh}, \mathbf{x}_{jh}, \mathbf{u}_{jh}) \\ &\leq \varepsilon \sum_{h=\ell+1}^{n+1} \lambda_{jh} z_{jh,n+1} \leq \varepsilon \sum_{h=0}^{n+1} \lambda_{jh} z_{jh,n+1} \\ &= \varepsilon z_{j,n+1} \leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

Dunque

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \sum_{h=\ell+1}^{n+1} \lambda_{jh} \mathbf{f}(s_{jh}, \mathbf{x}_{jh}, \mathbf{u}_{jh}) \right| = 0,$$

e pertanto

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{z}_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{h=0}^{n+1} \lambda_{jh} \mathbf{f}(s_{jh}, \mathbf{x}_{jh}, \mathbf{u}_{jh}) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{h=0}^{\ell} \lambda_{jh} \mathbf{f}(s_{jh}, \mathbf{x}_{jh}, \mathbf{u}_{jh}) = \sum_{h=0}^{\ell} \lambda_h \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_h), \end{aligned}$$

che è la prima di (1.9). Per terminare la dimostrazione, scegliamo degli scalari $v_0, v_1, \dots, v_\ell \geq 0$ tali che

$$\sum_{h=0}^{\ell} \lambda_h v_h = z_{n+1} - \sum_{h=0}^{\ell} \lambda_h \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_h) \Rightarrow z_{n+1} = \sum_{h=0}^{\ell} [\mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_h) + \lambda_h v_h].$$

Abbiamo quindi che $\tilde{\mathbf{z}}_h := (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_h), \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_h) + v_h) \in F(t, \mathbf{x})$ ed essendo per ipotesi $F(t, \mathbf{x})$ convesso, concludiamo finalmente che

$$\tilde{\mathbf{z}} = \sum_{h=0}^{\ell} \lambda_h \tilde{\mathbf{z}}_h \in \text{co}F(t, \mathbf{x}).$$

□

Lemma 1.2.6. Sia $\{(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r)\}$ la successione minimizzante del lemma 1.2.4, e poniamo

$$Z_r(t) := \int_{t_0}^t \mathcal{L}(s, \mathbf{x}_r(s), \mathbf{u}_r(s)) ds \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Allora esiste una funzione $Z^* : [t_0, t_1] \rightarrow [0, \infty[$, crescente, tale che, passando a sottosuccessione,

$$Z_r(t) \rightarrow Z^*(t) \quad \text{q.o. in } [t_0, t_1].$$

Dimostrazione. Per il lemma 1.2.4 sappiamo che $|\mathbf{x}_r(t)| \leq B$ per ogni $t \in [t_0, t_1]$ e per ogni $r \in \mathbb{N}$. Inoltre, essendo S compatto e ϕ continua su S , si ha che $|\phi| \leq N$ su S . Siccome $(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r)$ è minimizzante, abbiamo anche che $J(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r) \leq \gamma \forall r \in \mathbb{N}$. Perciò

$$\begin{aligned} 0 \leq Z_r(t) &= \int_{t_0}^t \mathcal{L}(s, \mathbf{x}_r(s), \mathbf{u}_r(s)) ds = J(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r) - \phi(\mathbf{x}_r(t_0), \mathbf{x}_r(t_1)) \\ &\leq \gamma + N \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad \forall r \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Proviamo che esiste una sottosuccessione $\{Z_{r_k}\} \subseteq \{Z_r\}$ tale che $Z_{r_k}(t) \rightarrow Z^*(t)$ q.o. in $[t_0, t_1]$. Sia $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione densa in $[t_0, t_1]$. Per il teorema di Bolzano Weierstrass e per diagonalizzazione esiste $\{Z_{r_k}\} \subseteq \{Z_r\}$ tale che

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} Z_{r_k}(a_j) := Z^*(a_j) \quad \forall j.$$

Adesso estendiamo Z^* a tutto $[t_0, t_1[$ ponendo

$$Z^*(x) = \liminf_{a_j \searrow x} Z^*(a_j) \quad \forall x \in [t_0, t_1[/ \{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}.$$

Allora Z^* risulta crescente in $[t_0, t_1[$. Definendo poi $Z^*(t_1) := \lim_{t \nearrow t_1} Z^*(t)$, abbiamo subito che $0 \leq Z^* \leq \gamma + N$ in $[t_0, t_1]$. Essendo crescente, Z^* ha al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità. Se $t \in]t_0, t_1[$ è un punto di continuità di Z^* , fissato $\varepsilon > 0$ esistono a_i, a_j tali che $a_i < t < a_j$ e $Z^*(a_j) - Z^*(a_i) < \varepsilon$. Dato che $Z_{r_k}(a_i) \leq Z_{r_k}(t) \leq Z_{r_k}(a_j)$, per $k \rightarrow \infty$ si ottiene

$$\varepsilon > Z^*(a_j) - Z^*(a_i) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} Z_{r_k}(t) - \liminf_{k \rightarrow \infty} Z_{r_k}(t),$$

e quindi che esiste il

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Z_{r_k}(t) \in [Z^*(a_i) - Z^*(a_j)].$$

Siccome a_i e a_j sono arbitrarie, otteniamo $\lim_{k \rightarrow \infty} Z_{r_k}(t) = Z^*(t)$ che è la nostra tesi.

□

Lemma 1.2.7. Supponiamo $F(t, \mathbf{x})$ convesso per ogni $t \in [t_0, t_1]$ e per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Allora, posto $\tilde{\mathbf{x}}_r(t) = (\mathbf{x}_r(t), Z_r(t))$ e $\tilde{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{x}^*(t), Z^*(t))$, dove $(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r)$ è la successione minimizzante del lemma 1.2.4, e Z_r, Z^* sono definite nel lemma 1.2.6, si ha che $(\tilde{\mathbf{x}}^*)'(t) \in F(t, \mathbf{x}^*(t))$ per ogni $t \in [t_0, t_1]$ in cui $(\tilde{\mathbf{x}}^*)'(t)$ esiste, cioè q.o. in $[t_0, t_1]$.

Dimostrazione. Sia $\eta > 0$. Osservato che

$$\tilde{\mathbf{z}}_r(s) = (\mathbf{f}(s, \mathbf{x}_r(s), \mathbf{u}_r(s)), \mathcal{L}(s, \mathbf{x}_r(s), \mathbf{u}_r(s)))$$

è un punto di $F(s, \mathbf{x}_r(s))$, esistono δ_η e r_η tali che (ricordando che $\mathbf{x}_r(s) \rightarrow \mathbf{x}^*(s)$ uniformemente), $\tilde{\mathbf{z}}_r(s) \in F_\eta(t, \mathbf{x}^*(t))$ per $|s - t| < \delta_\eta$ e $r \geq r_\eta$ opportuno ($F_\eta(t, \mathbf{x})$ è definito come nel lemma 1.2.5). Dunque, siccome la media integrale è limite di combinazioni convesse,

$$\frac{\tilde{\mathbf{x}}_r(t+h) - \tilde{\mathbf{x}}_r(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \tilde{\mathbf{z}}_r(s) ds \in \overline{C_\eta(t, \mathbf{x}^*(t))} \quad \forall r \geq r_\eta, |h| < \delta_\eta.$$

Passando al limite per $r \rightarrow \infty$,

$$\frac{\tilde{\mathbf{x}}(t+h) - \tilde{\mathbf{x}}(t)}{h} \in \overline{C_\eta(t, \mathbf{x}^*(t))} \quad \forall \eta > 0, |h| < \delta_\eta,$$

e per $h \rightarrow 0$ abbiamo $(\mathbf{x})'(t) \in \overline{C_\eta(t, \mathbf{x}^*(t))}$ per ogni $\eta > 0$, ovvero $(\mathbf{x}^*)'(t) \in F(t, \mathbf{x}^*(t))$.

□

Citiamo adesso tre risultati senza dimostrazione, sia per il loro carattere abbastanza generale, sia per amor di brevità.

Lemma 1.2.8. (Teorema di Lebesgue) Sia f una funzione crescente in $[a, b]$. Allora

- (i) f è derivabile q.o.;
- (ii) f è misurabile e non negativa;
- (iii) $\int_a^b f'(t) dt \leq f(b) - f(a)$.

Lemma 1.2.9. Ogni funzione $f \in AC([a, b])$ è derivabile q.o. con f' sommabile in $[a, b]$; inoltre

$$f(t) - f(s) = \int_s^t f'(r) dr \quad \forall s, t \in [a, b].$$

Lemma 1.2.10. (di selezione) Sia $D \subset \mathbb{R}^{p+m}$ un insieme σ -compatto (ossia $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ ove i D_n sono tutti compatti). Poniamo, per $z \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} D^z &= \{u \in \mathbb{R}^m : (z, u) \in D\}; \\ \Delta &= \{z \in \mathbb{R}^p : D^z \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Allora esiste $u : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$ misurabile, tale che $(z, u(z)) \in D$ q.o. $z \in \Delta$.

Lemma 1.2.11. Supponiamo $F(t, \mathbf{x})$ convesso per ogni $t \in [t_0, t_1]$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Siano (\mathbf{x}^*, Z^*) come nei lemmi 1.2.4 e 1.2.6. Allora esistono $\mathbf{u}^* : [t_0, t_1] \rightarrow U$ sommabile e $v^* : [t_0, t_1] \rightarrow [0, \infty[$ misurabile tali che, per q.o. $t \in [t_0, t_1]$, si ha

$$(\mathbf{x}^*)'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \quad \text{e} \quad (Z^*)'(t) = \mathcal{L}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) + v^*(t).$$

Dimostrazione. Sia $\tilde{U} = U \times [0, \infty[$ e per ogni $\tilde{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}, v) \in \tilde{U}$ poniamo

$$\tilde{\mathbf{f}}(t, \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}) = (\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + v).$$

(Si noti che $F(t, \mathbf{x})$ è l'immagine di \tilde{U} mediante l'applicazione $\tilde{\mathbf{f}}(t, \mathbf{x}, \cdot)$). Applicando il lemma 1.2.10 di selezione all'insieme

$$D = \left\{ (t, \tilde{\mathbf{u}}) \in [t_0, t_1] \times \tilde{U} \mid t \in \Delta, (\tilde{\mathbf{x}}^*)'(t) = \tilde{\mathbf{f}}(t, \mathbf{x}^*(t), \tilde{\mathbf{u}}) \right\},$$

ove $\Delta = \{t \in [t_0, t_1] \mid D^t := \{\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{U} : (t, \tilde{\mathbf{u}}) \in D\} \neq \emptyset\}$. Osserviamo che $(\tilde{\mathbf{x}}^*)'$ è continua in Δ , e che $[t_0, t_1]/\Delta$ ha misura nulla per il lemma 1.2.9 applicato a $\tilde{\mathbf{x}}^*$, che è assolutamente continua. Il lemma stesso afferma che esiste $\tilde{\mathbf{u}}^* : [t_0, t_1] \rightarrow \tilde{U}$ misurabile, tale che $(t, \tilde{\mathbf{u}}^*(t)) \in D$ q.o. in $[t_0, t_1]$ cioè, esiste (\mathbf{u}^*, v^*) per cui

$$\begin{cases} (\mathbf{x}^*)'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) \\ (Z^*)'(t) = \mathcal{L}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) + v^*(t) \end{cases} \quad \text{q.o. in } [t_0, t_1].$$

Inoltre, essendo Z^* crescente, valgono le disuguaglianze

$$Z^*(t_1) \geq \int_{t_0}^{t_1} (Z^*)'(t) dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) dt \geq \int_{t_0}^{t_1} g(\mathbf{u}^*(t)) dt,$$

quindi $g(\mathbf{u}^*)$ è sommabile in $[t_0, t_1]$. Ne segue che anche \mathbf{u}^* è sommabile, perché, usando le notazioni del lemma 1.2.3, posto $A_1 := \{t \in [t_0, t_1] : |\mathbf{u}^*(t)| \leq B\}$, risulta

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} |\mathbf{u}^*(t)| dt &= \int_{A_1} |\mathbf{u}^*(t)| dt + \int_{[t_0, t_1]/A_1} |\mathbf{u}^*(t)| dt \\ &\leq B(t_1 - t_0) + \vartheta_B \int_{t_0}^{t_1} g(\mathbf{u}^*(t)) dt < +\infty. \end{aligned}$$

Che è quanto si voleva provare. □

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per enunciare il seguente teorema, dimostrato da Cesari nel 1965.

Teorema 1.2.1. (di esistenza del minimo). Supponiamo che su \mathbf{f} , \mathcal{L} e ϕ valgano le ipotesi introdotte nel paragrafo 1.1, e supponiamo anche $F(t, \mathbf{x})$ convesso per ogni $(t, \mathbf{x}) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$. Allora esiste $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in \mathcal{F}$ tale che

$$J(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) = \inf_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathcal{F}} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (1.11)$$

Dimostrazione. Sia $\mu = \inf_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathcal{F}} J(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Poiché $\{\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r\} \subseteq S$ se $\{\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r\}$ è la successione minimizzante del lemma 1.2.4, si verifica immediatamente che il suo limite $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in \mathcal{F}$, per cui $\mu \leq J(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$. D'altra parte, siccome $\phi(\mathbf{x}_r(t_1)) \rightarrow \phi(\mathbf{x}^*(t_1))$ e $J(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r) \rightarrow \mu$, per differenza esiste $\lim_{r \rightarrow \infty} Z_r(t_1)$; quindi, per definizione,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} Z_r(t_1) = Z^*(t_1) \quad \text{e} \quad Z^*(t_1) \geq \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)) dt. \quad \text{Dunque abbiamo che}$$

$$\mu = \lim_{r \rightarrow \infty} J(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r) = Z^*(t_1) + \phi(\mathbf{x}^*(t_1)) \geq J(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*),$$

da cui la tesi.

□

Definizione 1.2.5. La coppia $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in \mathcal{F}$ che verifica la (1.11) è chiamata *coppia ottimale*. Inoltre, diciamo che \mathbf{u}^* è il *controllo ottimo*, mentre \mathbf{x}^* è la *traiettoria ottima* corrispondente a tale controllo.

1.3 Il principio del massimo di Pontryagin

Consideriamo ancora la funzione obiettivo (1.2) e il problema

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (1.12)$$

con le stesse notazioni dei paragrafi precedenti. Vogliamo fornire una condizione necessaria per l'esistenza della coppia ottimale $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$. Siano $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e $\lambda = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione che in seguito avrà il ruolo di moltiplicatore (o variabile di co-stato).

Definizione 1.3.1. Nelle stesse ipotesi delle definizioni 1.1.1 e 1.1.2, la funzione $\mathcal{H} : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda_0, \lambda) := \lambda_0 \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) f_j(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (1.13)$$

è detta funzione Hamiltoniana, in cui si intende $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$.

Teorema 1.3.1. (Principio del massimo di Pontryagin) Si consideri il problema di ottimo (1.12) con \mathcal{L}, \mathbf{f} di classe C^1 e $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Sia \mathbf{u}^* un controllo ottimo e \mathbf{x}^* la traiettoria ottima relativa. Allora esiste un moltiplicatore (λ_0^*, λ^*) con λ_0^* costante e $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua tale che per ogni $\tau \in [t_0, t_1]$

- i) $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_j}(\tau, \mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{u}^*(\tau), \lambda^*(\tau)) = 0$, per $j = 1, \dots, m$;
- ii) λ_i^* verifica, per ogni $1 \leq i \leq n$, il problema

$$\begin{cases} (\lambda_i^*)'(\tau) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}(\tau, \mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{u}^*(\tau), \lambda^*(\tau)) \\ \lambda_i^*(t_1) = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t_1)) \end{cases}$$

con $\lambda_0^* = 1$.

Dimostrazione. La dimostrazione generale di questo teorema è assai lunga e laboriosa, e la omettiamo. Si tratta comunque di una generalizzazione ad opportuni spazi di Hilbert di quella dell'usuale metodo dei moltiplicatori di Lagrange in \mathbb{R}^n .

□

Capitolo 2

Modello SIS

2.1 Introduzione e definizioni

Il primo modello che presentiamo è il modello epidemico SIS (susceptibile-infetto-susceptibile). Consideriamo una popolazione costituita da un numero $N \gg 0$ di persone (o nodi) in un intervallo di tempo fissato $[0, T]$, con $T > 0$ reale. Esattamente come nel caso biologico, dividiamo i nodi in due gruppi: i *suscettibili* (quelli che non hanno ancora ricevuto il messaggio), e gli *infetti* (quelli che hanno già ricevuto il messaggio e che, mossi da qualche interesse, possono a loro volta diffonderlo ad altri). Un nodo suscettibile diventa infetto se, interagendo con un nodo infetto, è contagiato dall'epidemia, ossia viene a conoscenza del messaggio. Assumiamo poi - come si verifica nella realtà - che un nodo già infetto possa essere comunque suscettibile, ossia capace di ricevere, nello stesso intervallo temporale, altre informazioni senza dimenticarsi dell'infezione precedente. Vale la pena osservare che, a differenza del caso biologico in cui la trasmissione può avvenire quasi esclusivamente per contatto o per via aerea, la trasmissione dell'informazione può avvenire in molti modi: a voce, con il ben più classico passaparola, via chat o via mail, mediante la pubblicità televisiva, radiofonica o su carta stampata, tramite internet e così via.

Siano $S(t)$ e $I(t)$, rispettivamente, le funzioni che nel caso biologico rappresentano il numero di nodi suscettibili e il numero di nodi già infetti ad un certo tempo t all'interno della popolazione. Se definiamo $s(t) \equiv S(t)/N$ e $i(t) \equiv I(t)/N$, per quanto ipotizzato abbiamo subito che

$$s(t) + i(t) = \frac{S(t)}{N} + \frac{I(t)}{N} = \frac{S(t) + I(t)}{N} = \frac{N}{N} = 1. \quad (2.1)$$

Tipicamente alla base dei modelli biologici c'è l'idea di voler stabilire il tasso con cui i suscettibili diventano infetti, basato sul rapporto

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda SI$$

dove λ rappresenta il fattore di contagio (o tasso di infettività). Questa legge è stata stimata sulla base delle seguenti ipotesi. Sia P la probabilità con cui un infetto, situato in un intorno di un individuo suscettibile alla malattia, lo contagi. Ne segue che $1 - P$ indica la probabilità che questo non avvenga. Supponiamo $P = \lambda \Delta t$ (dove Δt esprime l'intervallo di tempo con cui l'infetto resta nella cerchia

del suscettibile). Estendiamo il concetto al caso in cui I individui infetti entrano in contatto con un individuo suscettibile: la probabilità che il contagio non avvenga è data da $(1 - P)^I$, se le infezioni vengono trattate come eventi indipendenti l'uno dall'altro. Ricordando lo sviluppo $f(\xi) = (1 - \xi)^\alpha = f(0) + f'(0)\xi + o(\xi) = 1 - \alpha\xi + o(\xi)$, la probabilità che un infetto sul totale degli I contagi un suscettibile è data da

$$1 - (1 - P)^I \simeq IP = \lambda I \Delta t.$$

Quest'ultimo risultato può anche essere riscritto come

$$I(t + \Delta t) - I(t) = \lambda I \Delta t,$$

relazione che vale quando il contatto avviene con un solo suscettibile. Se invece si considerano S suscettibili si ha ovviamente

$$I(t + \Delta t) - I(t) = \lambda IS \Delta t,$$

da cui, passando al continuo,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t} = \frac{dI}{dt} = \lambda SI,$$

che rappresenta il tasso con cui I nodi infetti contagiano S nodi suscettibili in assenza della possibilità di guarigione (cioè quando gli infetti non possono tornare suscettibili). Da questa trattazione biologica, possiamo ricavarne il parallelo per l'informazione, ove la velocità di diffusione dell'informazione ad un certo istante t verrà indicata con $\beta'(t)$, che supporremo sempre essere (per ovvi motivi) una quantità limitata. Considerazioni pratiche ci obbligano ad imporre alcune restrizioni su $\beta'(t)$: in un intervallo infinitesimo di tempo dt , un singolo nodo suscettibile che entra in contatto con un singolo nodo infetto, cambia il suo stato da suscettibile a infetto con una probabilità $\beta'(t)dt$. Assumendo che ogni nodo della popolazione sia in contatto, in media, con altri k_M individui scelti casualmente ad ogni istante t , ogni nodo suscettibile avrà una media di $k_M i(t)$ vicini infetti e, di conseguenza, acquisiranno l'informazione con probabilità

$$P = 1 - (1 - \beta'(t)dt)^{k_M i(t)} \simeq \beta'(t)k_M i(t).$$

Ora, siccome una parte $s(t)$ della popolazione è ancora suscettibile, la velocità di incremento dei nodi infetti dovuti al contatto suscettibile+infetto è $\beta'(t)k_M i(t)s(t)$. Supponiamo che un nodo già infetto tenda a tornare suscettibile con una velocità γ (in altre parole, γ è la capacità di un nodo infetto di essere contagiato da una informazione negativa rispetto al messaggio che si vuole diffondere; oppure, nel caso biologico, $1/\gamma$ è la durata media della malattia). Nel limite N che ci siamo prefissati, le equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione di $s(t)$ e di $i(t)$ nell'epidemia SIS sono date da

$$\begin{aligned} s'(t) &= -\beta(t)s(t)i(t) + \gamma i(t) \\ i'(t) &= \beta(t)s(t)i(t) - \gamma i(t). \end{aligned}$$

La derivazione, a meno che non sia esplicitamente riportato, si supporrà sempre rispetto alla variabile t . Prima di procedere vale la pena studiare le proprietà del

problema di Cauchy nel caso biologico classico, quello in cui $\beta(t) \equiv \beta > 0$ per ogni $t \in [0, \infty[$, ed osservarne le analogie col caso della diffusione di un'informazione:

$$\begin{cases} s'(t) = -\beta s(t)i(t) + \gamma i(t) \\ i'(t) = \beta s(t)i(t) - \gamma i(t) \\ s(0) = s_0 \geq 0 \\ i(0) = i_0 \geq 0 \end{cases} . \quad (2.2)$$

Dalla (2.1) ricaviamo che $s(t) = 1 - i(t)$, per cui sostituendo si trova

$$\begin{cases} i'(t) = (\beta(1 - i(t)) - \gamma)i(t) \\ i(0) = i_0 \geq 0 \end{cases} . \quad (2.3)$$

Se $i_0 = 0$, il problema ha come soluzioni $i(t) \equiv 0$ e $s(t) \equiv s_0 = 1$ per ogni $t \in [0, T] \subset [0, \infty[$: si tratta del caso banale in cui nessun nodo è al corrente della notizia, e quindi è impossibile che essa si diffonda (per questo, all'istante $t = 0$ dell'inizio della campagna elettorale, il candidato ha già avuto cura di aver infettato una frazione $i_0 > 0$ di nodi, per esempio il suo staff). Se $i_0 > 0$, risolvendo in maniera esplicita, si ha

$$i(t) = \frac{(\beta - \gamma)i_0}{\beta i_0 + [(\beta - \gamma) - \beta i_0]e^{-(\beta - \gamma)t}} . \quad (2.4)$$

Uno rapido studio qualitativo della (2.4) ci porta a vedere molte analogie col caso biologico. Definiamo

$$\sigma = \frac{\gamma}{\beta}$$

numero riproduttivo di base o *soglia critica*. Osserviamo che

i) se $\sigma < 1$, nell'intervallo temporale $[0, \infty[$ la funzione, almeno dopo un certo istante $0 \leq t_0 < T$ è strettamente crescente e limitata; siamo di fronte al caso in cui l'epidemia è molto virale e tende a diffondersi tra tutta la popolazione (v. grafico (1) in figura 2.1). L'analogo nel caso dell'informazione si verifica quando, ad esempio, la campagna per la promozione di un nuovo cosmetico in uscita è risultata, come si dice nel linguaggio del marketing, efficiente ed efficace; analogamente quando il programma politico proposto dal candidato sindaco è stato proposto in maniera intelligente ed ottimale.

ii) se $\sigma > 1$, la funzione $i(t)$ tende a decrescere, almeno da un certo istante $0 \leq t_1 < T$ in poi, in quanto la diffusione non è abbastanza veloce (si dice che è poco virale) e l'epidemia tende ad estinguersi (v. grafico (2) in figura 2.1). L'analogo nel caso dell'informazione si può trovare nel caso in cui, all'istante t_1 , la campagna pubblicitaria, a causa di una cattiva gestione dei budgets o di un messaggio non convincente è risultata poco efficace da un punto di vista comunicativo, facendo perdere interesse per quel certo bene o servizio.

Le situazioni sino ad ora studiate presuppongono l'assenza di qualsiasi tipo di controllo da parte della fonte. Abbiamo visto come, per un primo sguardo non certo superficiale, è stato sufficiente risolvere un sistema di equazioni differenziali del primo ordine con condizioni iniziali assegnate. Adesso, invece, ci proponiamo

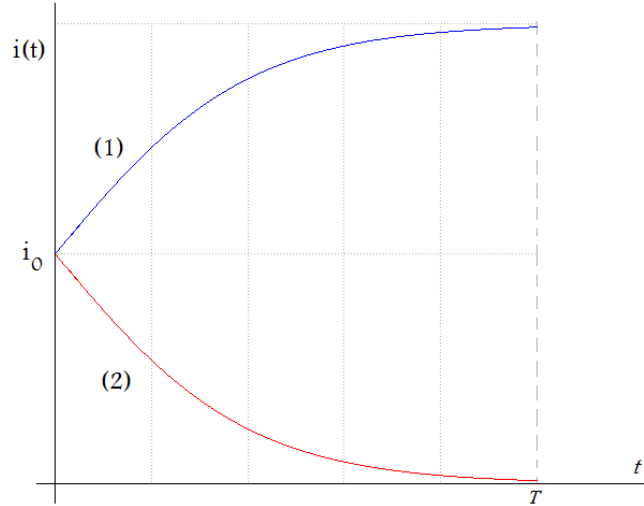


Fig. 2.1. Sull'asse delle ascisse è posta la variabile temporale t , mentre su quello delle ordinate la funzione $i(t)$. Caso (1): andamento di $i(t)$ per $\sigma < 1$, l'informazione tende ad espandersi a tutta la popolazione. Caso (2) andamento di $i(t)$ per $\sigma > 1$, l'informazione tende ad estinguersi essendo l'epidemia poco virale.

di studiare come, sotto opportune ipotesi, la presenza di una strategia di controllo possa favorire o sfavorire il diffondersi dell'informazione rispetto all'assenza di controllo.

Definizione 2.1.1. Sia $[0, T]$ con $T < \infty$ un intervallo temporale fissato. Definiamo

$$\mathcal{U} := \{u \in L^\infty(0, T) \mid \|u\|_\infty \leq M\}, \quad (2.5)$$

dove $M > 0$ è una costante stimata tenendo conto del tipo di informazione che si vuol diffondere e del fatto che, nonostante il grande numero e l'efficace potenza dei nuovi strumenti di comunicazione, la sua diffusione sarà sempre e comunque limitata. La (2.5) ci servirà per introdurre la funzione obiettivo J specifica per il nostro caso, la cui definizione dipende dal fatto pratico che segue. Prendiamo sempre l'esempio della campagna elettorale: alla luce dei fatti, il candidato politico sarà più interessato alla frazione di infetti $i(T)$ al termine della campagna, e meno alla sua evoluzione storica nell'intervallo temporale $[0, T]$. Più in generale, diremo che l'obiettivo della fonte sarà avere, al tempo $t = T$, un numero $i(T)$ di nodi infetti il più vicino possibile ad 1, indipendentemente dal modo qualitativo con cui vi è arrivata.

2.2 Il problema di controllo ottimale nell'epidemia SIS

Definizione 2.2.1. Definiamo funzione obiettivo la funzione

$$J(u) := -i(T) + \int_0^T bu^2(s)ds, \quad \forall u \in \mathcal{U}. \quad (2.6)$$

L'integrale rappresenta il costo totale di gestione della campagna nel tempo (dal quale dipenderà il parametro reale $b > 0$), e tiene quindi conto del contagio

che avviene mediante la televisione, quotidiani, radio, volantinaggio e simili. La scelta di un costo quadratico medio si riallaccia al caso epidemico in senso medico. Nostro obiettivo è minimizzare il funzionale (2.6) in \mathcal{U} , con le condizioni

$$\begin{cases} i'(t) = \beta(t)s(t)i(t) - \gamma i(t) + u(t)s(t) \\ i(0) = i_0 \\ s(t) = 1 - i(t) \end{cases},$$

e quindi, in termini pratici, rispondere alle questioni che seguono: esiste una strategia di controllo capace, al minor impiego possibile di risorse, di far giungere un messaggio assegnato al maggior numero di persone possibile all'interno della popolazione? Se esiste, è unica? Usando ipotesi opportune saremo in grado non solo di rispondere in modo affermativo ad entrambe le domande, ma anche di dare una stima temporale del valore di T , oltre il quale la strategia di controllo non sarà più unica.

2.3 Esistenza della soluzione del problema

Cominciamo col dimostrare che un controllo ottimo esiste e che dunque ha senso studiare il problema.

Teorema 2.3.1. (Esistenza della soluzione). Esiste una funzione di controllo ottimale $u^* \in \mathcal{U}$ (ed una corrispondente traiettoria ottima $i^*(t)$) tale che $u \in \operatorname{argmin}_{u \in \mathcal{U}} \{J(u)\}$.

Dimostrazione. Applichiamo il teorema 1.2.1, notando che $\phi(\cdot) = \operatorname{Id}$. Le funzioni $\mathcal{L}(t, i, u) = bu^2$ e $\mathbf{f}(t, i, u) = -\beta i^2 + (\beta - \gamma - u)i + u$ verificano le ipotesi richieste nell'insieme $[0, T] \times [0, 1] \times [0, M]$. Infatti, per la funzione \mathcal{L} basta scegliere $g(u) = bu^2$; inoltre, essendo \mathbf{f} lineare in u e \mathcal{L} convessa in u , l'insieme

$$F(t, i) := \{(z, s) \in \mathbb{R}^2 : \exists u \in [0, M] \text{ t.c. } z = \mathbf{f}(t, i, u), s \geq \mathcal{L}(t, i, u)\}$$

è banalmente convesso.

□

2.4 Calcolo della soluzione del problema

Usiamo il principio del massimo di Pontryagin per risolvere il problema di controllo ottimale. Attraverso questo metodo, impostiamo un sistema di equazioni differenziali ordinarie in termini di stato e di variabili aggiunte (con condizioni iniziali e condizioni al contorno, rispettivamente) che sono soddisfatte dall'ottimo. Tale sistema di equazioni può essere analizzato qualitativamente (oltre che risolto per via numerica). Denotiamo con $\lambda(t)$ la variabile aggiunta e, al tempo t , con $u^*(t)$, $i^*(t)$ e $\lambda^*(t)$ rispettivamente, il controllo ottimale, lo stato e la variabile aggiunta valutati a partire dallo stato ottimale.

La funzione Hamiltoniana è

$$\mathcal{H}(i, u, \lambda, t) = bu^2 + \lambda [-\beta i^2 + (\beta - \gamma - u)i] + \lambda u.$$

Dalla (ii) del Teorema 1.3.1 ricaviamo

$$(\lambda^*)'(t) = -\frac{\partial}{\partial i}\mathcal{H}(t, i^*, u^*, \lambda^*) = 2\beta^* i^* \lambda^* - (\beta^* - \gamma - u^*)\lambda^*, \quad t \in [0, T], \quad \lambda^*(T) = -1.$$

Inoltre, se $0 < u^*(t) < M$, la (i) dello stesso Teorema assicura che

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{H}(t, i, u, \lambda) = 2bu^* - \lambda^* i^* + \lambda^* = 0, \quad t \in [0, T] \Rightarrow u^* = \frac{-\lambda^*(1 - i^*)}{2b}.$$

Per chiarire meglio le caratteristiche della funzione u^* , occorre analizzare più in dettaglio la traiettoria e il moltiplicatore. La funzione $i^*(t)$ verifica il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} (i^*)'(t) = \beta^*(t)i^*(t)[1 - i^*(t)] - \gamma i^*(t) - \frac{\lambda^*(t)[1 - i^*(t)]^2}{2b}, & t \in]0, T[\\ i^*(0) = i_0^* \in]0, 1[\end{cases} \quad (2.7)$$

ove $\gamma > 0$ e $\beta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua con $\beta \geq 0$.

Invece, $\lambda^*(t)$ verifica

$$\begin{cases} (\lambda^*)'(t) = -\beta^*(t)\lambda^*(t)[2i^*(t) - 1] - \left[\gamma - \frac{\lambda^*(t)[1 - i^*(t)]}{2b} \right] \lambda^*(t), & t \in]0, T[\\ \lambda^*(T) = -1 \end{cases} \quad (2.8)$$

Proposizione 2.4.1. Per ogni $t \in [0, T]$, $\lambda^*(t) < 0$ ed è limitata inferiormente in ogni intervallo $[\varepsilon, T]$ con $\varepsilon > 0$.

Dimostrazione. Il problema (2.8) è un'equazione non lineare di tipo Riccati. Poiché $\lambda^*(t) \equiv 0$ è una soluzione, e poiché $\lambda^*(T) = -1$, per il principio di unicità $\lambda^*(t) < 0$ fin dove è definita. Osserviamo inoltre che essa non può tendere a $+\infty$ per $t \rightarrow 0$: infatti, la funzione $\mu(t) := (\lambda^*)^{-1}(t)$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} \mu'(t) = [(2i(t) - 1)\beta(t) + \gamma]\mu(t) - \frac{1 - i(t)}{2b} \\ \mu(T) = 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Non può esistere alcun $t_0 \in]0, T[$ tale che $\mu(t_0) = 0$ perché in tal caso $\mu'(t_0) = -(1 - i^*(t_0))/2b < 0$, ossia μ sarebbe positiva per $0 < t < t_0$ (in contraddizione con quanto appena dimostrato circa la negatività di λ). Dunque $\mu(t) < 0$ in $]0, T[$ e quindi $\lambda^*(t)$ è limitata superiormente in $[\varepsilon, T]$ per ogni $\varepsilon > 0$. Grazie alla sostituzione, la funzione λ^* si ricava esplicitamente, ed è

$$\lambda^*(t) = \frac{e^{(T-t)\gamma + \int_t^T (2i^*(s)-1)\beta^*(s)ds}}{-1 + \int_t^T e^{(T-\sigma)\gamma + \int_\sigma^T (2i^*(s)-1)\beta^*(s)ds} \frac{1 - i^*(\sigma)}{2b} d\sigma}.$$

Quindi, in particolare,

$$\int_0^T e^{-(T-\sigma)\gamma - \int_\sigma^T (2i^*(s)-1)\beta^*(s)ds} \frac{1 - i^*(\sigma)}{2b} d\sigma \leq 1. \quad (2.10)$$

□

Proposizione 2.4.2. Per ogni $t \in [0, T]$, risulta $0 < i^*(t) < 1$.

Dimostrazione. A priori, $i^*(t)$ è definita e positiva in un intorno di 0. Ma $i^*(t) \in]0, 1[$ perché se t_0 è il minimo tra i numeri positivi s tali che $i^*(s) = 0$, allora $i^*(t) > 0$ per $t \in [0, t_0[$, mentre $i^*(t_0) = 0$ e $(i^*)'(t_0) = -\lambda^*(t_0)/2b > 0$. Ne segue che $i^*(t) < 0$ per $t \in]t_0 - \delta, t_0[$ con $\delta > 0$ opportuno: siamo giunti ad un assurdo. Analogamente, se t_0 è il minimo tra gli $s > 0$ tali che $i^*(s) = 1$ allora $i^*(t) < 1$ per $t \in [0, t_0[$ mentre $i^*(t_0) = 1$ e $(i^*)'(t_0) = -\gamma < 0$. Ne segue che $i^*(t) > 1$ per $t \in]t_0 - \delta, t_0[$ con $\delta > 0$ opportuno: anche qui siamo giunti ad un assurdo.

□

Infine, come ultima osservazione, notiamo che $u^*(t)$, per definizione, è strettamente positiva in $[0, T]$. Per il teorema 1.2.1 la funzione $u^*(t)$ assume valori in $]0, M]$, ma nell'aperto contenuto in $[0, T]$ in cui $0 < u^*(t) < M$, la condizione necessaria di Pontryagin ci dice che $u^*(t) = \frac{-\lambda^*(t)(1-i^*(t))}{2b}$; nel chiuso di $[0, T]$ in cui $u^*(t) = M$, per l'appunto u^* vale M . Dunque

$$u^*(t) = \begin{cases} \frac{-\lambda^*(t)(1-i^*(t))}{2b} & \text{se } \frac{-\lambda^*(t)(1-i^*(t))}{2b} \leq M \\ M & \text{se } \frac{-\lambda^*(t)(1-i^*(t))}{2b} > M \end{cases}$$

ovvero

$$u^*(t) = \min \left\{ -\frac{\lambda^*(t)(1-i^*(t))}{2b}, M \right\}. \quad (2.11)$$

2.5 Unicità della soluzione del problema

Abbiamo fin qui mostrato che il problema di controllo ammette soluzione, e ne abbiamo ricavato una formulazione esplicita usando il principio di Pontryagin. Adesso ci accingiamo a dimostrarne anche l'unicità, sotto ipotesi opportune. Abbiamo bisogno che in (2.10) valga la disuguaglianza stretta, ossia che λ^* sia limitata inferiormente in $[0, T]$: ciò è ovviamente garantito, ad esempio, se b è sufficientemente grande.

Teorema 2.5.1. (Unicità della soluzione del problema). La funzione u^* definita in (2.11) è l'unica soluzione del problema di ottimo in $[0, T]$ purché T sia sufficientemente piccolo.

Dimostrazione. Senza perdere di generalità, per $0 \leq t \leq T$, supponiamo di avere due soluzioni u, \hat{u} , ed indichiamo con i, \hat{i} le traiettorie corrispondenti. Poniamo

$$i(t) = e^{at}x(t), \quad \lambda(t) = e^{-at}y(t), \quad \hat{i}(t) = e^{at}\hat{x}(t), \quad \hat{\lambda}(t) = e^{-at}\hat{y}(t), \quad (2.12)$$

dove $a > 0$ è un numero reale, le funzioni $x(t), \hat{x}(t), y(t), \hat{y}(t)$ sono continue in $[0, T]$ e sono tali che $0 \leq x, \hat{x} \leq 1$ e $0 \geq y, \hat{y} \geq -Y_0$ per $0 \leq t \leq T$. Per quanto

visto, abbiamo

$$\begin{aligned} u &= \min \left\{ -\frac{e^{-at}y(t)(1 - e^{at}x(t))}{2b}, M \right\}, \\ \hat{u} &= \min \left\{ -\frac{e^{-at}\hat{y}(t)(1 - e^{at}\hat{x}(t))}{2b}, M \right\}. \end{aligned}$$

Stimiamo adesso $(u - \hat{u})^2$:

$$\begin{aligned} (u - \hat{u})^2 &\leq \left| \frac{e^{-at}y - xy}{2b} - \frac{e^{-at}\hat{y} - \hat{x}\hat{y}}{2b} \right|^2 = \left(\frac{e^{-at}}{2b}(y - \hat{y}) - \frac{1}{2b}(xy - \hat{x}\hat{y}) \right)^2 \\ &= \left| \frac{e^{-at} - \hat{x}(y - \hat{y})}{2b} - \frac{y}{2b}(x - \hat{x}) \right|^2 \\ &= \left(\frac{e^{-at} - \hat{x}}{2b} \right)^2 (y - \hat{y})^2 + \frac{y^2}{4b^2}(x - \hat{x})^2 - 2\frac{e^{-at} - \hat{x}}{4b^2}(x - \hat{x})(y - \hat{y}) \\ &\leq \left(\frac{e^{-at} - \hat{x}}{2b} \right)^2 (y - \hat{y})^2 + \frac{y^2}{4b^2}(x - \hat{x})^2 + \left| \frac{e^{-at} - \hat{x}}{2b^2} \right| |(x - \hat{x})(y - \hat{y})| \\ &\leq A_1(x - \hat{x})^2 + A_2(y - \hat{y})^2, \end{aligned}$$

ove $A_1 = (Y_0^2 + 1)/4b^2$ e $A_2 = 1/2b^2$. Sostituendo adesso le relazioni (2.12) nella condizione del problema ottimale, si ottiene

$$i' = e^{at}x' + axe^{at} = -\beta(t)e^{2at}x^2 + (\beta(t) - \gamma - u)e^{at}x + u,$$

e l'analoga equazione con \hat{x}, \hat{u} . Andando a scrivere la stessa espressione per $d\hat{i}/dt$ e sottraendola da questa appena trovata si ottiene

$$\begin{aligned} &e^{at}(x' - \hat{x}') + ae^{at}(x - \hat{x}) \\ &= -\beta(t)e^{2at}(x^2 - \hat{x}^2) + (\beta(t) - \gamma)e^{at}(x - \hat{x}) - e^{at}(ux - \hat{u}\hat{x}) + (u - \hat{u}). \end{aligned}$$

Moltiplicando ambo i membri per $(x - \hat{x})$,

$$\begin{aligned} &e^{at}(x - \hat{x})(x' - \hat{x}') + ae^{at}(x - \hat{x})^2 = \\ &-\beta(t)e^{2at}(x + \hat{x})(x - \hat{x})^2 + (\beta(t) - \gamma)e^{at}(x - \hat{x})^2 - e^{at}u(x - \hat{x})^2 + (1 - e^{at}\hat{x})(u - \hat{u})(x - \hat{x}) \\ &\leq e^{aT}C_1(x - \hat{x})^2 + |(u - \hat{u})(x - \hat{x})| \\ &\leq e^{aT}C_2(x - \hat{x})^2 + \frac{1}{2}(u - \hat{u})^2, \end{aligned}$$

essendo $C_1 = 2\|\beta\|_\infty e^{aT} + \|\beta - \gamma\|_\infty + M$ e $C_2 = C_1 + 1/2$. Dividendo per e^{at} e integrando entrambi i membri rispetto a t tra 0 e T otteniamo

$$\frac{1}{2}(x - \hat{x})^2(T) + (a - C_2e^{aT}) \int_0^T (x - \hat{x})^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T (u - \hat{u})^2 dt. \quad (2.13)$$

Sostituendo le (2.12) nell'equazione differenziale risolta da $\lambda^*(t)$, si ottengono due equazioni differenziali per y e \hat{y} , che divise per e^{-at} e sottratte, danno

$$(y' - \hat{y}') - a(y - \hat{y}) = -2\beta(t)e^{at}(xy - \hat{x}\hat{y}) + (\beta(t) - \gamma)(y - \hat{y}) - (uy - \hat{u}\hat{y}).$$

Procedendo in modo analogo a prima, moltiplichiamo per $(y - \hat{y})$ ed otteniamo

$$\begin{aligned} (y' - \hat{y}')(y - \hat{y}) - a(y - \hat{y})^2 &= \\ &= -2\beta(t)e^{at}x(y - \hat{y})^2 - 2\beta(t)e^{at}\hat{y}(x - \hat{x})(y - \hat{y}) + \\ &+ (\beta(t) - \gamma)(y - \hat{y})^2 - y(u - \hat{u})(y - \hat{y}) - \hat{u}(y - \hat{y})^2. \end{aligned}$$

Integriamo di nuovo rispetto a t , da 0 a T , entrambi i membri e cambiamo segno all'equazione:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(y - \hat{y})^2(0) + a \int_0^T (y - \hat{y})^2 dt = \\ &+ \int_0^T 2\beta(t)e^{at}x(y - \hat{y})^2 dt + \int_0^T 2\beta(t)e^{at}\hat{y}(x - \hat{x})(y - \hat{y}) dt + \\ &- \int_0^T (\beta(t) - \gamma)(y - \hat{y})^2 dt + \int_0^T y(u - \hat{u})(y - \hat{y}) dt + \int_0^T \hat{u}(y - \hat{y})^2 dt \\ &\leq \int_0^T |2\beta(t)e^{at}\hat{y}||x - \hat{x}||y - \hat{y}| dt + (\|\beta\|_\infty + \gamma + M) \int_0^T (y - \hat{y})^2 + \\ &+ \int_0^T |y||u - \hat{u}||y - \hat{y}| dt, \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\frac{1}{2}(y - \hat{y})^2(0) + (a - C_3 e^{aT}) \int_0^T (y - \hat{y})^2 dt \leq \frac{Y_0}{2} \int_0^T |u - \hat{u}|^2 dt + \|\beta\|_\infty e^{aT} \int_0^T (x - \hat{x})^2 dt,$$

ove $C_3 = (2\|\beta\|_\infty + \gamma + M + Y_0/2)$. Quindi, sommando questa disuguaglianza con la (2.13),

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(y - \hat{y})^2(0) + (a - C_4 e^{aT}) \int_0^T (x - \hat{x})^2 + \\ &+ (a - C_3 e^{aT}) \int_0^T (y - \hat{y})^2 dt \leq \frac{1 + Y_0}{2} \int_0^T (u - \hat{u})^2 dt, \end{aligned}$$

ove $C_4 = C_2 + \|\beta\|_\infty$. Sostituendo l'espressione $(u - \hat{u})^2 \leq A_1(x - \hat{x})^2 + A_2(y - \hat{y})^2$ nella disequazione appena scritta, otteniamo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(y - \hat{y})^2(0) + \frac{1}{2}(x - \hat{x})^2(T) + (a - C_4 e^{aT} - C_5) \int_0^T (x - \hat{x})^2 dt + \\ &+ (a - C_3 e^{aT} - C_6) \int_0^T (y - \hat{y})^2 \leq 0, \end{aligned}$$

ove $C_5 = A_1(1 + Y_0)/2$ e $C_6 = A_2(1 + Y_0)/2$. Siccome le costanti C_i sono tutte strettamente maggiori di zero per $1 \leq i \leq 6$, quest'ultima disuguaglianza ci porta a concludere che $x = \hat{x}$ e $y = \hat{y}$ per

$$T < \min \left\{ \sup_{a>0} \left\{ \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a - C_5}{C_4} \right) \right\}, \sup_{a>0} \left\{ \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a - C_6}{C_3} \right) \right\} \right\}.$$

Dunque, la soluzione delle equazioni e anche la funzione di controllo ottimale sono uniche per un sufficientemente piccolo intervallo temporale $[0, T]$ del quale abbiamo fornito una stima.

□

Capitolo 3

Modello SIR

3.1 Introduzione e definizioni

Il secondo modello che presentiamo è il modello epidemico SIR (suscettibili-infetti-rimossi), il quale, come accennato nel capitolo introduttivo, valuta una classe aggiuntiva oltre alle classi dei suscettibili ed infetti discussi in precedenza. Sempre nell'ipotesi di una popolazione costituita da un numero $N \gg 0$ di individui, supporremo, oltre alla presenza di un numero di nodi suscettibili ed infetti (che indicheremo con le stesse notazioni del capitolo precedente), anche la presenza di un numero di individui i quali, pur contagiati dopo la ricezione dell'informazione, subiscono un effetto di dimenticanza, traducibile in una sorta di immunità. Essi, come nel caso biologico, verranno chiamati nodi *rimossi*. Prima di procedere alla modellizzazione matematica, vediamo alcuni esempi che mostrano l'effettiva realtà del caso che andremo a studiare.

Il modello è applicabile quando la maggioranza degli N nodi sono individui anziani o molto anziani i quali, dopo essere stati infettati (per esempio) dai dibattiti televisivi o dalla visita di un promotore, a causa dell'età avanzata tendono letteralmente a dimenticare o, perlomeno, a ricordare solo parzialmente quanto hanno ascoltato o letto.

L'epidemia SIR si presta bene ad interpretare il caso del debutto promozionale di un nuovo cosmetico, di cui i nodi infetti erano venuti a conoscenza tramite il classico volantino pubblicitario trovato nella cassetta delle lettere o sul tergicristalli dell'automobile. A causa del distratto o volontario cestinamento del volantino, il nodo può dimenticarsi del prodotto e della promozione, diminuendo così la diffusione.

Il modello SIR, tuttavia, si adatta anche a popolazioni che vivono in un contesto sociale dove è difficile, se non impossibile, un bombardamento mediatico da parte dei nuovi mezzi di comunicazione, come ad esempio quelle del terzo mondo, laddove, a causa della poca cultura, dello scarso allenamento mentale e dei miseri strumenti di diffusione, l'informazione viene poco ripetuta, per cui tende ad essere dimenticata.

Siano dunque rispettivamente $R(t)$ e $r(t) \equiv R(t)/N \geq 0$ il numero e la frazione

di nodi rimossi ad un certo istante t ; analogamente a prima

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1. \quad (3.1)$$

La velocità di diffusione effettiva dell'informazione al tempo t viene ancora indicata con $\beta(t)$; inoltre, supporremo che i nodi infettati dall'informazione tendano a dimenticarsene con una velocità costante $\gamma > 0$. Le equazioni che governano il processo SIR, per N sufficientemente grande, diventano allora

$$\begin{aligned} s'(t) &= -\beta(t)s(t)i(t); \\ i'(t) &= \beta(t)s(t)i(t) - \gamma i(t); \\ r'(t) &= \gamma i(t). \end{aligned}$$

Esattamente come abbiamo fatto nel capitolo precedente, cerchiamo anzitutto qualche informazione sulla soluzione del problema di Cauchy nel caso particolare $\beta(t) = \beta > 0$ costante (che è il caso biologico):

$$\begin{cases} s'(t) = -\beta s(t)i(t) \\ i'(t) = \beta s(t)i(t) - \gamma i(t) \\ r'(t) = \gamma i(t) \\ s(0) = s_0 \geq 0 \\ i(0) = i_0 \geq 0 \\ r(0) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

L'ipotesi $r(0) = 0$ si riallaccia al caso biologico: l'istante $t = 0$ è fissato in modo che vi siano soltanto infetti e suscettibili. Come prima, se $i_0 = 0$ la soluzione $i(t) = 0$ verifica il problema e l'epidemia non si diffonde tra la popolazione. Se invece $i_0 = 1$ e $s_0 = 0$, allora $s(t) = 0$ verifica il problema per ogni $t \in [0, T]$ ed inoltre $i(t) = e^{-\gamma t}$ ed $r(t) = 1 - i(t) = 1 - e^{-\gamma t}$. Se supponiamo $0 < i_0 < 1$, il sistema non è risolubile in maniera esplicita: possiamo tuttavia dire molto sul comportamento dell'epidemia. Dividendo per $i(t)$ la seconda equazione del sistema (3.2) si ottiene

$$\frac{i'(t)}{i(t)} = \beta s(t) - \gamma \implies i(t) = i_0 \exp\left(\int_0^t [\beta s(\zeta) - \gamma] d\zeta\right);$$

analogamente, dividendo la prima equazione per $s(t)$ si ha

$$\frac{s'(t)}{s(t)} = -\beta i(t) \implies s(t) = s_0 \exp\left(\int_0^t [-\beta i(\zeta)] d\zeta\right).$$

Deduciamo che:

- i) le funzioni $i(t)$ e $s(t)$ sono funzioni entrambe strettamente positive;
- ii) $s'(t) = -\beta i(t)s(t) < 0$ per ogni $t \in [0, T]$, dunque $s(t)$ è strettamente decrescente (e limitata);
- iii) sommando tra loro le prime due equazioni del sistema abbiamo

$$i'(t) + s'(t) = -\gamma i(t) < 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

dunque la funzione $\omega(t) = i(t) + s(t)$ è strettamente decrescente e limitata;

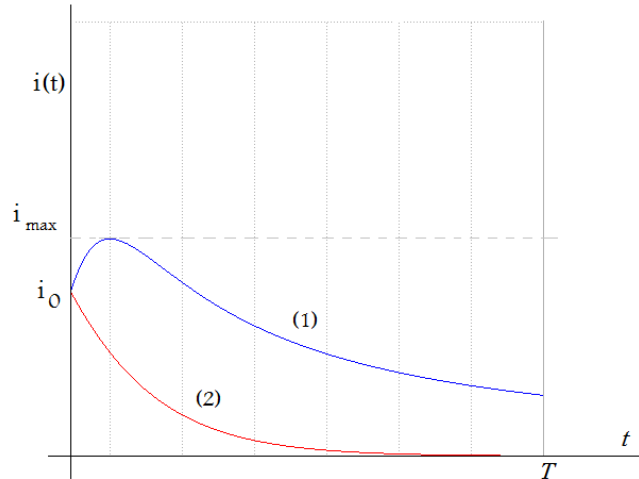


Fig. 3.1.

iv) la funzione $i(t) = \omega(t) - s(t)$ è somma algebrica di funzioni continue, decrescenti e limitate per $t \in [0, T]$, dunque anche $i(t)$ è limitata. Possiamo applicare il teorema di prolungabilità delle soluzioni per affermare che la funzione $i(t)$ esiste ed è continua su tutto l'intervallo $[0, T]$. Derivando la funzione $\omega(t)$ si ha $i'(t) + s'(t) = \gamma i(t)$; integrando nuovamente quest'ultima tra 0 e T si ha

$$i(T) + s(T) - 1 = -\gamma \int_0^T i(\zeta) d\zeta,$$

per cui

$$\gamma \int_0^T i(\zeta) d\zeta = 1 - i(T) - s(T) \leq 1.$$

Inoltre, definendo come nel caso SIS $\sigma = \gamma/\beta$, dalle equazioni del sistema ricaviamo che

$$\frac{di}{ds} = \frac{di/dt}{ds/dt} = -1 + \frac{\sigma}{s}.$$

Integrando, otteniamo i in funzione di s :

$$i(s) = 1 - s - \sigma \ln\left(\frac{s_0}{s}\right).$$

Per ciò

v) se $s_0 \leq \sigma$, essendo $s(t)$ decrescente, si vede facilmente che anche la funzione $i(t)$ è decrescente: è il caso in cui l'informazione non ha avuto ampia diffusione, rappresentato graficamente come (2) in Figura 3.1;

vi) se $s_0 > \sigma$, la funzione $i(s)$ aumenta: nel caso in cui $i(t)$ sia estendibile all'intervallo $[0, \infty[$, essa ha un massimo assoluto ad un certo istante t^* dove vale $s(t^*) = \sigma$ e di conseguenza $i(t^*) = i_{\max} = 1 - \sigma[1 + \ln(s_0/\sigma)]$ e poi decrescere a 0

per $t \rightarrow \infty$; la campagna d'informazione risulterà efficiente ed efficace se $T \leq t^*$. Questa situazione è rappresentata nel grafico (1) in Figura 3.1.

Abbiamo sin qui elencato alcune caratteristiche del modello epidemiologico SIR, e ne abbiamo osservato le analogie col caso dell'informazione supponendo l'assenza di qualsiasi strategia di controllo. Seguendo la stessa struttura esplicativa vista per il SIS, andiamo ad analizzare la stessa situazione supponendo la presenza di un controllo da parte della fonte. Poiché si tiene conto del fattore di rimozione/dimenticanza si suppone che essa valuti più in dettaglio le possibili forme di contagio e, per conseguenza, investa le sue risorse in due modi diversi.

Primo modo. La fonte recluta con un controllo $u_1(t)$ un numero $N_0 < N$ di individui suscettibili all'interno della popolazione per farli diventare diffusori dell'epidemia, come ad esempio gli addetti al volantinaggio porta a porta, o lo staff del candidato sindaco.

Secondo modo. La fonte recluta con un controllo $u_2(t)$ nodi già infetti facendoli agire, non solo come diffusori dell'informazione su larga scala, ma anche come promotori di incentivi promozionali, esattamente come nel caso dei P.R. delle discoteche i quali, oltre a diffondere la notizia di party ed eventi musicali, garantiscono riduzioni ed entrate di privilegio ai nodi da loro infettati. Qui, dunque, la funzione $u_2(t)$ può essere vista come un vero e proprio passaparola tra i nodi, e la velocità di propagazione dell'informazione aumenta da $\beta(t)$ a $\beta(t) + u_2(t)$.

Come nel caso dell'epidemia SIS, considerando che la fonte ha comunque una disponibilità limitata di risorse, supporremo che entrambe le funzioni $u_1(t)$ e $u_2(t)$ siano funzioni continue nell'intervallo $[0, T]$, a valori reali e limitate, rispettivamente, da M_1 e M_2 . Fatte queste preliminari spiegazioni, cominciamo col darne un'impostazione matematica.

Definizione 3.1.1. Definiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &:= \{u_1 : u_1 \in L^\infty(0, T), 0 \leq \|u_1(t)\|_\infty \leq M_1\}; \\ \mathcal{U}_2 &:= \{u_2 : u_2 \in L^\infty(0, T), 0 \leq \|u_2(t)\|_\infty \leq M_2\}. \end{aligned}$$

Il costo di applicazione del controllo è quadratico nel segmento temporale $0 \leq t \leq T$; inoltre supporremo che il risultato ottimale da raggiungere sia che l'intera popolazione, all'istante finale T , abbia ricevuto il messaggio, ovvero che sia minima la quantità $1 - s(T)$.

3.2 Il problema di controllo ottimale nell'epidemia SIR

Nelle ipotesi e con le notazioni sin qui spiegate, siamo in grado di impostare il problema di controllo ottimale: minimizzare

$$J(u_1, u_2) = -1 + s(T) + \int_0^T (b_1 u_1^2(t) + b_2 u_2^2(t)) dt$$

in $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ (dove b_1 e b_2 sono costanti positive opportune) sotto le condizioni

$$\begin{cases} s'(t) = -[\beta(t) + u_2(t)]s(t)i(t) - u_1(t)s(t) \\ i'(t) = [\beta(t) + u_2(t)]s(t)i(t) + u_1(t)s(t) - \gamma i(t) \\ r'(t) = \gamma i(t) \\ i(t) \geq 0, s(t) \geq 0, r(t) \geq 0 \\ 1 = i(t) + s(t) + r(t) \\ i(0) = i_0 \\ s(0) = 1 - i_0 \\ r(0) = 0 \end{cases} .$$

Sostituendo $i(t) = 1 - s(t) - r(t)$ possiamo riscrivere il sistema in maniera più compatta:

$$\begin{cases} s'(t) = -[\beta(t) + u_2(t)]s(t)(1 - s(t) - r(t)) - u_1(t)s(t) \\ r'(t) = \gamma[1 - s(t) - r(t)] \\ 0 \leq s(t), r(t) \leq 1 \\ s(0) = 1 - i_0 \\ r(0) = 0 \end{cases} . \quad (3.3)$$

La nostra trattazione procederà in maniera parallela a quanto visto per il caso SIS. Esiste un controllo ottimale del problema (3.3) grazie al quale, col minor impiego di risorse possibili, si riesce a far arrivare un messaggio assegnato al maggior numero di individui tra la popolazione? Se esiste, questo controllo è unico? Anche qui risponderemo in maniera affermativa ad entrambe le questioni, riuscendo a stimare il tempo limite T oltre il quale il controllo non sarà più unico. Fatto ciò, cercheremo di confrontare la diffusione senza controllo rispetto a quella con controllo.

□

3.3 Calcolo della soluzione del problema

La dimostrazione dell'esistenza della soluzione segue la falsariga di quella fatta per l'epidemia SIS e la omettiamo. Procediamo col calcolo della soluzione esplicita del problema.

Siano $\lambda_s(t)$ e $\lambda_r(t)$ le variabili aggiunte. All'istante t , siano $u_1^*(t)$ e $u_2^*(t)$ i controlli ottimali, $s^*(t), r^*(t), \lambda_s^*(t), \lambda_r^*(t)$ gli stati e le variabili aggiunte valutate allo stato di ottimo, e usiamo il Teorema di Pontryagin.

L'Hamiltoniana è (omettendo per il momento la dipendenza dalla variabile t)

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}(s, r, u_1, u_2, \lambda_s, \lambda_r, t) \\ &= b_1 u_1^2 + b_2 u_2^2 + \lambda_s [-(\beta + u_2)s(1 - s - r) - u_1 s] + \lambda_r \gamma [1 - s - r]. \end{aligned}$$

Per cui le equazioni definite dal punto (ii) del Teorema 1.3.1 diventano

$$\begin{aligned} -(\lambda_s^*)' &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = \lambda_s^* [-(\beta + u_2^*)(1 - s^* - r^*) + (\beta + u_2^*)s - u_1^*] - \gamma \lambda_r^*; \\ -(\lambda_r^*)' &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} = \lambda_s^* [(\beta + u_2)s] - \gamma \lambda_r. \end{aligned}$$

con le condizioni finali $\lambda_s^*(T) = 1$ e $\lambda_r^*(T) = 0$. Inoltre

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} &= 2b_1 u_1^* - \lambda_s^* s^* = 0 \Rightarrow u_1^* = \frac{s^* \lambda_s^*}{2b_1}; \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} &= 2b_2 u_2^* + \lambda_s^* [-s^*(1 - s^* - r^*)] = 0 \Rightarrow u_2^* = \frac{s^*(1 - s^* - r^*) \lambda_s^*}{2b_2}.\end{aligned}$$

Vogliamo adesso verificare che $u_1^* > 0$ e $u_2^* > 0$. Per farlo, consideriamo i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} (\lambda_s^*)' = \lambda_s^* [(\beta + u_2^*)(1 - 2s^* - r^*) + u_1^*] + \gamma \lambda_r^* \\ \lambda_s^*(T) = 1 \end{cases},$$

e

$$\begin{cases} (\lambda_r^*)' = \lambda_s^* [s^*(\beta + u_2^*)] + \gamma \lambda_r^* \\ \lambda_r^*(T) = 0 \end{cases}.$$

Quest'ultimo ha soluzione

$$\lambda_r^*(t) = -e^{\gamma t} \int_t^T e^{-\gamma \tau} \lambda_s^* s(\beta + u_2^*) d\tau.$$

Pe cui, fintanto che $\lambda_s^* > 0$ in un certo intervallo $[T_1, T]$ avremo $\lambda_r^* < 0$. Supponiamo per assurdo che esista $\bar{t} \in]0, T[$ tale che $\lambda_s^*(\bar{t}) = 0$. Allora $(\lambda_s^*)'(\bar{t}) = \gamma \lambda_r^*(\bar{t}) < 0$ che è assurdo. Dunque $\lambda_s^* > 0$ sempre in $[0, T]$ e $\lambda_r^* < 0$ in $[0, T]$. Le precedenti condizioni valgono quando $u_j^*(t) \in]0, M_j[$, $j = 1, 2$. Per quanto detto, quindi,

$$u_1^*(t) = \min \left\{ \frac{\lambda_s^*(t) s^*(t)}{2b_1}, M_1 \right\}; \quad (3.4)$$

$$u_2^*(t) = \min \left\{ \frac{\lambda_s^*(t) s^*(t) (1 - s^*(t) - r^*(t))}{2b_2}, M_2 \right\}. \quad (3.5)$$

3.4 Unicità della soluzione del problema

Teorema 3.4.1. (di unicità della soluzione del problema). Per un tempo T sufficientemente piccolo, lo stato, la traiettoria aggiunta allo stato ottimale e la soluzione del problema di ottimo descritte da (3.4) e (3.5) sono uniche.

Dimostrazione. Supponiamo esistano due soluzioni del problema $(r, s, \lambda_s, \lambda_r)$ e $(\hat{r}, \hat{s}, \hat{\lambda}_r, \hat{\lambda}_s)$, ove di nuovo abbiamo ommesso la variabile t solo per brevità di notazione. Senza perdere di generalità, per $0 \leq t \leq T$, siano

$$s = e^{at} x, \quad r = e^{at} y, \quad \lambda_s = e^{-at} p, \quad \lambda_r = e^{-at} q, \quad (3.6)$$

$$\hat{s} = e^{at} \hat{x}, \quad \hat{r} = e^{at} \hat{y}, \quad \hat{\lambda}_r = e^{-at} \hat{p}, \quad \hat{\lambda}_s = e^{-at} \hat{q}, \quad (3.7)$$

ove $a > 0$ è una costante reale. Ricordando le stime presentate nel modello precedente, otteniamo la seguente serie di disuguaglianze:

$$\begin{aligned}(u_1 - \hat{u}_1)^2 &\leq A_1(x - \hat{x})^2 + A_2(p - \hat{p})^2 \\ (u_2 - \hat{u}_2)^2 &\leq (A_3 e^{aT} + A_4)(x - \hat{x})^2 + A_5 e^{aT}(y - \hat{y})^2 + \\ &\quad (A_6 e^{aT} + A_7)(p - \hat{p})^2\end{aligned}$$

Dalle equazioni del sistema (3.3) otteniamo allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x - \hat{x})^2 + (a - C_1 e^{aT}) \int_0^T (x - \hat{x})^2 dt - C_2 e^{aT} \int_0^T (y - \hat{y})^2 dt \\ \leq C_3 \int_0^T (u_1 - \hat{u}_1)^2 dt + (C_4 e^{aT} + C_5) \int_0^T (u_2 - \hat{u}_2)^2 dt, \end{aligned}$$

ove le costanti A_j sono positive e dipendono dalla terna (a, b_1, b_2) . Inoltre

$$\frac{1}{2}(y - \hat{y})^2(T) - C_6 \int_0^T (x - \hat{x})^2 dt + (a - C_7) \int_0^T (y - \hat{y})^2 dt \leq 0$$

Utilizzando le variabili aggiunte, si arriva poi a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(p - \hat{p})^2(0) - C_8 e^{aT} \int_0^T (x - \hat{x})^2 dt - C_9 e^{aT} \int_0^T (y - \hat{y})^2 dt + \\ + (a - C_{10} e^{aT} - C_{11}) \int_0^T (p - \hat{p})^2 dt - C_{12} \int_0^T (q - \hat{q})^2 dt \leq C_{13} \int_0^T (u_1 - \hat{u}_1)^2 dt + \\ + (C_{13} e^{aT} + C_{15}) \int_0^T (u_2 - \hat{u}_2)^2 dt; \end{aligned}$$

e anche

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(q - \hat{q})^2(0) - C_{16} e^{aT} \int_0^T (x - \hat{x})^2 dt - C_{17} e^{aT} \int_0^T (p - \hat{p})^2 dt + \\ + (a - C_{18} e^{aT} - C_{19}) \int_0^T (q - \hat{q})^2 dt \leq C_{20} e^{aT} \int_0^T (u_2 - \hat{u}_2)^2 dt. \end{aligned}$$

Finalmente, usando le stime delle quantità $(u_1 - \hat{u}_1)^2$ e $(u_2 - \hat{u}_2)^2$, si ottiene la disuguaglianza

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x - \hat{x})^2(T) + \frac{1}{2}(y - \hat{y})^2(T) + \frac{1}{2}(p - \hat{p})^2(0) + \frac{1}{2}(q - \hat{q})^2(0) + \\ + (a - D_1 e^{aT} - D_2) \int_0^T (x - \hat{x})^2 dt + (a - D_3 e^{aT} - D_4) \int_0^T (y - \hat{y})^2 dt + \\ + (a - D_5 e^{aT} - D_6) \int_0^T (p - \hat{p})^2 dt + (a - D_7 e^{aT} - D_8) \int_0^T (q - \hat{q})^2 dt \leq 0, \end{aligned}$$

ove $D_j > 0$ per $1 \leq j \leq 8$. Da questa disuguaglianza segue necessariamente $x = \hat{x}$, $y = \hat{y}$, $p = \hat{p}$ e $q = \hat{q}$ per

$$T < \min\left\{\sup_a \sigma_1, \sup_a \sigma_2, \sup_a \sigma_3, \sup_a \sigma_4\right\}$$

essendo

$$\sigma_1 = \frac{1}{a} \ln \frac{a - D_2}{D_1}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{a} \ln \frac{a - D_4}{D_3}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{a} \ln \frac{a - D_6}{D_5}, \quad \sigma_4 = \frac{1}{a} \ln \frac{a - D_8}{D_7}$$

□

Capitolo 4

Conclusioni

4.1 Confronto tra presenza e assenza di controllo

In questo paragrafo assumeremo che $\beta(t) = \beta$ in $[0, T]$. Per entrambi i modelli, se $\sigma = \beta/\gamma < 1$ il controllo tende ad essere efficace quando risulta $s(t) \gg i(t)$ al tempo $t = 0$ e $s(t) \ll i(t)$ per $t \rightarrow T$. Inoltre, l'ipotesi $\sigma < 1$ ci dice che la velocità di infezione è maggiore di quella di recupero, dunque l'informazione tende a propagarsi senza esaurirsi mantenendo la popolazione infetta (in questo caso il controllo è identificabile col cosiddetto bombardamento mediatico). Invece, come abbiamo visto, nel caso $\sigma > 1$ l'epidemia tende ad estinguersi. Facciamo solo un'ulteriore osservazione nel caso dell'avvenuta diffusione: man mano che σ diminuisce (quando $\beta(t) \gg \gamma$ per $t \rightarrow T$)

- i) il *segnale* di controllo (misurato dall'area sottesa al grafico della funzione di controllo) aumenta;
- ii) il segnale di controllo ha un effetto limitato sull'evoluzione del sistema.

Questo ci porta a concludere che campagne meno virali beneficieranno di più dell'applicazione di un controllo ottimo rispetto alle campagne più virali. In particolare, ciò ha implicazioni notevoli, per esempio, per quanto riguarda la scelta delle campagne pubblicitarie per l'uscita di un disco di un cantante affermato rispetto ad un cantante semiconosciuto: nel primo caso (ove l'epidemia tende ad essere più virale, vista la notorietà), spesso il solo passaparola è già un modo efficiente ed efficace di trasmettere la notizia e suscitare interesse; nel secondo, occorrono strategie più mirate, sostenute tenendo conto dei fattori discussi nell'introduzione.

Introduciamo adesso un controllo strategico euristico che non richiede conoscenze sulla teoria del controllo ottimale. Siano $s_{nc}(t)$, $i_{nc}(t)$ e $r_{nc}(t)$ rispettivamente le frazioni di individui suscettibili, infetti e recuperati ad un certo istante $t \in]0, T[$ quando non è applicato alcun controllo; anche qui l'efficacia del target dipende dalla proporzione di popolazione suscettibile a cui è applicata. Nel caso dell'epidemia SIS, un ragionevole segnale di controllo euristico potrebbe essere $(M \cdot s_{nc}(t))$, dove M è il massimo controllo diretto consentito sulla frazione dei nodi suscettibili ad ogni istante t . Il controllo del passaparola prevede che individui infetti riescano non solo a informare i suscettibili, ma anche a *convincerli* (per esempio a votare quel certo candidato, a comprare quel prodotto, ad andare a vedere quel

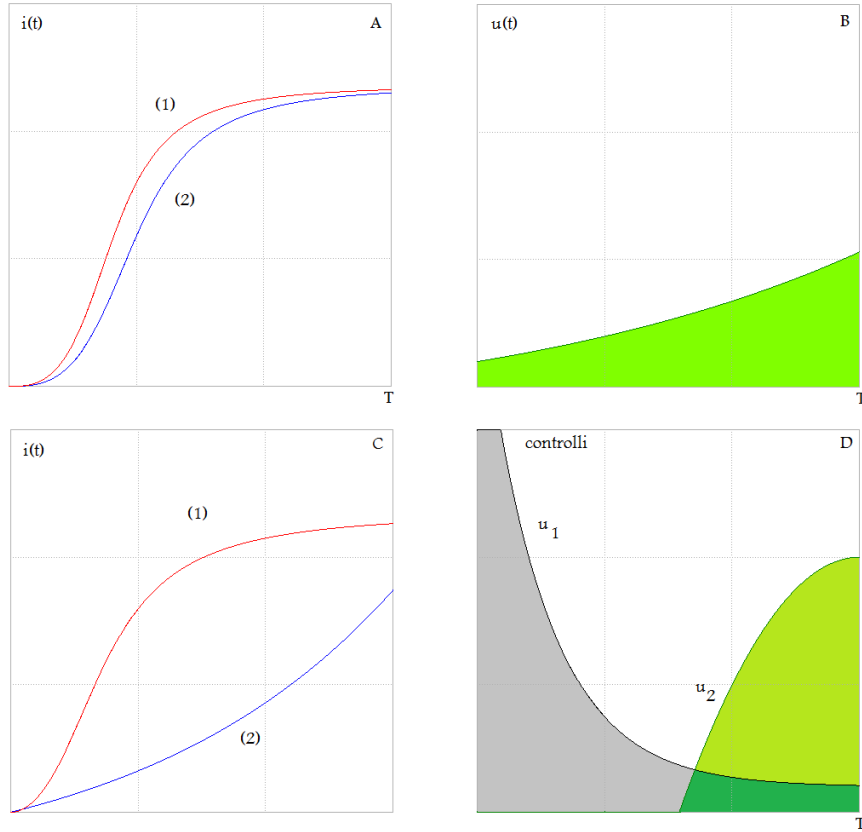


Fig. 4.1. Nel grafico A sono indicati gli andamenti qualitativi degli infetti nel modello SIS (1) con controllo e (2) senza controllo, mentre nel grafico B è indicata la funzione di controllo. Analogamente, nel grafico C sono indicati gli andamenti qualitativi degli infetti nel modello SIR (1) con controllo e (2) senza controllo, mentre nel grafico B sono indicate le funzioni (1) di controllo diretto e (2) di controllo indiretto

film al cinema ecc.): esso è efficiente quando, come nel nostro caso, la popolazione è molto grande. Invece, un segnale di controllo euristico adatto a descrivere l'effetto del passaparola nell'epidemia SIR potrebbe essere $(M_2, s_{nc}(t)i_{nc}(t))$, dove ancora M_2 è il controllo massimo raggiungibile sul passaparola. Definiamo questi controlli come *seguito* $\mathcal{S}_{nc}(t)$ per il modello SIS, e *seguito* $(\mathcal{S}_{nc}(t), \mathcal{S}_{nc}(t)\mathcal{I}_{nc}(t))$ per quello SIR. Va ricordato che questi tipi di controllo sono decisi e fissati all'inizio della campagna (essi prendono anche il nome di strategie open loop) e sono ottenuti tenendo presenti i risultati per un sistema incontrollato. Il costo funzionale è costituito da somme opportunamente pesate del controllo e della frazione $i(T)$ della fatica di controllo totale (area sotto la curva di controllo) e la frazione finale di nodi infetti $i(T)$. Si noti che $i(T)$ è lo stesso per tutte e tre le strategie, pur essendo diverso a seconda dei casi la tipologia del controllo totale.

Dall'analisi grafica della fig. 4.2. deduciamo le seguenti conclusioni.

i) Per un'opportuna scelta dei parametri (β, γ, T, b) il costo funzionale J per la strategia di controllo costante, ma anche per $\mathcal{S}_{nc}(t)$ per il modello SIS o $(\mathcal{S}_{nc}(t), \mathcal{S}_{nc}(t)\mathcal{I}_{nc}(t))$ per quello SIR, è più alto rispetto al costo funzionale sen-

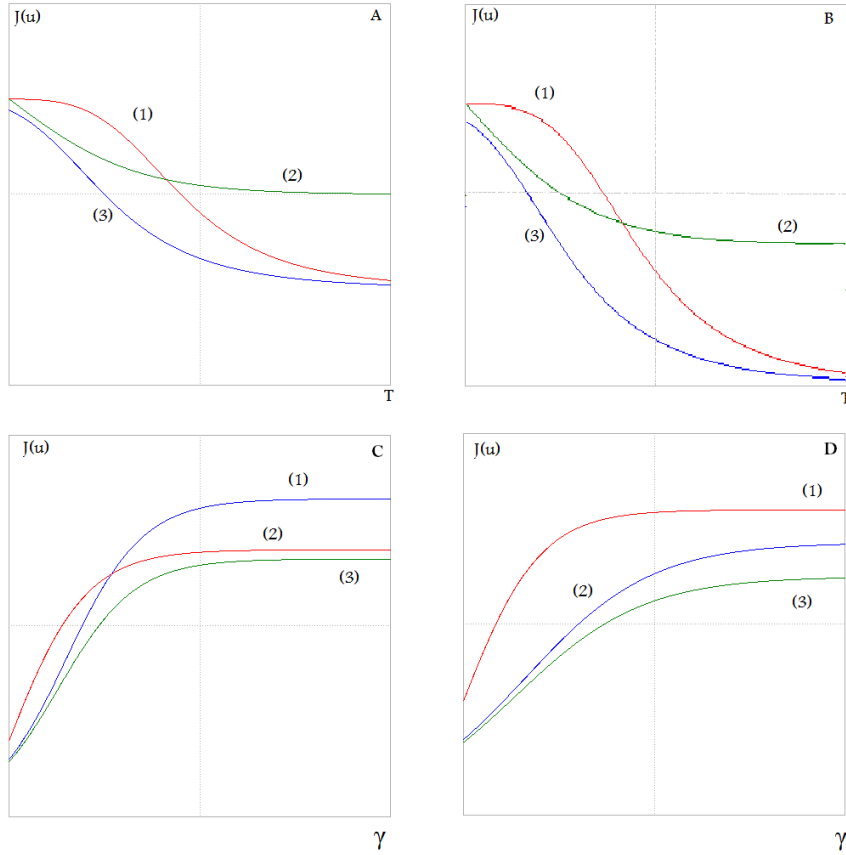


Fig. 4.2. In figura A è mostrato l'andamento del costo funzionale $J(u)$ (al variare del tempo) nel modello SIS (1) senza controllo, (2) con controllo ottimale e (3) con controllo $\mathcal{S}_{nc}(t)$. In figura B è mostrato invece l'andamento di $J(u)$ (sempre al variare del tempo) nel modello SIR (1) senza controllo, (2) con controllo ottimale e (3) con controllo $(\mathcal{S}_{nc}(t), \mathcal{S}_{nc}(t)\mathcal{I}_{nc}(t))$. In figura C è mostrato l'andamento di $J(u)$ (al variare di γ con T fissato) nell'epidemia SIS (1) con controllo $\mathcal{S}_{nc}(t)$, (2) senza controllo e (3) con controllo ottimale. In figura D è mostrato l'andamento di $J(u)$ nell'epidemia SIR, sempre al variare di γ , (1) senza controllo, (2) con controllo $(\mathcal{S}_{nc}(t), \mathcal{S}_{nc}(t)\mathcal{I}_{nc}(t))$ e (3) con controllo ottimale.

za controllo, che è $-1 + s(T)$. Resta comunque sempre vero che il costo per la strategia di controllo ottimale è sempre più piccolo del costo senza controllo.

ii) Per entrambi i modelli, dalla differenza tra le curve corrispondenti all'assenza di controllo e alla presenza di controllo ottimale (per grandi valori di β e T rispettivamente) si può dedurre che se il sistema incontrollato è capace di raggiungere un alto valore di $1 - s(t)$, l'applicazione di una strategia di controllo ottimale non aumenta nè diminuisce di molto i costi rispetto ad un'assenza di controllo. Si noti che il costo di applicazione del controllo è zero nel caso di assenza di controllo e che J , in tal caso, altro non è che $-1 + s(T)$. Negli altri casi, l'applicazione del controllo ottimale diminuisce il valore di J , se comparato con l'assenza di strategia.

4.2 Possibili scelte della funzione $\beta(t)$

Nel paragrafo 4.1. abbiamo supposto β costante. Vediamo alcuni esempi in cui invece dipende dal tempo, osservando che la velocità di diffusione è proporzionale all'aumento di interesse suscitato nella popolazione. Consideriamo tre differenti funzioni $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ e $\beta_3(t)$ definite da

$$\beta_1(t) = a_1 + \frac{a_2}{1 + e^{-a_3(t-a_4)}}; \quad (4.1)$$

$$\beta_2(t) = b_1 + \frac{b_2}{1 + e^{b_3(t-b_4)}}; \quad (4.2)$$

$$\beta_3(t) = c_1 + c_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \quad (4.3)$$

con $a_j, b_j, c_j > 0$ e $T > 0$. Pur essendo ovviamente possibili altre possibilità, osserviamo che queste tre scelte abbracciano la maggioranza dei casi di interesse pratico.

La funzione $\beta_1(t)$ rappresenta, per esempio nel caso del programma politico, una sua crescente ed efficace diffusione all'interno della popolazione man mano che ci si avvicina alla data delle elezioni: è il caso in cui il candidato ha saputo fornire un'immagine di sé convincente, proponendosi in maniera intelligente agli occhi dell'opinione pubblica con un'azione di contagio efficiente ed efficace. Un simile modello di diffusione lo si può trovare nell'attività pubblica di Papa Francesco, il quale ha visto giorno dopo giorno incrementare il numero dei follower del suo account twitter nell'arco dell'ultimo anno.

La funzione $\beta_2(t)$ rappresenta invece la graduale perdita di interesse da parte della popolazione. Questa situazione si può verificare per una trasmissione televisiva di scarsa qualità o male impostata dagli autori, fattori che producono un calo di ascolti e, per conseguenza, di interesse. Oppure, quando, nello stesso periodo di lancio di un cosmetico X, una ditta concorrente produce un cosmetico Y molto simile al primo, ma con un rapporto qualità prezzo migliore, o pubblicizzato con più bombardamento. L'effetto sulla popolazione sarà quello di far perdere l'interesse per il cosmetico X a vantaggio di Y.

La funzione $\beta_3(t)$ descrive il così detto *effetto fluttuazione* in cui la velocità di diffusione dell'epidemia (e l'interesse relativo ad una certa informazione) dipende dalla domanda relativa ad un certo prodotto o servizio in maniera periodica dal tempo. L'esempio più classico è la richiesta di biglietti al cinema: per gli spettacoli del fine settimana (in cui si ha più tempo libero) è più alta rispetto a quella per gli spettacoli infrasettimanali. Altro esempio riguarda le tariffe di soggiorno nel comune di Viareggio, che hanno più alta richiesta nel periodo primaverile, estivo ed autunnale (grazie ai festeggiamenti del carnevale e alla presenza degli storici stabilimenti balneari) e più bassa nel periodo invernale.

Volendo studiare qualitativamente quest'ultimo interessante caso, osserviamo che (v. fig. 4.3) nel caso dell'epidemia SIS, il numero degli infetti ottenuti applicando

la strategia di controllo ottimale (caso (1)) è maggiore rispetto a quello che si ottiene con assenza di controllo (caso (2)). Per cui, in caso di effetto fluttuazione, occorre che la fonte investa risorse nella ricerca del controllo ottimo, con l'obiettivo di studiare un sistema di diffusione efficiente ed efficace adatto ad attirare la curiosità dei nodi: per esempio, nel caso del settore alberghiero del comune di Viareggio, la fonte progetta opportune forme di pubblicità di listini prezzi, opzioni last minute, sconti e così via partendo dall'istante $t = 0$ degli inizi della primavera, ponendosi come termine un momento T dell'inizio estate in modo da potersi aspettare un numero di prenotazioni tale da coprire l'intero periodo estivo. Situazione analoga, da un punto di vista qualitativo, si riscontra nell'epidemia SIR.

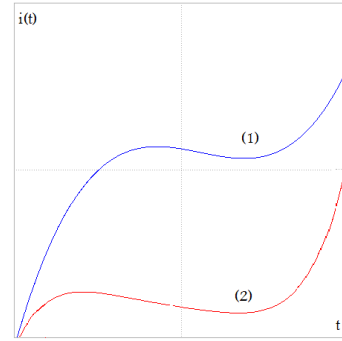


Fig. 4.3

Appendice A

Disuguaglianza di Gronwall

Sia $m(t)$ una funzione continua tale che

$$0 \leq m(t) \leq h(t) + \int_s^t g(\tau)m(\tau)d\tau, \quad s \leq t \leq T, \quad (\text{A.1})$$

dove $g(t) \geq 0$ su $[s, T]$, $\int_s^T g(\tau)d\tau < \infty$ e $h(t)$ limitata su $[s, T]$. Allora, per $t \in [s, T]$ vale

$$m(t) \leq h(t) + \int_s^t g(\tau)h(\tau)e^{\int_r^t g(\xi)d\xi}d\tau. \quad (\text{A.2})$$

Dimostrazione. Poniamo $z(t) = \int_s^t g(\tau)m(\tau)d\tau$. Allora, dopo aver moltiplicato per $g(t)$ la (A.1), si ha

$$z'(t) - g(t)z(t) \leq g(t)h(t).$$

Adesso moltiplichiamo ambo i membri della disuguaglianza per $e^{-\int_r^t g(\xi)d\xi}$ e integriamo in $[s, t]$ da entrambe le parti: otteniamo, essendo $z(s) = 0$,

$$z(t) \leq \int_t^s g(\tau)h(\tau)e^{\int_r^t g(\xi)d\xi}d\tau.$$

Dall'ipotesi (A.1) risulta $m(t) - h(t) \leq z(t)$. La tesi segue immediatamente confrontando queste due ultime disuguaglianze.

□

Corollario (Disuguaglianza di Gronwall). Se $0 \leq m(t) \leq C_1 + C_2 \int_s^t m(\tau)d\tau$ per $s \leq t \leq T$ (dove C_1, C_2 sono costanti reali non negative) allora

$$m(t) \leq C_1 e^{C_2(t-s)}. \quad (\text{A.3})$$

Dimostrazione. Si applica la (A.2) al caso particolare $h(t) \equiv C_1$ e $g(t) \equiv C_2$, e svolgendo l'integrazione.

□

Bibliografia

- [1] K. Kandhway, J. Kuri: *How to run a campaign: Optimal Control of SIS and SIR Information Epidemics*, Appl. Math. Comput. 231 (2014), 79–92
- [2] C. Mascia, E. Montefusco: *Modelli deterministici in epidemiologia*, <http://www1.mat.uniroma1.it/people/mascia/NotEsercizi/modan2.pdf>
- [3] W.H. Fleming, R.W. Rishel: *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Ed. Springer
- [4] A. Calogero: *Appunti di calcolo delle variazioni e controllo ottimo*, <http://www.matapp.unimib.it/~calogero>
- [5] P. Acquistapace: *Appunti di Analisi Funzionale*, <http://www.dm.unipi.it/~acquistp>

Ringraziamenti

Pisa, 21 Luglio 2014

Questa tesi conclude un difficile percorso di studi che ha occupato una buona parte della mia vita, e che non dimenticherò mai. Voglio anzitutto ringraziare me stesso, per non aver ceduto e per non essermi arreso. Per aver trovato, quando più quando meno, la forza di lottare. Per essermi saputo rialzare e, con tanta fatica ed impegno, giungere meritatamente a realizzare un sogno che avevo sin dalla quinta elementare e che, in alcuni momenti, mi è sembrato svanire. Desidero ringraziare, per diretta conseguenza, tutte le persone (e sono state molte) che, sia dentro che fuori l'ambito universitario, hanno cercato di affossarmi, scoraggiarmi, mettermi i bastoni tra le ruote ed impedirmi di prendere la laurea: grazie a voi, oggi, sono un uomo più forte, e di sicuro vincente. Tantissime, d'altro canto, mi hanno sostenuto e alcune meritano di essere espressamente ringraziate:

- i miei genitori, il Giampy e la Piery, che hanno sempre creduto in me, spronandomi ad andare avanti anche nei momenti più difficili;
- mio nonno Serafino, il primo ad introdurmi all'amore per la matematica, e che dal Cielo è sicuramente fiero di me;
- mio zio Roberto (che assieme al Giampy mi ha permesso di lavorare e di studiare al tempo stesso) e mia zia Federica (la più saggia consigliera che esista!);
- mio zio Michele e mia nonna Lina;
- i miei colleghi di lavoro Silvio e Riccardo, per la loro complicità ed amicizia;
- i miei amici Sara e Cristian con i quali (senza nulla togliere a molti altri) ho condiviso avventure nel Dipartimento di Matematica al limite dell'incredibile;
- la mia amica Ilaria, che per me è come una sorella e che è stata l'unica a non avermi MAI abbandonato;
- la prof.ssa Giuseppina Carrara, il miglior esempio di insegnante di matematica che abbia mai avuto il privilegio di conoscere;
- il prof. Paolo Acquistapace, per avermi proposto questa tesi, per la simpatia, l'entusiasmo, la pazienza e la disponibilità che ha dimostrato nei miei confronti;
- il prof. Carlo Petronio e la dott.ssa Carla Spinelli;
- la dott.ssa Gabriella Buchignani, per i suoi consigli e la sua umanità.

Tutti voi mi avete fatto capire la verità che sta dietro alla massima di San Francesco d'Assisi (che ho riportato all'inizio del lavoro) e che desidero citar(mi) nuovamente in questo momento di passaggio tra un percorso appena concluso e uno nuovo che sta per aprirsi, a cui guardo con fiducia: *cominciate col fare ciò che è necessario, poi ciò che vi è possibile. E all'improvviso, vi sorprenderete di saper fare l'impossibile.*

LM