Università degli Studi di Pisa
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

Il problema di Dirichlet per equazioni ellittiche del secondo ordine

Candidato
Alessandro Iacopetti

Relatore
Prof. Paolo Acquistapace

Controrelatore
Dott. Antonio Tarsia

A.A. 2004/2005

Indice

1 Introduzione

In questa tesi faremo una breve panoramica sul problema di Dirichlet per equazioni ellittiche del secondo ordine. Trattandosi di un settore molto vasto ed in continua evoluzione non è certo pensabile di coprire tutte le problematiche ad esso inerenti. Cercheremo di chiarire tutte le questioni fondamentali relative all'esistenza e all'unicità della soluzione in opportuni spazi funzionali, senza toccare però le pur interessanti e rilevanti problematiche sulla regolarità. Inoltre analizzeremo le differenze fra la formulazione classica del problema di Dirichlet e quella variazionale.

Nella prima parte della tesi vengono esposti i risultati principali riguardanti l'esistenza e l'unicità della soluzione per il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} L(u) = f + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

dove $L(u)$ è un operatore differenziale del secondo ordine, definito su un aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^n$, f, f_i sono in $L^2(\Omega)$ e g è un elemento dello spazio di Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$.

Il nostro scopo è quindi cercare una soluzione debole $u \in W^{1,2}(\Omega)$, cioè tale che $L(u) = f$ nel senso delle distribuzioni e tale che u, ristretta alla frontiera di Ω, sia uguale alla funzione assegnata g. Questa ultima affermazione deve però essere precisata: poiché sia u che g sono definite quasi ovunque, non ha senso chiedere $u = g$ punto per punto su un insieme $\partial\Omega$ che ha misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^n$; nell'esposizione chiariremo questo punto.

Considerando i coefficienti della parte quadratica dell'operatore differenziale $L(u)$, vedremo che se essi verificano la condizione di ellitticità, allora esiste un'unica soluzione u di (1). Per ottenere questo risultato ci ricondurremo a teoremi astratti di analisi funzionale per forme bilineari definite positive negli spazi di Hilbert; in particolare enunceremo e dimostreremo il teorema di Lax-Milgram.

Nella seconda parte della tesi discuteremo dell'operatore di traccia, che in sostanza, quando una funzione è regolare su $\overline{\Omega}$, associa ad essa la sua restrizione al bordo $\partial\Omega$. Richiameremo poi alcune definizioni: se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ definiremo gli spazi di Sobolev ad esponente reale $H^{\theta,p}(\Omega)$, con $0 < \theta < 1$; se poi la frontiera $\partial\Omega$ è di classe C^1 definiremo gli spazi $L^p(\partial\Omega)$ e $H^{\theta,p}(\partial\Omega)$.

Estenderemo l'operatore di traccia allo spazio $H^{1,p}(\Omega)$ e per mezzo di esso studieremo il problema di Dirichlet nel caso in cui il dato al bordo è costituito da una funzione $g \in H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$. Infatti risulta poco naturale fissare un dato definito su tutto l'aperto Ω, per poi interessarsi solo ai valori che assume alla frontiera. Con alcuni accorgimenti ci ricondurremo al problema di Dirichlet studiato all'inizio, ottenendo un risultato di esistenza e unicità anche con dato al bordo $g \in H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$.

Nell'ultima sezione discuteremo della non equivalenza fra il problema classico e variazionale sottolineando che ciò discende dalla non surgettività dell'operatore di traccia $\gamma_0 : H^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$. Faremo vedere con due esempi espliciti che vi sono soluzioni classiche del problema di Dirichlet che non sono soluzioni variazionali, e viceversa.

Nelle appendici A e B saranno richiamate le definizioni e i fatti fondamentali riguardanti, rispettivamente, gli spazi L^p e gli spazi si Sobolev ad esponente intero. Nell'appendice C daremo la definizione di frontiera di classe C^k e definiremo l'integrale di superficie; nell'appendice D viene dimostrato il teorema di traccia.

Naturalmente, le questioni analizzate da questa tesi hanno tuttora enormi sviluppi di indagine in differenti direzioni. Ad esempio possiamo citare problemi di esistenza e regolarità per:

- equazioni di ordine superiore,
- sistemi di ordine 2 e di ordine superiore,
- equazioni e sistemi non lineari.

La speranza è di poter studiare qualcuno di questi temi nella futura tesi di laurea specialistica.

2 Nozioni preliminari

In questa sezione vengono date le definizioni di equazione lineare del secondo ordine, di soluzione debole e di equazione ellittica. Nella trattazione faremo uso della teoria elementare degli spazi L^p e delle principali definizioni riguardanti gli spazi di Sobolev ad esponente intero $W^{k,p}(\Omega)$, $H^{k,p}(\Omega)$ e $W_0^{k,p}(\Omega)$. Tutti i fatti fondamentali che utilizzeremo sugli spazi L^p e sugli spazi di Sobolev sono contenuti, rispettivamente, nelle appendici A e B.

Definizione 2.1. *Un'equazione lineare del secondo ordine in forma di divergenza è un'equazione differenziale della forma:*

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i u) + c_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\} + du = f + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \tag{2}$$

dove $a_{ij}, b_i, c_i, d, f, f_i$ sono funzioni assegnate definite in un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$.

Osserviamo che se i coefficienti dell'equazione (2) sono funzioni regolari allora il numero di termini di tale equazione risulta eccessivo: possiamo ad esempio inglobare i termini $\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i u)$ in quelli della forma $c_i\frac{\partial u}{\partial x_i}$ e du.

Definizione 2.2. *Una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ è soluzione debole dell'equazione (2) se per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ risulta*

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i u - f_i\right\}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx - \int_\Omega\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + du - f\right\}\phi\, dx = 0. \tag{3}$$

Osserviamo che se la soluzione $u(x)$ ed i dati sono regolari, la nozione di soluzione debole coincide con quella di soluzione classica: infatti se $u(x)$ è una soluzione classica allora moltiplicando la (2) per ϕ ed integrando per parti si ottiene la (3), quindi $u(x)$ è una soluzione debole. Viceversa, se $u(x)$ è una soluzione debole allora integrando per parti i termini contenenti le derivate della ϕ nella (3), e tenendo conto dell'arbitrarietà di ϕ otteniamo che $u(x)$ soddisfa la (2).

Definizione 2.3. *L'equazione (2) si dice ellittica se esiste un numero reale $\nu > 0$ tale che*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\ \xi_i\ \xi_j \geq \nu\ |\xi|^2 \tag{4}$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, e per quasi ogni $x \in \Omega$.

Se, per ogni $x \in \Omega$, indichiamo con $A(x)$ la matrice dei coefficienti $a_{ij}(x)$, allora l'ipotesi di ellitticità corrisponde a chiedere che la matrice $A(x)$ sia definita positiva uniformemente al variare di x in Ω.

Esempio 2.1. L'equazione di Laplace

$$\Delta u \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \;=\; f + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \tag{5}$$

è un esempio tipico di equazione ellittica, infatti la matrice dei coefficienti è la matrice identica di ordine n che è ovviamente definita positiva.

3 Il problema di Dirichlet

Il problema di Dirichlet per un'equazione della forma (2) in un aperto Ω consiste nel trovare una soluzione $u(x)$ definita in Ω dell'equazione data, che assuma valori assegnati sul bordo di Ω. Più precisamente:

Definizione 3.1. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, f_i, f funzioni di $L^2(\Omega)$ e g una funzione di $W^{1,2}(\Omega)$. Diremo che $u \in W^{1,2}(\Omega)$ è una soluzione del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} L(u) = f + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

se per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + b_i u - f_i \right\} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\, dx - \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + du - f \right\} \phi\, dx = 0 \tag{7}$$

ed inoltre

$$u - g \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{8}$$

Osserviamo che la (7) è la forma debole dell'equazione (2), mentre la (8) è una forma debole della condizione $u = g$ su $\partial\Omega$. Infatti se u e g sono di classe $C^1(\overline{\Omega})$ si avrà $u = g$ su $\partial\Omega$ se e solo se $u - g \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Adesso vogliamo occuparci dell'esistenza e unicità di una soluzione del problema di Dirichlet; per semplicità considereremo l'equazione (2) senza termini di grado inferiore, cioè con $b_i = c_i = d = 0$, quindi ci riduciamo a risolvere il problema:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{9}$$

con i coefficienti $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $g \in W^{1,2}(\Omega)$ e le funzioni f, f_i appartenenti a $L^2(\Omega)$. Osserviamo che possiamo anche supporre $g = 0$ senza perdita di generalità; infatti possiamo ricondurci a questo caso considerando la funzione $w = u - g$, che verifica l'equazione

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) = f + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

con

$$F_i = f_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Il problema è quindi di cercare una funzione $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, tale che risulti

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \, dx \; = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - f\phi \right) dx \tag{10}$$

per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ o, in modo equivalente dato che $C_0^\infty(\Omega)$ è denso in $W_0^{1,2}(\Omega)$, per ogni $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Per risolvere questo problema utilizzeremo teoremi generali di analisi funzionale; per cominciare enunciamo senza dimostrazione il seguente teorema, che non è altro che una delle possibili formulazioni del teorema di Poincarè.

Teorema 3.1. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e sia $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Allora esiste una costante positiva c dipendente da n e da p tale che*

$$\|u\|_{p,\Omega} \leq c(n,p)(m(\Omega))^{1/n} \|\nabla u\|_{p,\Omega}$$

dove m è la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Per una dimostrazione si veda E.Giusti [10]. □

Proposizione 3.1. *Sia $A(u,\phi)$ l'applicazione che manda (u,ϕ) nel primo membro della (10) e $F(\phi)$ quella che manda ϕ nel secondo membro di (10). Allora A è una forma bilineare continua su $W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega)$, mentre F è un funzionale lineare e continuo su $W_0^{1,2}(\Omega)$. Se supponiamo che l'equazione (9) sia ellittica allora A è coerciva, cioè esiste $\alpha > 0$ tale che $A(u,u) \geq \alpha \|u\|_{1,2}^2$ per ogni $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Dimostrazione. La verifica della bilinearità di A e della linearità di F è immediata; per quanto riguarda la continuità di F, usando la disuguaglianza di Hölder si ha

$$|F(\phi)| \leq \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{2,\Omega} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\|_{2,\Omega} + \|f\|_{2,\Omega} \|\phi\|_{2,\Omega} \leq \left(\|f\|_{2,\Omega} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{2,\Omega} \right) \|\phi\|_{1,2,\Omega} .$$

La forma bilineare A è continua: infatti grazie alla limitatezza delle funzioni a_{ij} risulta

$$|A(u,\phi)| \leq M \|u\|_{1,2,\Omega} \|\phi\|_{1,2,\Omega} .$$

Se vale anche l'ipotesi di ellitticità allora in particolare

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \geq \nu |\nabla u|^2 \text{ q.o. in } \Omega,$$

e dunque

$$A(u,u) \geq \nu \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \alpha \|u\|_{1,2,\Omega}^2$$

dove per l'ultima disuguaglianza abbiamo usato il teorema 3.1. □

Osserviamo che $W_0^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert, con il prodotto scalare

$$(u,v) = \int_\Omega uv\ dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\ dx.$$

Tenendo presente la proposizione 3.1 siamo ricondotti al seguente problema astratto: dati in uno spazio di Hilbert H un funzionale F lineare e continuo ed una forma bilineare $A(u,\phi)$ continua e coerciva:

$$|A(u,\phi)| \le M\, \|u\|_H\, \|\phi\|_H \qquad \forall\ u,\phi \in H,$$

$$A(u,u) \ge \alpha\, \|u\|_H^2 \qquad \forall\ u \in H,$$

trovare un elemento $u \in H$ tale che risulti

$$A(u,\phi) = F(\phi), \quad \forall \phi \in H.$$

Il caso più semplice si ha quando la forma bilineare A è simmetrica, cioè

$$A(u,\phi) \ = \ A(\phi,u) \quad \forall\ u,\phi \in H$$

che corrisponde alla simmetria dei coefficienti: $a_{ij} = a_{ji}$. Per dimostrare che esiste ed è unica la soluzione u in H del problema nel caso simmetrico ci serve il fondamentale teorema di Riesz che ci limitiamo ad enunciare:

Teorema 3.2 (di Riesz). *Sia H uno spazio di Hilbert. Per ogni $F \in H^*$ esiste un unico $z \in H$ tale che*

$$F(x) = (x,z)_H \qquad \forall x \in H$$

ed inoltre si ha

$$\|F\|_{H^*} = \sup_{v\neq 0} \frac{|F(v)|}{\|v\|_H} = \|z\|_H \ .$$

Teorema 3.3. *Sia H uno spazio di Hilbert reale, $F \in H^*$ ed A: $H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineare continua, coerciva e simmetrica. Allora esiste un unico $u \in H$ tale che*

$$F(\phi) \ = \ A(u,\phi) \qquad \forall \phi \in H$$

ed inoltre si ha

$$\|u\|_H \le \frac{1}{\alpha}\, \|F\|_{H^*}$$

Dimostrazione. La forma bilineare $A(u,v)$ definisce in H un prodotto scalare, ed una norma

$$|||u||| = \ \sqrt{A(u,u)}$$

equivalente a quella di partenza:

$$\alpha \|u\|_H^2 \leq |||u|||^2 \leq M \|u\|_H^2 .$$

Se si munisce H di tale prodotto scalare, F è ancora continuo, infatti per ipotesi $F \in H^*$ quindi si ha $|F(\phi)| \leq \|F\|_{H^*} \|\phi\|_H$; grazie alla coercività di A si ricava $\|\phi\|_H \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} |||\phi|||$ e quindi $|F(\phi)| \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|F\|_{H^*} |||\phi|||$, inoltre

$$|||F|||_* = \sup_{v \neq 0} \frac{|F(v)|}{|||v|||} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|F\|_{H^*} .$$

La tesi segue immediatamente dal teorema di Riesz:

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} |||u||| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} |||F|||_* \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H^*} .$$

□

Se la forma bilineare non è simmetrica si ottiene lo stesso risultato grazie al seguente teorema:

Teorema 3.4 (di Lax-Milgram). *Sia H uno spazio di Hilbert reale, $F \in H^*$ un funzionale lineare e continuo ed $A : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineare continua e coerciva. Allora esiste un unico $u \in H$ tale che*

$$A(u, \phi) = F(\phi) \qquad \forall \phi \in H$$

e inoltre

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H^*}$$

Dimostrazione. Per ogni v fissato, consideriamo l'applicazione $F_v : H \to \mathbb{R}$ data da

$$F_v(\phi) = A(v, \phi)_H.$$

Grazie al fatto che A è una forma bilineare continua si ha immediatamente che F_v è lineare e continua, dunque per il teorema di Riesz esiste un unico elemento $T(v)$ di H tale che

$$F_v(\phi) = A(v, \phi) = (T(v), \phi)_H \qquad \forall \phi \in H.$$

Si ottiene facilmente che l'applicazione $T : H \to$ H è lineare e continua, infatti $T(\lambda v + \mu w)$ è per definizione l'unico elemento di H tale che $F_{\lambda v + \mu w}(\phi) = A(\lambda v + \mu w, \phi)$ $= (T(\lambda v + \mu w), \phi)_H$ per ogni $\phi \in H$. Grazie alla bilinearità di A otteniamo:

$$F_{\lambda v + \mu w}(\phi) = A(\lambda v + \mu w, \phi) = \lambda A(v, \phi) + \mu A(w, \phi)$$

$$= \lambda(T(v),\phi)_H + \mu(T(w),\phi)_H = (\lambda T(v) + \mu T(w),\phi)_H \quad \forall v,w \in H \ \ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

quindi $T(\lambda v + \mu w) = \lambda T(v) + \mu T(w)$ e la linearità è provata. Per quanto riguarda la continuità, se $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in H convergente a v, allora grazie alla continuità di A:

$$\lim_{n\to\infty} \|T(v_n) - T(v)\|_H^2 = \lim_{n\to\infty} (T(v_n) - T(v), T(v_n) - T(v))_H =$$

$$= \lim_{n\to\infty} A(v_n - v, v_n - v) = 0$$

e questo prova che T è continua.

Facciamo vedere adesso che $T(H)$ è chiuso. Per mostrare questo consideriamo una successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $T(H)$, $y_n = T(x_n)$, convergente a y_0; vogliamo mostrare che $y_0 \in T(H)$. Dalla continuità e coercività di A otteniamo che per ogni $v \in H$

$$\alpha \|v\|_H \le \|T(v)\|_H \le M \|v\|_H \tag{11}$$

ne deriva che

$$\|x_m - x_n\|_H \le \frac{1}{\alpha} \|y_m - y_n\|_H \qquad \forall m,n \in \mathbb{N} \tag{12}$$

e dunque x_n tenderà a qualche $x_0 \in H$. Per la continuità di T risulta $T(x_0) = y_0$ e dunque $y_0 \in T(H)$.

Sia ora z un elemento di H ortogonale a $T(H)$, cioè tale che

$$(T(v), z)_H = 0 \qquad \forall v \in H,$$

allora

$$(T(z), z)_H = 0 = A(z,z)$$

cosicchè $z = 0$ e dunque T è surgettiva. Ne segue che esiste l'applicazione inversa di T, $T^{-1} : H \to H$ e per la (11) si ha

$$\left\|T^{-1}(v)\right\|_H \le \frac{1}{\alpha} \|v\|_H \qquad \forall v \in H. \tag{13}$$

D'altra parte esiste un unico $w \in H$, con $\|w\|_H \le \|F\|_{H^*}$ tale che

$$(w,\phi)_H = F(\phi) \qquad \forall \phi \in H.$$

Posto $u = T^{-1}(w)$ si ha

$$A(u,\phi) = (T(u),\phi)_H = F(\phi) \quad \forall \phi \in H$$

e

$$\|u\|_H = \left\|T^{-1} w\right\|_H \le \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H^*}$$

che conclude la dimostrazione. □

Il teorema di Lax-Milgram è un teorema astratto: se lo traduciamo in termini di equazioni differenziali diventa il seguente:

Teorema 3.5. *Il problema di Dirichlet per l'equazione ellittica (9), con* Ω *aperto limitato di* $\mathbb{R}^n$, f, f_i *in* $L^2(\Omega)$ *e* g *in* $W^{1,2}(\Omega)$ *ha un'unica soluzione* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *e si ha*

$$\|u\|_{1,2,\Omega} \leq \frac{1}{\alpha}\left\{\|f\|_{2,\Omega} + \sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{2,\Omega} + M\,\|g\|_{1,2,\Omega}\right\}. \tag{14}$$

Dimostrazione. Applichiamo il teorema di Lax-Milgram scegliendo come spazio di Hilbert $W_0^{1,2}(\Omega)$, come funzionale lineare e continuo $F(\phi) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - f\phi\right) dx$, dove $F_i = f_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial g}{\partial x_j}$; inoltre prendiamo come forma bilineare continua e coerciva $A(w,\phi) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\,dx$. Allora il teorema 3.4 ci dice che esiste un'unica $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che per ogni $\phi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ vale

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\,dx = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - f\phi\right) dx$$

ed inoltre

$$\|w\|_{1,2,\Omega} \leq \frac{1}{\alpha}\,\|F\|_{(W^{1,2}(\Omega))^*}\,.$$

Allora si verifica immediatamente che $u = w + g$ è la soluzione del problema (9) e che vale la stima (14). □

4 Tracce di funzioni $H^{k,p}(\Omega)$, con $k \in \mathbb{N}$

Introduciamo anzitutto una notazione: per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, scriveremo $x = (\overline{x}, x_n)$, con $\overline{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n \in \mathbb{R}$. Cominciamo con il definire le tracce nel caso in cui Ω è un cilindro:

$$\Omega = \Gamma \times]0, a[, \quad \text{con } \Gamma \text{ aperto di } \mathbb{R}^{n-1}_{\overline{x}} \text{ e } \ 0 < a < +\infty.$$

Anzitutto diamo questa definizione:

Definizione 4.1. *Sia $\gamma_0 : C^0(\overline{\Omega}) \to C^0(\Gamma)$ l'applicazione $u \to \gamma_0 u = u\,|_\Gamma$; diremo che $\gamma_0 u$ è la traccia di u su Γ.*

Ovviamente γ_0 è un operatore lineare; inoltre si ha:

Proposizione 4.1. *L'operatore lineare γ_0 è continuo da $C^1(\overline{\Omega})$, munito della norma $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$, in $L^p(\Gamma)$.*

Dimostrazione. Sia $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e sia $\overline{x} \in \Gamma$. Allora per ogni $x_n \in (0, a)$ e $x = (\overline{x}, x_n)$

$$u(x) = u(\overline{x}, 0) + \int_0^{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} u(\overline{x}, t)\ dt$$

da cui

$$|u(\overline{x}, 0)|^p \leq c(p) \left[|u(x)|^p + a^{p-1} \int_0^a \left| \frac{\partial}{\partial x_n} u(\overline{x}, t) \right|^p\ dt \right]$$

e quindi integrando su Ω,

$$\int_\Gamma |u(\overline{x}, 0)|^p\ d\overline{x} \leq \frac{c(p)}{a} \left[\int_\Omega |u|^p\ dx + a^p \int_\Omega \left| \frac{\partial}{\partial x_n} u(x) \right|^p dx \right] \leq$$

$$\leq c(p, a) \left[\|u\|^p_{p,\Omega} + \|u\|^p_{1,p,\Omega} \right].$$

□

Da questa proposizione segue che esiste un unico prolungamento di γ_0 lineare e continuo $H^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Gamma)$, che continueremo a chiamare γ_0.

Abbiamo dato la nozione di traccia nel caso in cui $\Omega = \Gamma \times]0, a[$, con a finito; è possibile dimostrare che i risultati ottenuti in questo caso valgono anche nell'ipotesi che $a = +\infty$, cioè $\Omega = \Gamma \times]0, +\infty[$. Quello che ci interessa però, è definire l'operatore di traccia su $H^{1,p}(\Omega)$, con Ω aperto limitato qualsiasi di $\mathbb{R}^n$; con opportuni accorgimenti tecnici ciò è possibile, a patto però che la frontiera $\partial\Omega$ sia sufficientemente regolare. Se $\partial\Omega$ è di classe C^1 (vedi appendice C), si può definire il concetto di integrale di superficie e con ciò definiamo lo spazio $L^p(\partial\Omega)$ nel modo seguente:

Definizione 4.2. *Se Ω è un aperto limitato avente frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1, lo spazio $L^p(\partial\Omega)$ è la chiusura di $C^0(\partial\Omega)$ rispetto alla norma*

$$\|g\|_{p,\partial\Omega} = \left(\int_{\partial\Omega} |g|^p \, d\sigma \right)^{1/p}.$$

Con questa definizione e con opportuni teoremi (vedi appendice D), che generalizzano quanto abbiamo visto nel caso del cilindro, si trova che la traccia γ_0 è un'applicazione lineare e continua di $C^1(\overline{\Omega})$, munito della norma $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$, in $L^p(\partial\Omega)$ e quindi si prolunga ad un operatore lineare e continuo $\gamma_0 : H^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ tale che:

$$\|u\|^p_{p,\partial\Omega} \le c(p,\Omega) \, \|u\|^p_{1,p,\Omega} \quad \forall u \in H^{1,p}(\Omega).$$

Adesso ricordiamo come si definiscono gli spazi $H^{\theta,p}(\Omega)$ con θ reale; nel caso che ci interessa sarà $0 < \theta < 1$.

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ avente frontiera di classe C^1. Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione misurabile secondo Lebesgue, definiamo:

$$|u|^p_{\theta,p,\Omega} = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\theta}} \, dxdy \; ;$$

$$C^1_\#(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C^1(\overline{\Omega}) : \; |u|_{\theta,p,\Omega} < +\infty \right\}.$$

Definizione 4.3. *Per $0 < \theta < 1$, indicheremo con $H^{\theta,p}(\Omega)$ la chiusura di $C^1_\#(\overline{\Omega})$ rispetto alla norma $\|u\|_{\theta,p,\Omega} = (\|u\|^p_{p,\Omega} + |u|^p_{\theta,p,\Omega})^{1/p}$.*

Osserviamo che se l'aperto Ω è limitato allora $C^1(\overline{\Omega}) = C^1_\#(\overline{\Omega})$. Infatti se $u \in C^1(\overline{\Omega})$ si ha:

$$|u(x) - u(y)| \le \|\nabla u\|_{\infty,\Omega} \, |x-y| \, ,$$

quindi

$$\frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+\theta p}} \le C \, |x-y|^{p(1-\theta)-n} \, .$$

L'integrale

$$\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{n-p(1-\theta)}} \, dy$$

è convergente in quanto $0 < \theta < 1$, quindi grazie alla limitatezza di Ω:

$$|u|^p_{\theta,p,\Omega} = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\theta}} \, dxdy \le C(\Omega) < +\infty.$$

Ci proponiamo adesso di definire gli spazi $H^{\theta,p}(\partial\Omega)$, con Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ avente frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1.

Poiché la frontiera è regolare e compatta esistono $\{U_j\}_{j=1,..,m}$ ricoprimento finito di $\partial\Omega$ ed una famiglia $\{\varphi_j\}_{j=1,..,m}$, di diffeomorfismi (di classe C^1), $\varphi_j : U_j \to \mathcal{Q}$, dove $\mathcal{Q} = \{y \in \mathbb{R}^n,\ y = (\overline{y}, y_n) :\ |\overline{y}| < 1,\ -1 < y_n < 1\}$. Ricordiamo che per definizione (vedi appendice C) i diffeomorfismi φ_j verificano le seguenti proprietà:

$$\varphi(\Omega \cap U_j) = \mathcal{Q}^+,\ \varphi(\partial\Omega \cap U_j) = \mathcal{Q} \cap \{y_n = 0\}.$$

Sia $\{\alpha_j\}_{j=1,..,m}$ una partizione dell'unità su $\partial\Omega$ subordinata al ricoprimento $\{U_j\}_{j=1,..,m}$. Allora se u è una funzione definita su $\partial\Omega$ (per esempio $u \in L^p(\partial\Omega)$), la possiamo decomporre in

$$u = \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j u)$$

e definiamo:

$$\varphi_j^*(\alpha_j u)(\overline{y}, 0) = (\alpha_j u)(\varphi_j^{-1}(\overline{y}, 0)),\quad \overline{y} \in \mathcal{Q} \cap \{y_n = 0\}.$$

Siccome α_j è a supporto compatto in $U_j \cap \partial\Omega$, la funzione $\varphi_j^*(\alpha_j u)$ è a supporto compatto in $\mathcal{Q} \cap \{y_n = 0\}$ e dunque la si può considerare anche definita su $\mathbb{R}^{n-1}_{\overline{y}}$, prolungata a 0 fuori da $\mathcal{Q} \cap \{y_n = 0\}$.

Definizione 4.4. *Sia Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ avente frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1, allora definiamo*

$$H^{\theta,p}(\partial\Omega) = \{u \in L^p(\partial\Omega) : \varphi_j^*(\alpha_j u) \in H^{\theta,p}(\mathbb{R}^{n-1}_{\overline{y}}),\ j = 1, .., m\}.$$

Utilizzando i cambiamenti di carte su $\partial\Omega$ si può far vedere che questa definizione è indipendente dalla scelta del sistema di carte locali (U_j, φ_j) e dalla partizione dell'unità $\{\alpha_j\}$, inoltre si verifica che

$$\|u\|_{\theta,p,\partial\Omega} = \left(\sum_{j=1}^{m} \left\|\varphi_j^*(\alpha_j u)\right\|^p_{\theta,p,\mathbb{R}^{n-1}_{\overline{y}}} \right)^{1/p}$$

è una norma su $H^{\theta,p}(\partial\Omega)$ che lo rende uno spazio di Banach. Osserviamo che tale norma dipende dall'atlante $\{(U_j, \varphi_j)\ ,\ j = 1, ..., m\}$ scelto per $\partial\Omega$ e dalla partizione dell'unità $\{\alpha_j\}$; tuttavia si verifica che al variare di questi le norme sono equivalenti. L'operatore di traccia $\gamma_0 : H^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ è lineare e continuo; ci chiediamo se è surgettivo. La risposta è negativa e ciò ha una profonda ripercussione nella teoria dei problemi differenziali, come vedremo nella sezione 1.5.

Ci interessa quindi caratterizzare il sottospazio di $L^p(\partial\Omega)$ dato da $\gamma_0(H^{1,p}(\Omega))$; in effetti vale il seguente teorema che ci limitiamo solo ad enunciare:

Teorema 4.1. *Se Ω è un aperto limitato tale che $\partial\Omega$ è di classe C^1, allora si ha*

$$\gamma_0(H^{1,p}(\Omega)) = H^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega).$$

Dimostrazione. Per una dimostrazione si veda J.Lions, E.Magenes [11]. $\square$

5 Condizioni al contorno in $H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$

Nella sezione 1.2 abbiamo studiato il problema di Dirichlet nel caso in cui la condizione al contorno era data da $u = g$ in $\partial\Omega$, con $g \in W^{1,2}(\Omega)$. Questa condizione va intesa come $u - g \in W_0^{1,2}(\Omega)$, infatti non ha senso definire l'uguaglianza punto per punto di due funzioni definite quasi ovunque su un insieme $\partial\Omega$ avente misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^n$.

Sia Ω un aperto limitato tale che la sua frontiera $\partial\Omega$ sia di classe C^1, in particolare Ω verifica la proprietà del segmento quindi $W^{k,p}(\Omega) = H^{k,p}(\Omega)$. Assegnare come dato al bordo una funzione g definita in $H^{1,2}(\Omega)$ risulta poco naturale, infatti siamo interessati solo ai valori che essa assume su $\partial\Omega$. Sia g una funzione appartenente a $H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$; vogliamo studiare il problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} L(u) = f + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, & u \in H^{1,2}(\Omega) \\ \gamma_0 u = g & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{15}$$

dove $\gamma_0 : H^{1,2}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ è la traccia. Ricordiamo che la traccia è l'applicazione lineare che estende per continuità ad $H^{1,2}(\Omega)$ la restrizione rispetto alla frontiera $\partial\Omega$

$$r : C^1(\overline{\Omega}) \to L^p(\partial\Omega).$$

Grazie a quanto visto nella sezione precedente e nel teorema 4.1 si ha che

$$\gamma_0 : H^{1,2}(\Omega) \to H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$$

risulta essere un'applicazione lineare continua e surgettiva. Consideriamo allora l'insieme

$$R_g = \left\{ G \in H^{1,2}(\Omega) : \gamma_0 G = g \right\}$$

(che è non vuoto visto che γ_0 è surgettiva) e sia G un suo elemento; allora il problema (15) è equivalente a:

$$\begin{cases} L(u) = f + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, & u \in H^{1,2}(\Omega) \\ u - G \in H_0^{1,2}(\Omega). \end{cases} \tag{16}$$

Adesso enunciamo un lemma, valido in generale per spazi di Banach, che ci consentirà nel nostro caso di stimare la norma $H^{1,2}(\Omega)$ di G, elemento di R_g, con quella di g in $H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$.

Lemma 5.1. *Siano X, Y spazi di Banach e sia $T \in L(X,Y)$ un operatore surgettivo. Allora esiste $c > 0$ tale che:*

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X : \ Tx = y \ e \ \|x\|_X \leq c \|y\|_Y .$$

Dimostrazione. Consideriamo su X la relazione

$$x \simeq x^{'} \Longleftrightarrow T(x - x^{'}) = 0,$$

la quale, ovviamente, è una relazione di equivalenza su X. Consideriamo lo spazio quoziente $X/\mathrm{Ker}\, T$ e definiamo:

$$\|[x]\|_{X/\mathrm{Ker}\, T} = \inf_{\xi \in [x]} \|\xi\|_X ,$$

si verifica facilmente che questa è una norma su $X/\mathrm{Ker}\, T$. Proviamo adesso che lo spazio normato $(X/\mathrm{Ker}\, T, \|\cdot\|_{X/\mathrm{Ker}\, T})$ è uno spazio di Banach. Sia $\{[x_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $X/\mathrm{Ker}\, T$; allora posso trovare, grazie alla definizione della norma $\|\cdot\|_{X/\mathrm{Ker}\, T}$, una successione $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di Cauchy in X, con $\xi_n \in [x_n]$: quindi si ha $\xi_n \to \xi$ in X, da cui si vede che $[x_n] \to [\xi]$ in $X/\mathrm{Ker}\, T$. Consideriamo allora l'applicazione $\widetilde{T} : X/\mathrm{Ker}\, T \to Y$, definita da $\widetilde{T}([x]) = Tx$; risulta chiaro che $\widetilde{T}$ è ben definita, lineare, continua e invertibile; esiste quindi $\widetilde{T}^{-1} : Y \to X/\mathrm{Ker}\, T$.

Per il teorema dell'applicazione aperta applicato a $\widetilde{T}$ risulta che $\widetilde{T}^{-1}$ è continua, quindi:

$$\exists c : \left\| \widetilde{T}^{-1} y \right\|_{X/\mathrm{Ker}\, T} \leq c \|y\|_Y \quad \forall y \in Y.$$

In particolare $\exists \xi_y \in [\widetilde{T}^{-1}(y)]$ tale che $\|\xi_y\|_{X/\mathrm{Ker}\, T} \leq 2c \|y\|_Y$, il che prova il lemma in quanto:

$$T(\xi_y) = \widetilde{T}[\xi_y] = \widetilde{T}(\widetilde{T}^{-1}(y)) = y.$$

□

Applicando il lemma all'operatore di traccia γ_0 otteniamo che

$$\inf_{G \in R_g} \|G\|_{1,2,\Omega} \leq \ c \|g\|_{\frac{1}{2},2,\partial\Omega} .$$

Sia $G \in R_g$, se $u \in H^{1,2}(\Omega)$ è una soluzione del problema (16), allora posta $w = u - G$, ci riconduciamo a risolvere il seguente:

$$\begin{cases} L(w) = f + L(G) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \\ w \in H_0^{1,2}(\Omega). \end{cases} \tag{17}$$

Osserviamo che

$$L(G)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial G}{\partial x_j})=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}[(A\cdot\nabla G)_i]=\mathrm{div}(A\cdot\nabla G),$$

dove $A(x)$ è la matrice dei coefficienti $a_{ij}(x)$ dell'operatore differenziale L. Poiché $G\in H^{1,2}(\Omega)$, allora $A\cdot\nabla G\in L^2(\Omega)$, quindi possiamo inglobare il termine $L(G)$ in $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$.

Il teorema di Lax-Milgram può essere adesso applicato, quindi esiste un'unica soluzione w in $H_0^{1,2}(\Omega)$ di (17) e si ottiene:

$$\begin{aligned}
\|w\|_{1,2,\Omega} &\leq \frac{1}{\alpha}\left\{\|f\|_{2,\Omega}+\sum_{i=1}^{n}\|f_i+(A\cdot\nabla G)_i\|_{2,\Omega}\right\}\\
&\leq \frac{1}{\alpha}\left\{\|f\|_{2,\Omega}+\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{2,\Omega}+\sum_{i=1}^{n}\|(A\cdot\nabla G)_i\|_{2,\Omega}\right\}\\
&\leq \frac{1}{\alpha}\left\{\|f\|_{2,\Omega}+\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{2,\Omega}+\sum_{i=1}^{n}M\,\|(\nabla G)_i\|_{2,\Omega}\right\}\\
&\leq \frac{1}{\alpha}\left\{\|f\|_{2,\Omega}+\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{2,\Omega}+M\,\|G\|_{1,2,\Omega}\right\}\\
&\leq \frac{1}{\alpha}\left\{\|f\|_{2,\Omega}+\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{2,\Omega}+cM\,\|g\|_{\frac{1}{2},2,\partial\Omega}\right\}.
\end{aligned}$$

Quindi, ricordando che avevamo posto $w=u-G$, abbiamo trovato che esiste un'unica soluzione $u\in H^{1,2}(\Omega)$ del problema (15) ed inoltre vale la stima

$$\|u\|_{1,2,\Omega}\leq\frac{1}{\alpha}\left\{\|f\|_{2,\Omega}+\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{2,\Omega}+\tilde{c}\,\|g\|_{\frac{1}{2},2,\partial\Omega}\right\}.$$

6 Problema classico e variazionale a confronto

In questa sezione vogliamo discutere della problematica riguardante la non surgettività dell'operatore di traccia $\gamma_0 : H^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ e della ripercussione che questo fatto ha sulla teoria delle equazioni differenziali.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, tale che la frontiera $\partial\Omega$ sia di classe C^1. Per il problema di Dirichlet classico

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{18}$$

sappiamo dalla teoria che per ogni fissata $g \in C^0(\partial\Omega)$ esiste un'unica soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, ed inoltre vale la stima

$$\|u\|_{\infty,\Omega} \leq \|g\|_{\infty,\partial\Omega} .$$

Questo problema si può impostare dal punto di vista variazionale nel modo che è stato esposto nella precedente sezione. Per quanto visto nella sezione 1.4 fissata $g \in H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ esiste un'unica soluzione $u \in H^{1,2}(\Omega)$ del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \gamma_0 u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{19}$$

ed inoltre vale

$$\|u\|_{1,2,\Omega} \leq c\,\|g\|_{\frac{1}{2},2,\partial\Omega} .$$

Vogliamo sapere quando una soluzione del problema classico è anche soluzione del problema variazionale e viceversa; per prima cosa vediamo con due esempi come sono messi fra loro gli spazi $C^0(\partial\Omega)$ e $H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$. Per illustrare gli esempi faremo uso di un lemma, prima di enunciarlo ricorderemo un fatto sugli spazi di Sobolev ed introdurremo una notazione.

Sia $u \in H^{\theta,2}(0, 2\pi)$, con $0 < \theta < 1$, ricordiamo che si può dimostrare che la norma

$$\|u\|^2_{\theta,2,(0,2\pi)} = \int_0^{2\pi} |u(x)|^2\,dx \;+ \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{1+2\theta}}\,dxdy$$

è equivalente alla norma

$$\|u\|^2_{H^\theta(0,2\pi)} = \int_{\mathbb{R}} |\hat{v}(\xi)|^2\,(1 + |\xi|^2)^\theta d\xi,$$

dove $\hat{v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} v(x)e^{-i\xi x}dx$ è la trasformata di Fourier della funzione v, definita da

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{in } [0, 2\pi] \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Possiamo quindi caratterizzare lo spazio $H^{\theta,2}(0,2\pi)$ come

$$H^{\theta,2}(0,2\pi) = \{u \in L^2(0,2\pi) : \int_{\mathbb{R}} |\hat{v}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^\theta d\xi < +\infty\}.$$

Per una dimostrazione di questi fatti si veda R.A. Adams [4].

Lemma 6.1. *Sia $u \in L^2(0,2\pi)$, allora si ha*

$$u \in H^{\theta,2}(0,2\pi) \text{ se e solo se } \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{v}(k)|^2 (1+k^2)^\theta < +\infty,$$

e in tale caso le norme su $H^{\theta,2}(0,2\pi)$

$$\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 \, dx \; + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{1+2\theta}} \, dxdy, \; \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{v}(k)|^2 (1+k^2)^\theta$$

sono equivalenti.

Dimostrazione. Sia $u \in H^{\theta,2}(0,2\pi)$, e sia v il prolungamento a 0 di u fuori di $(0,2\pi)$. Allora $\hat{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (perché $x^\alpha v(x) \in L^1(\mathbb{R})$, per ogni $\alpha \in \mathbb{N}$) e quindi esiste $M \geq 0$ tale che

$$|\hat{v}(\xi)| + \left|\hat{v}^{'}(\xi)\right| \leq \frac{M}{(1+|\xi|^2)^2} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Ciò premesso,

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{v}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^\theta d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} |\hat{v}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^\theta d\xi$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} \left[|\hat{v}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^\theta - |\hat{v}(k)|^2 (1+|k|^2)^\theta\right] d\xi + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{v}(k)|^2 (1+|k|^2)^\theta.$$

Per ogni $\xi \in [k, k+1]$

$$\left||\hat{v}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^\theta - |\hat{v}(k)|^2 (1+|k|^2)^\theta\right| = \left|D\left[|\hat{v}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^\theta\right]_{\xi=\eta} (\xi-k)\right|$$

$$= \left|\left(2\hat{v}(\eta)\hat{v}^{'}(\eta)(1+\eta^2)^\theta + |\hat{v}(\eta)|^2 \frac{2\eta\theta}{(1-\eta^2)^{1-\theta}}\right)(\xi-k)\right| \leq \frac{4M^2}{(1+\eta^2)^{2-\theta}}$$

$$\leq \frac{4M^2}{1+(k-1)^2}$$

e quindi

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{v}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^\theta d\xi \ \leq \ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{4M^2}{1+(k-1)^2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{v}(k)|^2 (1+|k|^2)^\theta.$$

D'altra parte vale anche ovviamente

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{v}(k)|^2 (1+|k|^2)^\theta \leq \int_{\mathbb{R}} |\hat{v}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^\theta d\xi + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{4M^2}{1+(k-1)^2}$$

e quindi l'equivalenza $u \in H^{\theta,2}(0,2\pi) \Longleftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{v}(k)|^2 (1+k^2)^\theta < +\infty$ risulta provata.

Dimostriamo adesso che le norme sono equivalenti; per calcolo diretto si può mostrare che

$$\|u\|_{\theta,2,(0,2\pi)} \leq C \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{v}(k)|^2 (1+k^2)^\theta \right)^{1/2} \quad \forall u \in H^{\theta,2}(0,2\pi).$$

Ciò prova che l'applicazione identità (che è un isomorfismo lineare) è continua da $H^{\theta,2}(0,2\pi)$ in sé, mettendo in partenza la norma

$$\|u\|_1 = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{v}(k)|^2 (1+k^2)^\theta \right)^{1/2}$$

e in arrivo la norma intrinseca

$$\|u\|_{\theta,2,(0,2\pi)} = \left(\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 \, dx \ + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{1+2\theta}} \ dxdy \right)^{1/2}.$$

Per il teorema dell'applicazione aperta, anche l'inversa dell'identità è continua, quindi esiste $N > 0$ tale che

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{v}(k)|^2 (1+k^2)^\theta \right)^{1/2} \leq N \|u\|_{\theta,2,(0,2\pi)} \quad \forall u \in H^{\theta,2}(0,2\pi).$$

□

Osservazione 6.1. Se g è una funzione di $L^2(0, 2\pi)$, avente lo sviluppo

$$g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)]$$

allora grazie al lemma 6.1 si ha $g \in H^{\theta,2}(0, 2\pi) \iff \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\, n^{2\theta} < \infty$. In tal caso si deduce che g definisce un elemento $H^{\theta,2}(\partial B(0,1))$, dove $B(0,1)$ è la palla unitaria di $\mathbb{R}^2$.

Esempio 6.1. Consideriamo la funzione definita su $[0, 2\pi]$ dalla serie

$$g(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(k!\theta).$$

Questa serie di funzioni converge totalmente sull'intervallo di definizione e quindi è uniformemente convergente; allora g definisce una applicazione che appartiene a $C^0(\partial B(0,1))$, dove $B(0,1)$ è la palla unitaria di $\mathbb{R}^2$.
Vogliamo provare che $g \notin H^{\frac{1}{2},2}(\partial B(0,1))$: a tale scopo usiamo l'osservazione 6.1 con

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se} \;\; n \neq k! \\ \frac{1}{n^2} & \text{se} \;\; n = k! \end{cases}$$

e poiché la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^4}$$

diverge abbiamo la tesi.

Esempio 6.2. Consideriamo la funzione definita q.o. su $[0, 2\pi]$ dalla serie

$$g(\theta) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n} \cos(n\theta). \tag{20}$$

Si ha che $g \in H^{\frac{1}{2},2}(\partial B(0,1))$, infatti la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log^2 n}\, n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n} < +\infty$$

converge e quindi grazie all'osservazione 6.1 l'affermazione risulta provata.

Mostriamo adesso che $g \notin C^0([0, 2\pi])$; in effetti la serie non converge per $\theta = 0$, vorremmo sapere quindi quale comportamento ha g in un intorno di zero, in particolare se è un punto di discontinuità eliminabile o meno. A tale fine mostriamo la seguente:

Proposizione 6.1. *La funzione g definita da (20) non è limitata nell'intorno di 0.*

Dimostrazione. Se g fosse limitata allora dovrebbe esistere un numero reale $M > 0$ tale che

$$\limsup_{\delta\to 0^+} \left| \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} g(\theta)\ d\theta \right| \leq M.$$

D'altra parte

$$\left| \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} g(\theta)\ d\theta \right| = \left| \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\log n}\ \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \cos(n\theta)\ d\theta \right| = \left| \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n\log n}\ \frac{\sin(n\delta)}{n\delta} \right|.$$

Sia $\epsilon > 0$ e sia $\sigma > 0$ tale che

$$\left| \frac{\sin t}{t} \right| > 1 - \epsilon \quad \text{per} \quad |t| < \sigma$$

allora per ogni $\delta > 0$ sufficientemente piccolo in modo che $3\delta < \sigma$ si ha

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} g(\theta)\ d\theta \right| &= \left| \sum_{3\delta \leq \lfloor n\delta \rfloor < \sigma} \frac{2}{n\ \log n}\ \frac{\sin(n\delta)}{n\delta} + \sum_{\lfloor n\delta \rfloor \geq \sigma} \frac{2}{n\ \log n}\ \frac{\sin(n\delta)}{n\delta} \right| \\
&\geq \left| \sum_{3\delta \leq \lfloor n\delta \rfloor < \sigma} \frac{2}{n\ \log n}\ \frac{\sin(n\delta)}{n\delta} \right| - \left| \sum_{\lfloor n\delta \rfloor \geq \sigma} \frac{2}{n\ \log n}\ \frac{\sin(n\delta)}{n\delta} \right| \\
&\geq \sum_{3\delta \leq \lfloor n\delta \rfloor < \sigma} \frac{2}{n\ \log n}\ (1-\epsilon) - \sum_{\lfloor n\delta \rfloor \geq \sigma} \frac{2}{n^2\ \log n}\ \frac{1}{\delta} \\
&\geq \int_3^{\frac{\sigma}{\delta}+1} \frac{2(1-\epsilon)}{x\ \log x}\ dx - \frac{2}{\delta} \int_{\frac{\sigma}{\delta}-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2\ \log x}\ dx \\
&\geq 2(1-\epsilon)\log\log(1+\frac{\sigma}{\delta}) - 2(1-\epsilon)\log\log 3 - \frac{2}{\delta} \int_{\frac{\sigma}{\delta}-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2\ \log x}\ dx.
\end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0^+} \frac{2}{\delta} \int_{\frac{\sigma}{\delta}}^{+\infty} \frac{1}{x^2\ \log x}\ dx &= \lim_{\delta\to 0^+} \frac{2\int_{\frac{\sigma}{\delta}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\ \log x}}{\delta} \\
= \lim_{\delta\to 0^+} \frac{2(-\frac{\sigma}{\delta^2})[-\frac{1}{(\frac{\sigma}{\delta}-1)^2 \log(\frac{\sigma}{\delta}-1)}]}{1} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{2t^2}{\sigma} \frac{1}{(t-1)^2 \log(t-1)} \\
= \lim_{t\to+\infty} \frac{2}{\sigma} \frac{1}{\log(t-1)} &= 0
\end{aligned}$$

si ottiene

$$\liminf_{\delta\to 0^+}\left|\frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} g(\theta)\ d\theta\right| \geq \lim_{\delta\to 0^+} 2(1-\epsilon)\log\log(1+\frac{\sigma}{\delta}) = +\infty$$

che è assurdo. La funzione g quindi non può essere limitata nell'intorno dell'origine. □

La proposizione precedente prova che $g \notin C^0([0,2\pi])$; si può far vedere usando il teorema di Abel che per ogni $\epsilon > 0$ la serie converge uniformemente su $[\epsilon, 2\pi-\epsilon]$, quindi g definisce una funzione continua su $]0,2\pi[$.

Gli esempi che abbiamo mostrato ci dicono che l'impostazione classica e variazionale del problema di Dirichlet sono in generale distinte. Infatti se prendiamo la condizione al contorno in $C^0(\partial\Omega)/H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ (che è non vuoto grazie all'esempio 6.1) allora la soluzione del problema classico non può essere traccia di alcuna funzione u in $H^{1,2}(\Omega)$. Analogamente se prendiamo dato al bordo in $H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)/C^0(\partial\Omega)$ la soluzione variazionale non potrà essere soluzione classica.

Risulta naturale chiedersi cosa succede se prendiamo la condizione al contorno in $C^0(\partial\Omega)\cap H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$. Sia $g \in C^0(\partial\Omega)\cap H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$; in questo caso, al contrario dei precedenti, g sta nella classe giusta affinché sia il problema classico che variazionale siano ben posti, quindi per quanto visto essi ammettono un'unica soluzione, che denoteremo rispettivamente con u_1, u_2. Vogliamo provare che $u_1 = u_2$ q.o in Ω. Per ottenere questa uguaglianza utilizzeremo il seguente risultato:

Proposizione 6.2. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1. Lo spazio $C^\infty(\partial\Omega)$ è denso in $H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$.*

Dimostrazione. Si veda J.Lions, E.Magenes [11], dove la successione approssimante un fissato elemento di $H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ è costruita tramite convoluzione con un nucleo regolarizzante. □

Grazie alla proposizione 6.2 esiste una successione $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty(\partial\Omega)$ tale che

$$g_n \to g \text{ in } C^0(\partial\Omega),$$

$$g_n \to g \text{ in } H^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega),$$

(basta prendere la convoluzione $g * \varphi_n$, con φ_n nucleo regolarizzante). Consideriamo la successione di funzioni $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ soddisfacente il problema di Dirichlet classico

$$\begin{cases} \Delta u_n = 0 & \text{in } \Omega \\ u_n = g_n & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{21}$$

e variazionale

$$\begin{cases} \Delta u_n = 0 & \text{in } \Omega \\ \gamma_0 u_n = g_n & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{22}$$

Usando le maggiorazioni per le soluzioni forniteci dai teoremi di esistenza e unicità, si ottiene che $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $C^0(\overline{\Omega})$ e in $H^{1,2}(\Omega)$. Quindi, grazie alla completezza di questi spazi, si ha che esistono u_1^* in $C^0(\overline{\Omega})$, $u_2^* \in H^{1,2}(\Omega)$ tali che

$$u_n \to u_1^* \text{ in } C^0(\overline{\Omega}), \quad u_n \to u_2^* \text{ in } H^{1,2}(\Omega).$$

Andiamo a verificare che u_1^* e u_2^* sono soluzioni, rispettivamente, del problema classico e del problema variazionale. Per quanto riguarda u_1^*, essendo limite uniforme di funzioni armoniche, si trova che per ogni palla $B(x_0, r) \subseteq \Omega$, u_1^* verifica il teorema della media (vedi David Gilbarg, Neil S. Trudinger [9]) e quindi u_1^* è armonica in Ω. Inoltre per continuità della funzione restrizione si ha $u_1^*|_{\partial\Omega} = g$. Quindi u_1^* verifica

$$\begin{cases} \Delta u_1^* = 0 & \text{in } \Omega \\ u_1^* = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

e per unicità della soluzione $u_1 = u_1^*$.

Vogliamo provare adesso che la funzione u_2^* è soluzione del problema variazionale

$$\begin{cases} \Delta u_2^* = 0 & \text{in } \Omega \\ \gamma_0 u_2^* = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Mostriamo che $\Delta u_2^* = 0$ nel senso delle distribuzioni: per ogni φ in $C_0^\infty(\Omega)$, dalla relazione

$$\langle \Delta u_n, \varphi \rangle = -\sum_{i=1}^{n} \langle D_i u_n, D_i \varphi \rangle = 0,$$

si ottiene, passando al limite, $\langle \Delta u_2^*, \varphi \rangle = 0$. Inoltre, per mostrare che $\gamma_0 u_2^* = g$, si usa il fatto che la traccia γ_0 è un operatore lineare e continuo. Per unicità della soluzione si ha $u_2^* = u_2$. Dalla convergenza uniforme di $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a u_1^* si ha la convergenza puntuale quindi

$$u_n(x) \to u_1^*(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

mentre dalla convergenza di $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a u_2^* in $H^{1,2}(\Omega)$ si trova, per un'opportuna sottosuccessione,

$$u_{n_k}(x) \to u_2^*(x) \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

Otteniamo, quindi, che $u_1^* = u_2^*$ q.o. in Ω, da cui $u_1 = u_2$ q.o. in Ω.

Appendice

A Richiami sugli spazi $L^p(\Omega)$

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Se $1 \leq p < +\infty$, ricordiamo che $L^p(\Omega)$ è definito come lo spazio delle funzioni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabili secondo Lebesgue tali che $|f|^p$ sia sommabile, quozientato con la relazione di equivalenza $f \sim g \Longleftrightarrow f = g$ q.o. in Ω. Se $f \in L^p(\Omega)$ indichiamo con $\|f\|_{p,\Omega} = (\int_\Omega |f|^p \, dx)^{1/p}$; si verifica che $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ definisce una norma su $L^p(\Omega)$ ed inoltre risulta che $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{p,\Omega})$ è uno spazio di Banach.

Citiamo adesso l'importante disuguaglianza di Hölder:

Proposizione A.1. *Siano $1 < p < +\infty$, $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p^*}(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Allora $fg \in L^1(\Omega)$, e*

$$\int_\Omega |fg| \, dx \leq \|f\|_{p,\Omega} \, \|g\|_{p^*,\Omega} \, .$$

Enunciamo per completezza il seguente teorema che riassume la struttura funzionale degli spazi $L^p(\Omega)$.

Teorema A.1. *Sia $1 < p < +\infty$, lo spazio $L^p(\Omega)$ è uno spazio di Banach riflessivo, il cui duale è isomorfo ad $L^{p^*}(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Lo spazio $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare $(f, g) = \int_\Omega fg \; dx$.*

Si denota, poi, con $L^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni misurabili ed essenzialmente limitate in Ω. Lo spazio $L^\infty(\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma

$$\|f\|_{\infty,\Omega} = \mathrm{supess}_\Omega \, |f| \, ,$$

dove

$$\mathrm{supess}_\Omega \, f = \inf \; \{\alpha \in \mathbb{R} : \; f(x) \leq \alpha \; \text{ q.o. in } \Omega\} \, .$$

B Spazi di Sobolev

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < +\infty$ e $k \in \mathbb{N}$; per prima cosa occorre definire il concetto di derivata debole (o nel senso delle distribuzioni) per funzioni in $L^p_{loc}(\Omega)$.

Definizione B.1. *Siano $u, v \in L^p_{loc}(\Omega)$. Diremo che $v = D^\alpha u$ in senso L^p-debole se vale:*

$$\int_\Omega v\phi \; dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \phi \; dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Si definisce allora:

Definizione B.2. $W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ per \quad |\alpha| \le k\}$.

Lo spazio $W^{k,p}(\Omega)$ è di Banach con la norma

$$\|u\|_{k,p,\Omega} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \le k} |D^\alpha u|^p \ dx \right)^{1/p} .$$

Si osserva che $C^k(\overline{\Omega}) \cap W^{k,p}(\Omega)$ è un sottospazio di $W^{k,p}(\Omega)$ che non è chiuso in $W^{k,p}(\Omega)$, allora si pone:

Definizione B.3. *Definiamo $H^{k,p}(\Omega)$ come la chiusura del sottospazio $C^k(\overline{\Omega}) \cap W^{k,p}(\Omega)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$.*

Dunque risulta $H^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ ed in generale l'inclusione è stretta, però sotto opportune condizioni di regolarità per l'aperto Ω i due spazi coincidono. Tra le tante, una condizione molto debole è l'ipotesi del segmento: Ω verifica la proprietà del segmento se esiste un ricoprimento aperto localmente finito $\{U_j\}$ di $\partial\Omega$ ed una corrispondente successione $\{y_j\}$ di vettori non nulli, $y_j \in \mathbb{R}^n$, tale che se $x \in \overline{\Omega} \cap U_j$ per qualche j, allora $x + ty_j \in \Omega$ per $t \in (0,1)$.

Teorema B.1 (di Poincaré). *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ connesso e limitato, con frontiera $\partial\Omega$ lipschitziana. Esiste una costante $c(p,n,\Omega)$ tale che per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ risulti*

$$\int_\Omega |u - u_\Omega|^p \ dx \le c \int_\Omega |Du|^p \ dx$$

dove

$$u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \ dx$$

è la media di u in Ω.

Definizione B.4. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, si indica con $W_0^{k,p}(\Omega)$ la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma di $W^{k,p}(\Omega)$.*

Quindi una funzione $u \in W^{k,p}(\Omega)$ appartiene a $W_0^{k,p}(\Omega)$ se esiste una successione $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}, u_j \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che $\lim_{j\to\infty} \|u_j - u\|_{k,p,\Omega} = 0$.
Risulta chiaro che $(W_0^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p,\Omega})$ è uno spazio di Banach.

C Integrale di superficie

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, introduciamo le seguenti notazioni:

$$\Sigma = B(0,1) \subset \mathbb{R}^{n-1}, \ \mathcal{Q} = \Sigma \times (-1,1), \ \mathcal{Q}^+ = \mathcal{Q} \cap \mathbb{R}^n_+, \ \mathcal{Q}^- = \mathcal{Q} \cap \mathbb{R}^n_-$$

allora diremo che il bordo $\partial\Omega$ è di classe C^k se, per ogni $x_0 \in \partial\Omega$, esiste un intorno aperto U di $\mathbb{R}^n$ ed un diffeomorfismo $\varphi : \overline{U} \to \overline{\mathcal{Q}}$ di classe C^k tale che

$$\varphi(\Omega \cap U) = \mathcal{Q}^+, \ \varphi(\partial\Omega \cap U) = \Sigma.$$

In particolare da questa definizione, si ha che se $\partial\Omega$ è di classe C^k, allora per ogni fissato $x_0 \in \partial\Omega$, l'insieme $\Gamma = \partial\Omega \cap U$ è il sostegno di una porzione di superficie regolare di equazione

$$x = \varphi^{-1}(y), \ y \in \overline{\Sigma}$$

ed inoltre per ogni $g \in C^0(\Gamma)$ definiamo

$$\int_\Gamma g \ d\sigma = \int_\Sigma g(\varphi^{-1}(y))\sqrt{W(y)} \ dy,$$

dove

$$W(y) = \det \left[\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial y}\right]^T \cdot \left[\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial y}\right].$$

Fissato un aperto limitato Ω con bordo $\partial\Omega$ di classe C^1, per compattezza esiste un ricoprimento finito di intorni $\{U_j\}_{j=1,..,m}$ con i rispettivi diffeomorfismi $\varphi_j : \overline{U_j} \to \overline{\mathcal{Q}}$ di classe C^1. Osserviamo che dalla definizione segue che i diffeomorfismi φ_j verificano la seguente relazione di compatibilità: se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, allora esiste un omeomorfismo

$$J_{ij} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

di classe C^1 avente Jacobiano positivo e tale che

$$\varphi_j(x) = J_{ij}(\varphi_i(x)) \ \ \forall x \in U_i \cap U_j.$$

Sia $\{\alpha_j\}_{j=1,..,m}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{U_j\}_{j=1,..,m}$, cioè tale che:

$$\alpha_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \alpha \geq 0, \quad \text{supp } \alpha_j \subset U_j, \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1 \ \ \forall x \in \partial\Omega.$$

Fissata $g \in C^0(\partial\Omega)$ si definisce allora l'integrale di superficie come:

$$\int_{\partial\Omega} g \ d\sigma = \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma_j} \alpha_j g \ d\sigma,$$

dove $\Gamma_j = \partial\Omega \cap U_j$. Osserviamo che si può dimostrare che il valore di tale integrale non dipende dal ricoprimento usato e dalla partizione dell'unità ad esso subordinata.

D Teorema di traccia

In questa appendice enunciamo e dimostriamo il teorema di traccia. Ci occorre però un risultato preliminare:

Teorema D.1. *Siano A e B aperti limitati di $\mathbb{R}^N$ e sia $\tau : \overline{A} \to \overline{B}$ un diffeomorfismo C^1. Allora l'applicazione $\Phi : H^{1,p}(B) \ni u \to \Phi(u) = u \circ \tau \in H^{1,p}(A)$ è un isomorfismo, nel senso che è lineare e si ha la doppia maggiorazione delle norme.*

Dimostrazione. Sia u una funzione appartenente a $H^{1,p}(B)$; esiste, dunque, una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^1(\overline{B})$ che converge verso u in $H^{1,p}(B)$. La successione $\{u_n \circ \tau\}_{n\in\mathbb{N}}$ è in $C^1(\overline{A})$ e si ha:

$$\|u_n \circ \tau\|_{1,p,A} \leq c(p,\tau)\,\|u_n\|_{1,p,B} \leq c^{'}(p,\tau)\,\|u_n \circ \tau\|_{1,p,A}\,.$$

Infatti per il teorema di cambiamento di variabili, valgono le relazioni

$$\int_A |u_n \circ \tau(x)|^p \cdot \left|\det \frac{\partial \tau}{\partial x}(x)\right| dx = \int_B |u_n(y)|^p\, dy$$

e

$$\int_A |D_i u_n \circ \tau(x)|^p \cdot \left|\det \frac{\partial \tau}{\partial x}(x)\right| dx = \int_B |D_i u_n(y)|^p\, dy \quad \forall i = 1,..,N$$

da cui

$$\|u_n\|_{p,B} \leq M(\tau)\,\|u_n \circ \tau\|_{p,A}$$

e

$$\|D_i u_n\|_{p,B} \leq M(\tau)\,\|(D_i u_n) \circ \tau\|_{p,A}$$

ed analogamente, essendo $u_n = u_n \circ \tau \circ \tau^{-1}$

$$\|u_n \circ \tau\|_{p,A} \leq M^{'}(\tau)\,\|u_n\|_{p,B}$$

e

$$\|D_i(u_n \circ \tau)\|_{p,A} \leq C(\tau)\,\|(D_i u_n) \circ \tau\|_{p,A} \leq C(\tau) M^{'}(\tau)\,\|D_i u_n\|_{p,B}\,.$$

Abbiamo così provato che la doppia maggiorazione richiesta vale per le funzioni $C^1(\overline{B})$; in particolare si ottiene che $\{u_n \circ \tau\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $H^{1,p}(A)$ e quindi converge ad una funzione v in $H^{1,p}(A)$. Si vede, poi, con un cambiamento di variabile che $u \circ \tau = v$ ed, infine, è chiaro che la doppia maggiorazione sulle norme vale per tutte le funzioni u in $H^{1,p}(B)$ passando al limite. $\square$

Teorema D.2 (di traccia). *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ avente frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1. La traccia γ_0 è un'applicazione lineare e continua che applica $C^1(\overline{\Omega})$ con la norma $\|\cdot\|_{1,p,\Omega}$ in $L^p(\partial\Omega)$ e quindi si prolunga in modo unico ad un funzionale lineare e continuo*

$$\gamma_0 : H^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

tale che

$$\|u\|_{p,\partial\Omega}^p \leq c(p,\Omega)\,\|u\|_{1,p,\Omega}^p \quad \forall u \in H^{1,p}(\Omega).$$

Dimostrazione. Essendo $\partial\Omega$ di classe C^1, esiste un ricoprimento finito $\{U_1, ..., U_m\}$ di intorni con i rispettivi diffeomorfismi $\varphi_j : \overline{U_j} \to \overline{\mathcal{Q}}$. Sia $\{\alpha_1, .., \alpha_m\}$ una partizione dell'unità associata a tale ricoprimento. Fissata $u \in C^1(\overline{\Omega})$, consideriamo le funzioni

$$u_j = \alpha_j u \in C^1(\overline{U_j} \cap \overline{\Omega}), \quad j = 1, .., m.$$

Poniamo, poi, per ogni $j = 1, .., m$,

$$v_j = u_j \circ \varphi_j^{-1} \in C^1(\overline{\mathcal{Q}^+}).$$

Per quanto dimostrato nella proposizione 3.1, si ha

$$\int_{B(0,1)} |v_j(\overline{y}, 0)|^p \, d\overline{y} \leq C(p)\,\|v_j\|_{1,p,\mathcal{Q}^+}$$

e quindi, per la limitatezza di $W_j(\overline{y}) = \det \left[\frac{\partial\varphi_j^{-1}}{\partial\overline{y}}\right]^T \cdot \left[\frac{\partial\varphi_j^{-1}}{\partial\overline{y}}\right]$ sul compatto $\overline{B(0,1)}$

$$\int_{\Gamma_j} |\alpha_j u|^p \, d\sigma = \int_{B(0,1)} |v_j(\overline{y})|^p \sqrt{W_j(\overline{y})} d\overline{y} \leq C_j(p)\,\|v_j\|_{1,p,\mathcal{Q}^+}^p \,,$$

dove si è posto $\Gamma_j = \partial\Omega \cap U_j$. Siccome, per il teorema D.1, vale la maggiorazione

$$\|v_j\|_{1,p,\mathcal{Q}^+}^p \leq C_j^{'}(p)\,\|\alpha_j u\|_{1,p,U_j\cap\Omega}$$

a maggior ragione deve valere:

$$\int_{\Gamma_j} |\alpha_j u|^p \, d\sigma \leq \overline{C}(p)\,\|\alpha_j u\|_{1,p,\Omega}^p \,.$$

Sommando queste relazioni per $j = 1, .., m$, si ha, ricordando che α_j è a supporto contenuto in U_j,

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^m |\alpha_j|^p \, |u|^p \, d\sigma \leq \overline{C}(p) \sum_{j=1}^m \|\alpha_j u\|_{1,p,\Omega}^p \leq m\overline{C}(p)\,\|u\|_{1,p,\Omega}^p$$

da cui segue facilmente che

$$\int_{\partial\Omega} |u|^p \, d\sigma \leq C(p)\,\|u\|_{1,p,\Omega}^p \,,$$

e la tesi è provata. $\square$

Riferimenti bibliografici

[1] Marco Abate. *Appunti del corso di Elementi di Geometria Differenziale.* Pisa, 2004.

[2] Paolo Acquistapace. *Appunti di analisi funzionale.* Appunti disponibili alla pagina: `http://www.dm.unipi.it/∼acquistp`, Pisa, 2004.

[3] Paolo Acquistapace. *Introduzione alla teoria delle equazioni alle derivate parziali.* Appunti disponibili alla pagina: `http://www.dm.unipi.it/∼acquistp`, Pisa, 2005.

[4] Robert A. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[5] Jean-Michel Bony. *Cours d'analyse – Théorie des distributions et analyse de Fourier.* Ecole Polytechnique, Paris, 2001.

[6] H.Brézis. *Analsi funzionale. Teoria e appicazioni.* Liguori editore, Napoli, 1986.

[7] Sergio Campanato. *Sistemi ellittici in forma divergenza. Regolarità all'interno.* Quaderni della Scuola Normale, Pisa, 1980.

[8] Franco Conti *Appunti di Istituzioni di analisi superiore* (manoscritto). Pisa, 1980.

[9] David Gilbarg, Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer, Berlin, 1977.

[10] Enrico Giusti. *Equazioni ellttiche del secondo ordine.* Pitagora editrice, Bologna, 1978.

[11] Jacques-Luis Lions, Enrico Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol.1.* Dunod, Paris, 1968.

[12] Carlo Miranda. *Istituzioni di analisi funzionale lineare, vol.2.* UMI, Bologna, 1980.

[13] Charles B.Morrey, Jr. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations.* Springer-Verlag, New York, 1966.

[14] Jindřich Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Masson, Paris, 1967.