Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Funzioni BV in spazi metrici

18 ottobre 2013

Tesi di Laurea Magistrale

Candidato
Francesco Geraci
geraci@mail.dm.unipi.it

Relatore
Prof. Paolo Acquistapace

Controrelatore
Prof. Giovanni Alberti

Anno Accademico 2012/2013

Indice

Introduzione

Negli ultimi due decenni, sotto l'impulso dei progressi nel calcolo delle variazioni, nella teoria geometrica della misura e nella geometria frattale, si sono avuti importanti sviluppi nello studio di equazioni alle derivate parziali e problemi al contorno in aperti di $\mathbb{R}^n$ del tutto irregolari ed anche, ancor più generalmente, in spazi metrici.
Parallelamente si è avuto un enorme sviluppo nella comprensione della teoria degli spazi di Sobolev nella cornice generale degli spazi metrici [19, 22] e molti progressi sono stati fatti sulla definizione di funzioni BV e insiemi di perimetro finito nel contesto degli spazi metrici misurati [2].

Il mio lavoro di tesi si inserisce in questo contesto e si occupa delle funzioni a variazione limitata, brevemente BV, analizzando in principio il caso euclideo per poi passare al caso più generale di funzioni BV in uno spazio metrico. Inizialmente vengono esaminate le due definizioni di funzioni BV su $\mathbb{R}$: la definizione classica dovuta a Jordan nel 1881, e la definizione moderna basata sul concetto di derivata distribuzionale introdotto da Schwartz, e se ne prova l'effettiva equivalenza [4]. Si dimostrano il classico teorema di derivazione di Lebesgue su $[a, b]$, la bigezione tra le funzioni BV e le misure di Radon finite con segno [31], e un teorema di decomposizione (valido solo in una dimensione) per cui una funzione BV è somma di una funzione assolutamente continua, una funzione "salto" e una funzione "cantoriana" [4]. Nel caso di funzioni con dominio Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, sulla base della definizione distribuzionale, dopo aver provato le principali proprietà della variazione totale, si prova che una funzione BV è limite in $L^1(\Omega)$ di funzioni in $W^{1,1}(\Omega)$ (caratterizzazione dovuta a De Giorgi); una volta provato che $BV(\Omega)$ è uno spazio di Banach vengono introdotti due diversi tipi di convergenza: la convergenza forte e la convergenza debole*. Prima di dare la definizione di funzione BV in spazi metrici vengono presentati alcuni concetti base: viene introdotto il concetto di curva rettificabile a valori in uno spazio metrico e viene provata l'esistenza di geodetiche nel caso di uno spazio proprio [21]. si introducono le nozioni di misura doubling e di operatore massimale di Hardy-Littlewood, e viene dimostrato il teorema di Hardy-Littlewood che, nel caso $1 < p < \infty$, mostra che l'operatore massimale è limitato in L^p, mentre si ottiene una stima debole (1-1) nel caso $p = 1$ [3]. Si definisce il gradiente superiore debole e a questo scopo viene introdotta una misura esterna sull'insieme delle curve rettificabili. Introdotti poi gli spazi di Sobolev metrici secondo la definizione di Hajlasz e la disuguaglianza debole $(1, p)$-Poincaré, si mostra la loro equivalenza nel caso $1 < p < \infty$ [21]. Infine vengono definite le funzioni BV in uno spazio metrico [30]: fissato (X, d, μ) uno spazio metrico misurato, con μ una misura doubling, per ogni $u \in L^1_{loc}(X)$ si definisce la variazione totale di u:

$$\|Du\|(X) = \inf \left\{ \liminf_{i\to\infty} \int_X Lip\, u_i \, d\mu \ : \ (u_i)_i \subset Lip(X),\ u_i \to u \text{ in } L^1_{loc}(X) \right\};$$

si dice allora che una funzione $u \in L^1(X)$ è una funzione a *variazione limitata*, $u \in BV(X)$, se $\|Du\|(X) < \infty$. Dopo aver provato che $\|Du\|$ è la restrizione agli aperti di X, di una misura di Radon finita, si dimostra una recente caratterizzazione di tipo puntuale: più precisamente vale il seguente risultato [27]

Teorema. *Sia (X, d, μ) spazio metrico completo, misurato, con μ una misura doubling, che supporta una disuguaglianza debole $(1, 1)$-Poincaré. Sia $u \in L^1(X)$. Allora $u \in BV(X)$ se e solo se esistono una misura finita ν e due costanti $\sigma \geq 1$ e $C_0 > 0$ tali che valga la disuguaglianza*

$$|u(x) - u(y)| \leq C_0\, d(x, y) \left[M_{\sigma\, d(x,y),\, \nu}(x) + M_{\sigma\, d(x,y),\, \nu}(x) \right]$$

per μ-q.o. $x, y \in X$. Inoltre, $\|Du\| \leq C\nu$, con C una costante che dipende unicamente da C_0, σ, dalla costante doubling della misura μ e dalla costante della disuguaglianza debole $(1, 1)$-Poincaré.

Capitolo 1

Preliminari

In questo primo capitolo presenteremo alcune definizioni e alcuni teoremi utili per il seguito.

1.1 Mollificatori

Definizione 1.1.1 (Mollificatori simmetrici). Una funzione $\eta(x)$ è detta *mollificatore* se:

(i) $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $\mathrm{supp}\eta \subset B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, |x| < 1\}$;

(iii) $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\, dx = 1$.

Se in aggiunta abbiamo

(iv) $\eta(x) \geq 0$;

(v) $\eta(x) = g(|x|)$ per qualche funzione $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

allora η è detto *mollificatore positivo simmetrico.*

Per esempio la funzione

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq 1 \\ C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{se } |x| \leq 1, \end{cases}$$

dove C è la costante per cui $\int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x)\, dx = 1$, è un mollificatore positivo simmetrico.

Dati un mollificatore η e una funzione $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definiamo per ogni $\varepsilon > 0$

$$\eta_\varepsilon(x) \,=\, \varepsilon^{-n}\,\eta\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \qquad \text{e} \qquad f_\varepsilon \,=\, \eta_\varepsilon(x) * f, \tag{1.1}$$

cioè, ricordando che η è simmetrico,

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) &= \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\eta\Big(\frac{x-z}{\varepsilon}\Big)\,f(z)\,dz = (-1)^n\,\varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\eta\Big(\frac{y}{\varepsilon}\Big)\,f(x-y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\eta(w)\,f(x+\varepsilon w)\,dw. \end{aligned}$$

Proposizione 1.1.2. *Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Valgono i seguenti fatti:*

(a) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f_\varepsilon \to f$ *in* $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *e se* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *allora* $f_\varepsilon \to f$ *in* $L^1(\mathbb{R}^n)$*;*

(b) se $A \leq f(x) \leq B$ *per ogni* x *allora* $A \leq f_\varepsilon(x) \leq B$ *per ogni* x*;*

(c) se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *allora* $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon\, g\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\, g_\varepsilon\, dx$*;*

(d) se $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *allora* $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)_\varepsilon$*;*

(e) se $\mathrm{supp} f \subset A$ *allora* $\mathrm{supp} f_\varepsilon \subset A_\varepsilon = \{x : \mathrm{dist}(x, A) \leq \varepsilon\}$.

1.2 Alcuni risultati di analisi funzionale

Di seguito enunceremo alcuni risultati classici di analisi funzionale che saranno largamente utilizzati nel resto della trattazione.

Proposizione 1.2.1. *Sia X uno spazio metrico lacolmente convesso e μ una misura con segno di Radon finita su X. Allora per ogni insieme aperto $A \subset X$ vale la seguente uguaglianza*

$$|\mu|(A) = \left\{\int_X u\, d\mu \;:\; u \in C_0(X),\, \|u\|_\infty \leq 1\right\}.$$

Teorema 1.2.2 (di rappresentazione di Riesz)**.** *Sia T un funzionale lineare su $C_0(\bar{\Omega})$. Allora esiste un'unica misura di Radon con segno λ su $\bar{\Omega}$ tale che*

$$T(f) = \int_{\bar{\Omega}} f\; d\lambda \qquad \forall f \in C_0(\bar{\Omega}).$$

Osservazione 1.2.3. Il teorema di rappresentazione di Riesz può essere riscritto dicendo che il duale dello spazio di Banch $C_0(X)$ è lo spazio $\mathcal{M}(X)$ delle misure con segno di Radon finite su X, con la dualità data da

$$\langle u, \mu \rangle := \int_X u \, d\mu;$$

Inoltre dalla proposizione 1.2.1 $|\mu|(X)$ è la norma duale.

Proposizione 1.2.4. *Per ogni funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, limitata, non decrescente, continua a destra, e tale che $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, esiste un'unica misura μ su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale $F(x) = \mu((-\infty, x])$.*

Teorema 1.2.5 (di decomposizione di Jordan)**.** *Ogni misura con segno μ si può scrivere come differenza di due misure, di cui almeno una è finita: $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Vale inoltre $|\mu| = \mu^+ - \mu^-$.*

Definizione 1.2.6 (Convergenza debole*)**.** Siano μ e $(\mu_h)_h$ misure con segno di Radon. Diciamo che $(\mu_h)_h$ converge debole* a μ se

$$\lim_{h\to\infty} \int_\Omega \varphi \, d\mu_h = \int_\Omega \varphi \, d\mu \qquad \forall \varphi \in C_c(\Omega).$$

Se μ e $(\mu_h)_h$ sono finite, diciamo che $(\mu_h)_h$ converge debole* a μ se

$$\lim_{h\to\infty} \int_\Omega \varphi \, d\mu_h = \int_\Omega \varphi \, d\mu \qquad \forall \varphi \in C_0(\Omega).$$

Teorema 1.2.7 (Compattezza debole*)**.** *Se (μ_h) è una successione di misure con segno di Radon finite su uno spazio metrico localmente convesso con $\sup\{|\mu_h|(X) : h \in \mathbb{N}\} < \infty$, allora ha una sottosuccessione che converge debole*. Inoltre la mappa $\mu \to |\mu|(X)$ è semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza debole*.*

Teorema 1.2.8 (di Radon-Nikodym)**.** *Siano μ una misura σ-finita e ν una misura con segno. Allora esiste un'unica coppia ν^a e ν^s di misure con segno, tale che $\nu^a << \mu$, $\nu^s \perp \mu$ e $\nu = \nu^a + \nu^s$. Inoltre esiste un'unica funzione $f \in L^1(X, \mu)$ tale che $\nu^a = f\,\mu$. La funzione f è detta densità di ν rispetto a μ ed è indicata con $\frac{\nu}{\mu}$.*

Teorema 1.2.9 (di derivazione di Besicovitch)**.** *Sia μ una misura di Radon in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e ν una misura di Radon con segno. Allora per μ-q.o. x nel supporto di μ, il limite*

$$f(x) := \lim_{r\to 0} \frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))}$$

esiste in $\mathbb{R}$. Inoltre la decomposizione di Radon-Nikodym di ν è data da $\nu = f\mu + \nu^s$, dove $\nu^s = \nu \llcorner E$[1] e E è l'insieme di misura nulla rispetto a ν

$$E = (\Omega \cap \mathrm{supp}\mu) \cup \left\{ x \in \mathrm{supp}\mu \,:\, \lim_{r \to 0} \frac{|\nu|(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} = \infty \right\}.$$

Teorema 1.2.10 (Teorema dei punti di Lebesgue)**.** *Sia μ una misura di Radon in un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $f \in L^1(\Omega, \mu)$. Allora per q.o. $x \in \Omega$ rispetto a μ vale la seguente uguaglianza:*

$$\lim r \to 0 \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0. \tag{1.2}$$

I punti per cui vale (1.2) sono detti punti di Lebesgue di *f.*

Teorema 1.2.11 (Lemma di Mazur)**.** *Sia X uno spazio di Banach. Se una successione (x_n) converge debolmente a x in X, allora esiste una successione di combinazioni convesse (y_n) degli (x_n), la quale converge a x in norma.*

Proposizione 1.2.12 (Ascoli-Arzelà)**.** *Siano E ed F due spazi metrici con E compatto e sia (u_n) una successione di funzioni continue da E in F tale che:*

1. *(u_n) è equicontinua,*
2. *esiste un compatto $C \subset F$ tale che per ogni δ-intorno C_δ di C si ha $u_n(E) \subset C_\delta$ per n sufficientemente grande.*

Allora esiste una funzione $u : E \to C$ e una sottosuccessione di indici (n_k) tale che (u_{n_k}) converge uniformemente a u su E.

Teorema 1.2.13 (di Lusin)**.** *Sia μ una misura di Borel su E (spazio metrico), con $\mu(E) < \infty$. Se f è una funzione misurabile su E allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un sottoinsieme chiuso F_ε tale che f è continua su F_ε e $\mu(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Il teorema si estende facilmente al caso in cui μ è una misura σ-finita.*

Lemma 1.2.14 (di Urysohn)**.** *Siano A, C due chiusi disgiuinti in uno spazio normale E. Allora esiste una funzione continua, $f : E \to [0,1]$ tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \in A$ e $f(x) = 1$ per ogni $x \in C$.*

Teorema 1.2.15 (Stone-Weierstrass)**.** *Siano X uno spazio topologico compatto e A un algebra in $C(X)$ che contiene le costanti e che separa i punti in X. Allora A è densa in $C(X)$.*

[1] Per ogni insieme B misurabile rispetto a ν^s, $\nu^s(B) = \nu \llcorner E(B) = \nu(E \cap B)$.

Teorema 1.2.16 (di estensione di Tietze)**.** *Sia A un sottoinsieme chiuso di uno spazio normale E e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste una funzione continua $f^* : E \to \mathbb{R}$ tale che $f^*_{|A} \equiv f$.*

Teorema 1.2.17 (di estensione di McShane)**.** *Sia A un sottoinsieme non vuoto di uno spazio metrico E, e sia $f \in Lip(A, \mathbb{R})$. Allora esiste una funzione $\tilde{f} \in Lip(E, \mathbb{R})$ con stessa costante di Lipschitz di f, tale che $\tilde{f}_{|A} \equiv f$.*

Teorema 1.2.18. *Un insieme A in uno spazio riflessivo è debolmente compatto per successioni se e solo se è limitato.*

Teorema 1.2.19 (Disuguaglianza di Clarkson)**.** *Siano $f, g \in L^p(E)$, e $p \in (1, \infty)$. Allora:*

(i) Se $p \geq 2$, $\quad \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \leq 2^{p-1} \left[\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \right]$

(ii) Se $1 < p \leq 2$ e $q = \frac{p}{p-1}$, $\quad \|f+g\|_p^q + \|f-g\|_p^q \leq 2 \left[\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \right]^{q-1}$

Proposizione 1.2.20 (Disuguaglianza di Markov)**.** *Sia $u \in L^p(E, \mu)$ per qualche $p \geq 1$. Allora per ogni $t > 0$ vale:*

$$\mu\big(\{|u| \geq t\}\big) \ \leq \ t^{-p} \|u\|^p_{L^p(E,\mu)}.$$

Dimostrazione. Per ogni $t > 0$ abbiamo

$$t^p \ \mu\big(\{|u| \geq t\}\big) \ \leq \ \int_{\{|u|>t\}} |u|^p \ d\mu \ \leq \ \|u\|_{L^p(E,\mu)}$$

e quindi la tesi. □

Capitolo 2

Funzioni BV di una variabile reale

In questo capitolo introduciamo le funzioni a variazione limitata di una variabile reale, mostrandone le proprietà classiche come i teoremi di decomposizione, il teorema di derivazione di Lebesgue su $[a, b]$ e il legame con le misure con segno finite; presenteremo sia la definizione classica introdotta da Jordan nel 1881 per studiare le serie di Fourier di tali funzioni [25], sia la definizione moderna, incentrata sul concetto di derivata distribuzionale, mostrandone l'effettiva equivalenza.

2.1 Definizione classica e proprietà

Definizione 2.1.1. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; data una partizione $\pi : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ di $[a, b]$, definiamo

$$t_a^b(f, \pi) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

e detto Π l'insieme delle partizioni finite di $[a, b]$,

$$T_a^b(f) = \sup_{\pi \in \Pi} t_a^b(f, \pi).$$

Chaimiamo $T_a^b(f)$ *variazione totale di f in* $[a, b]$. Diciamo che f è una funzione a *variazione limitata in* $[a, b]$, e scrviamo $f \in BV[a, b]$, se $T_a^b(f) < \infty$.

Osservazione 2.1.2. 1. Se f è monotona in $[a, b]$ allora $f \in BV[a, b]$; infatti

$$T_a^b(f) = \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = |f(b) - f(a)| < \infty.$$

2. L'insieme delle funzioni $f \in BV[a,b]$ ha la struttura di spazio vettoriale; infatti dati $f, g \in BV[a,b]$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} T_a^b(\lambda f + \mu g) &= \sup_{\Pi} \sum_{i=1}^{n} \Big| \big(\lambda f g(x_i) + \mu g(x_i)\big) - \big(\lambda f(x_{i-1}) + \mu g(x_{i-1})\big) \Big| \\ &\leq |\lambda| T_a^b(f) + |\mu| T_a^b(g) < \infty. \end{aligned}$$

3. Se $f \in BV[a,b]$, f è limitata in $[a,b]$: infatti, dato $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(a) + f(x) - f(a)| \leq |f(a)| + |f(b) - f(x)| + |f(x) - f(a)| \\ &\leq f(a) + T_a^b(f) < \infty. \end{aligned}$$

Ma non tutte le funzioni limitate sono a variazione limitata: per esempio, se $A = \{\frac{1}{2^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $f = \chi(A)$, considerando la partizione

$$\pi_N = 0 < \frac{1}{2^N} < \frac{3}{2^{N+1}} < \frac{1}{2^{N-1}} < \frac{3}{2^N} \dots < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1,$$

abbiamo $t_a^b(f, \pi_N) = 2N$, da cui $T_a^b(f) = \infty$.

Osservazione 2.1.3. Possiamo generalizzare la definizione di funzione a variazione limitata definita in un intervallo $[a,b]$ a valori reali ed estenderla a funzioni a valori in uno spazio metrico (X,d) con d la relativa distanza. Basta sostituire il valore assoluto $|f(x_i) - f(x_{i-1})|$ della definizione con $d(f(x_i), f(x_{i-1}))$, la rispettiva distanza delle immagini in (X,d).

Inoltre se $f : [a,b] \to X$ è in $BV([a,b], X)$ e $\varphi : X \to Y$ (con (Y,h) un altro spazio metrico) è lipschitziana, allora anche $\varphi \circ f$ è in $BV([a,b], Y)$ e di fatto

$$T_a^b(\varphi \circ f) \leq Lip(\varphi) T_a^b(f),$$

con $Lip(\varphi)$ la costante di Lipschitz di φ.

Come corollario otteniamo:

Corollario 2.1.4. *Una funzione* $(f_1, \dots, f_n) = f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *è in* $BV([a,b], \mathbb{R}^n)$ *se e solo se ogni componente è in* $BV[a,b]$.

Dimostrazione. Basta ricordare l'osservazione 2.1.2(2) e osservare che le funzioni $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ così definite:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_1, \dots, x_n) &= x_i, \\ \psi_i(x) &= x e_i, \end{aligned}$$

dove e_i è l'i-esimo vettore della base canonica, sono lipschitziane. La tesi allora discende dall'osservazione 2.1.3. □

La variazione totale è additiva rispetto alla decomposizione di $[a, b]$ in sottointervalli adiacenti. Vale la seguente:

Proposizione 2.1.5. *Se $f \in BV[a, b]$ allora per ogni $c \in [a, b]$ vale*

$$T_a^b(f) = T_a^c(f) + T_c^b(f). \tag{2.1}$$

Dimostrazione. ($\leq$) Data una partizione π di $[a, b]$ consideriamo le due partizioni π_1 e π_2 tali che

$$\pi_1 = \pi \cap [a, c] \cup \{c\}, \qquad \pi_2 = \{c\} \cup \pi \cap [c, b],$$

(dove l'unione con il singoletto {c} può essere anche ridondante); allora

$$t_a^b(f, \pi) \leq t_a^c(f, \pi_1) + t_c^b(f, \pi_2) \leq T_a^c(f) + T_c^b(f)$$

e per l'arbitrarietà di π otteniamo

$$T_a^b(f) \leq T_a^c(f) + T_c^b(f).$$

($\geq$) Date due partizioni π_1 di $[a, c]$ e π_2 di $[c, b]$, la loro unione è una partizione π di $[a, b]$ e abbiamo

$$t_a^c(f, \pi_1) + t_c^b(f, \pi_2) = t_a^b(f, \pi) \leq T_a^b(f),$$

e per arbitrarietà di π_1 e π_2 abbiamo

$$T_a^c(f) + T_c^b(f) \leq T_a^b(f).$$

$\square$

L'additività della variazione totale ci permette di dimostrare un noto teorema di decomposizione:

Teorema 2.1.6. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Allora $f \in BV[a, b]$ se e solo se f è differenza di due funzioni crescenti in $[a, b]$.*

Dimostrazione. ($\Longleftarrow$) Per l'osservazione 2.1.2 le funzioni monotone sono a variazione limitata e $BV[a, b]$ è uno spazio vettoriale, dunque la differenza di funzioni crescenti è a variazione limitata.

($\Longrightarrow$) La funzione $x \mapsto T_a^x(f)$ è una funzione non negativa e crescente in $[a, b]$; infatti se $x < y$ vale, in virtù della proposizione 2.1.5

$$T_a^y(f) = T_a^x(f) + T_x^y(f) \geq T_a^x(f).$$

Inoltre anche la funzione $x \mapsto T_a^x(f) - f(x)$ è crescente:

$$T_a^x(f) - f(x) \leq T_a^y(f) - f(y) \iff f(y) - f(x) \leq T_a^y(f) - T_a^x(f),$$

ma

$$f(y) - f(x) \leq |f(y) - f(x)| \leq T_x^y(f) \leq T_a^y(f) - T_a^x(f).$$

Dunque scrivendo $f(x) = T_a^x(f) - \Big(T_a^x(f) - f(x)\Big)$ abbiamo la tesi.

□

2.2 Proprietà di continuità e di derivabilità

In questo paragrafo dimostreremo continuità q.o. e derivabilità q.o. di una funzione a variazione limitata, e per mostrare la la seconda proprietà proveremo il teorema di derivazione di Lebesgue.

Proposizione 2.2.1. *Sia f monotona nell'intervallo $[a, b]$, allora per ogni $c \in (a, b)$ esistono finiti il limite sinistro e il limite sinistro di f in c. Inoltre ogni funzione monotona ha una quantità al più numerabile di punti di discontinuità.*

Dimostrazione. Supponiamo f crescente (si fa allo stesso modo se f è decrescente), e fissiamo $c \in (a, b)$. Osserviamo che poiché f è crescente l'immagine di (a, c) è limitata da $l_s = \sup_{x\in(a,c)} f(x)$, che è finito (perché minore di $f(c) < \infty$), e proviamo che l_s è proprio il limite sinistro. Fissato $\varepsilon > 0$, vogliamo provare che esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in (c - \delta, c)$ vale $l_s - f(x) < \varepsilon$, ma grazie alla crescenza di f basta trovare un δ tale che $l_s - f(c - \delta) < \varepsilon$ e questo è garantito dalle proprietà dell'estremo superiore (se tale δ non esistesse $l_s - \varepsilon$ sarebbe maggiorante). Per il limite destro la dimostrazione è la stessa a meno di sostituire l'estremo superiore con l'estremo inferiore. Allora i punti di discontinuità sono solo di tipo salto. Notiamo anche che la somma dei salti (per monotonia) sarà minore o uguale di $|f(b) - f(a)|$; dunque per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $D_n = \{c \in [a, b] : |f(c^+) - f(c^-)| > \frac{1}{n}\}$ è finito. Perciò l'insieme delle discontinuità $D = \cup D_n$ è al più numerabile perché è unione numerabile di insiemi finiti. □

Corollario 2.2.2. *Se $f \in BV[a, b]$ allora è continua q.o. (i punti di discontinuità sono al più un insime numerabile) e le discontinuità sono di tipo salto.*

Dimostrazione. Il teorema è vero per le funzioni crescenti; allora per il teorema di decomposizione abbiamo la tesi. □

2.2.1 Teorema di derivazione di Lebesgue

Per dimostrare il teorema ci serviremo di un lemma di ricoprimento:

Lemma 2.2.3 (di Vitali)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}$ con $m^*(E) < \infty$, e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di intervalli chiusi dotati delle seguenti proprietà:*

1. *$\mathcal{F}$ è un ricoprimento di E;*
2. *per ogni $x \in E$ e per ogni $\delta > 0$ esiste $I \in \mathcal{F}$ tale che $x \in I$ e $m(I) < \delta$.*

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $I_1, \dots, I_N \in \mathcal{F}$, disgiunti, tale che

$$m^*\Big(E \setminus \cup_{i=1}^N I_i\Big) < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Sia A un aperto contenente E con $m(A) < \infty$, per la seconda proprietà possiamo supporre senza perdita di generalità che $I \subset A$ per ogni $I \in \mathcal{F}$. Costruiamo per induzione una successione $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{F}$ disgiunti. Prendiamo I_1 un qualsiasi intervallo di $\mathcal{F}$, e supponiamo di aver già scelto $I_1, \dots, I_n$ intervalli disgiunti di $\mathcal{F}$, se $\cup_{i=1}^n I_i \supset E$ abbiamo finito perché $m^*(E \setminus \cup_{i=1}^n I_i) = m^*(\emptyset) = 0$; in caso contrario esiste $x \in E \setminus \cup_{i=1}^n I_i$ e quindi, ricordando che gli intervalli sono chiusi e disgiunti, per la proprietà 2 esiste un intervallo $I \in \mathcal{F}$ disgiunto da $I_1, \dots, I_n$. Posto

$$k_n = \sup\{m(I) \,:\, I \in \mathcal{F}\,,\, I \cap \cup_{i=1}^n I_i = \emptyset\},$$

abbiamo $0 < k_n \leq m(A) < \infty$ e per le proprietà dell'estremo superiore possiamo scegliere un $I_{n+1} \in \mathcal{F}$, disgiunto da $I_1, \dots, I_n$, tale che $m(I_{n+1}) > \frac{k_n}{2}$. Se esiste N tale che $\cup_{i=1}^N I_i \supset E$, come sopra abbiamo la tesi; in caso contrario ottteniamo una successione $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ di intervalli disgiunti per cui vale $m(I_{n+1}) > \frac{k_n}{2}$. Poiché $\cup_{i=1}^N I_i \subset A$ abbiamo $\sum m(I_i) < m(A) \leq \infty$; allora dato $\varepsilon > 0$ esiste N tale che

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} m(I_i) < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Poniamo $B = E \setminus \cup_{i=1}^N I_i$ e mostriamo che $m^*(B) < \varepsilon$: ciò proverà la tesi. Sia $x \in B$: allora esiste $I \in \mathcal{F}$ disgiunto da $I_1, \dots, I_N$ tale che $x \in I$; d'altra parte esiste $n > N$ tale che $I \cap I_n \neq \emptyset$, altrimenti per ogni $n \in \mathbb{N}$ avremmo $m(I) \leq k_n < 2\,m(I_{n+1})$ e poiché $\lim m(I_n) = 0$ (la serie a termini positivi converge) avremmo $m(I) = 0$, assurdo. Sia n il più piccolo intero come sopra, allora vale $m(I) \leq k_{n-1} < 2\,m(I_n)$;detto x_0 il punto medio di I_n, si ha

$$|x - x_0| \leq m(I) + \frac{1}{2}m(I_n) \leq \frac{5}{2}m(I_n).$$

Indicando con J_n l'intervallo di centro x_0 e ampiezza $5\,m(I_n)$, abbiamo $x \in J_n$ e dunque $B \subset \cup J_n$. Allora per la subadditività della misura esterna

$$m^*(B) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} m^*(J_n) = 5 \sum_{n=N+1}^{\infty} m(I_n) < \varepsilon.$$

□

Prima di passare al teorema vero e proprio introduciamo per $x \in (a,b)$ i quattro *numeri derivati* (o derivate del Dini)

$$D^+f(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \qquad D_+f(x) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$
$$D^-f(x) = \limsup_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \qquad D_-f(x) = \liminf_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Chiaramente abbiamo $D^+f(x) \geq D_+f(x)$ e $D^-f(x) \geq D_-f(x)$. Se tali valori coincidono e sono finiti il loro valore comune non è altro che $f'(x)$.

Teorema 2.2.4 (di derivazione di Lebesgue)**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente. Allora è differenziabile q.o. su $[a,b]$. La derivata f' è misurabile e vale*

$$\int_a^b f'\,dm \leq f(b) - f(a).$$

Dimostrazione. In virtù di quanto detto sopra per avere la differenziabità di f ci basta provare $D^+f(x) \geq D_-f(x)$ e $D^-f(x) \geq D_+f(x)$; mostreremo che gli insiemi in cui non valgono le disuguaglianze hanno misura nulla (consideriamo solo la prima disuguaglianza; per l'altra il calcolo è uguale, cambia solo il segno dell'incremento). Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ con $\alpha < \beta$ sia

$$E_{\alpha\beta} = \{x \in (a,b) \,:\, D_-f(x) < \alpha < \beta < D^+f(x)\};$$

poiché

$$\bigcup_{\alpha,\beta\in\mathbb{Q}} E_{\alpha\beta} = \{x \in (a,b) \,:\, D_-f(x) < D^+f(x)\},$$

ci basta provare che $m^*(E_{\alpha\beta}) = 0$ per ogni $\alpha < \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$: allora per le proprietà della misura esterna esiste un aperto B tale che $m(B) \leq m^*(E_{\alpha\beta}) + \varepsilon$. Se $x \in E_{\alpha\beta}$

$$D_-f(x) = \liminf_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x)-f(x-h)}{h};$$

allora per ogni $\delta > 0$ esiste un $h_\delta \in (0, \delta]$ tale che

$$[x - h_\delta, x] \subset B, \qquad f(x) - f(x - h_\delta) < \alpha h_\delta.$$

La famiglia di intervalli $\{[x - h_\delta, x] \ : \ x \in E_{\alpha\beta}, \delta > 0\}$ è un ricoprimento di $E_{\alpha\beta}$ che soddisfa le ipotesi del lemma 2.2.3, per il quale esistono $[x_1 - h_1, x_1], \dots, [x_N - h_N, x_N]$ disgiunti tali che

$$\bigcup_{i=1}^{N} [x_i - h_i, x_i] \subset B, \qquad m^*\left(E_{\alpha\beta} \setminus \bigcup_{i=1}^{N} [x_i - h_i, x_i] \right) < \varepsilon.$$

Quindi per l'aperto $A = \bigcup_{i=1}^{N} (x_i - h_i, x_i) \subset B$ vale ugualmente $m^*(E_{\alpha\beta} \setminus A) < \varepsilon$, e applicando ad A la definizione di misurabilità

$$m^*(A \cap E_{\alpha\beta}) = m^*(E_{\alpha\beta}) - m^*(E_{\alpha\beta} \setminus A) > m^*(E_{\alpha\beta}) - \varepsilon.$$

Considerando ora l'insieme $A \cap E_{\alpha\beta}$ e ripetendo l'argomento precedente, se $y \in A \cap E_{\alpha\beta}$ abbiamo

$$D^+ f(y) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(y + h) - f(y)}{h} > \beta;$$

allora per ogni $\delta > 0$ esiste $k_\delta \in (0, \delta]$ tale che $[y, y + k_\delta] \subset A$ e $f(y + k_\delta) - f(y) > \beta k_\delta$. La famiglia di intervalli $\{[y, y + k_\delta] \ : \ y \in A \cap E_{\alpha\beta}, \delta > 0\}$ è un ricoprimento di $A \cap E_{\alpha\beta}$ che soddisfa le ipotesi del lemma 2.2.3 per il quale esistono $[y_1 - k_1, y_1], \dots, [y_M - k_M, y_M]$ disgiunti tali che

$$\bigcup_{i=1}^{N} [y_i - k_i, y_i] \subset A, \qquad m^*\left((A \cap E_{\alpha\beta}) \setminus \bigcup_{i=1}^{N} [y_i - k_i, y_i] \right) < \varepsilon.$$

Allora per l'aperto $C = \cup_{i=1}^{N} (y_i - k_i, y_i) \subset A$ vale $m^*((A \cap E_{\alpha\beta}) \setminus C) < \varepsilon$. Dalla precedente stima dalla misurabilità di C

$$\begin{aligned} m(C) \geq m^*(C \cap A \cap E_{\alpha\beta}) &= m^*(A \cap E_{\alpha\beta}) - m^*((C \cap A) \setminus E_{\alpha\beta}) \\ &> m^*(A \cap E_{\alpha\beta}) - \varepsilon > m^*(E_{\alpha\beta}) - 2\,\varepsilon, \end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{j=1}^{M} (f(y_j + k_j) - f(y_j)) > \beta \sum_{j=1}^{M} k_j = \beta m(C) > \beta [m^*(E_{\alpha\beta}) - 2\,\varepsilon].$$

Ma essendo $C \subset A$ e A unione disgiunta di intervalli, per ogni $j \in \{1, \dots, M\}$ esiste un unico $i \in \{1, \dots, N\}$ tale che $(y_j, y_j + k_j) \subset (x_i - h_i, x_i)$, e poiché f è crescente abbiamo

$$\sum_{j=1}^{M} (f(y_j + k_j) - f(y_j)) \leq \sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - f(y_i + h_i)) < \alpha \sum_{i=1}^{N} h_i$$
$$= \alpha\, m(A) < \alpha\, m(B) < \alpha(m(E_{\alpha\beta} + \varepsilon)),$$

per cui

$$\beta(m^*(E_{\alpha\beta}) - 2\,\varepsilon) < \alpha(m^*(E_{\alpha\beta}) + \varepsilon),$$

da cui ricaviamo

$$m^*(E_{\alpha\beta}) < \varepsilon\, \frac{\alpha + 2\beta}{\beta - \alpha}.$$

Per l'arbitrarietà di ε otteniamo $m^*(E_{\alpha\beta}) = 0$, quindi $\cup_{\alpha<\beta\in\mathbb{Q}} E_{\alpha\beta}$ ha misura nulla e $D^+ f(x) \leq D_- f(x)$ q.o. in (a,b).

Abbiamo mostrato dunque per q.o. $x \in (a, b)$ esiste la funzione

$$g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h};$$

resta da vedere che $|g(x)| < \infty$ per q.o. $x \in (a, b)$. Estendiamo la funzione f oltre b ponendo $f(x) = f(b)$ per ogni $x \geq b$ e definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ la funzione

$$g_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}, \qquad x \in [a, b].$$

Chiaramente $g_n(x) \to g(x)$ per q.o. $x \in [a, b]$; inolre le g_n sono misurabili perché f lo è (essendo monotona) e dunque g è misurabile e non negativa dato che f è crescente. Grazie allora al lemma di Fatou abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_a^b g\, dm &\leq \liminf_{n \to \infty} \int_a^b n \left[f\big(x + \frac{1}{n}\big) - f(x) \right] dm \\
&< \liminf_{n \to \infty} n \Big[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f\, dm - \int_a^b f\, dm \Big] \\
&= \liminf_{n \to \infty} n \Big[\int_b^{b+\frac{1}{n}} f\, dm - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f\, dm \Big] \\
&\leq \liminf_{n \to \infty} n \Big[\frac{1}{n} f(b) - \frac{1}{n} f(a) \Big] = f(b) - f(a),
\end{aligned}$$

dunque g è sommabile in $[a, b]$ e in particolare g è q.o. finita in $[a, b]$. Quindi f è q.o. derivabile in $[a, b]$ con derivata f' sommabile; inoltre vale

$$\int_a^b f'\, dm \leq f(b) - f(a).$$

$\square$

Osservazione 2.2.5.

1. Se f è monotona decrescente, applicando il teorema alla funzione $-f$ troviamo che f è derivabile per q.o., f' è sommabile q.o. e che vale $\int_a^b f'\,dm \geq f(b) - f(a)$.

2. La disuguaglianza può essere stretta; infatti per la funzione di Heaviside in $[-1, 1]$
$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0[\\ 1 & \text{se } x \in [0, 1]. \end{cases}$$
si ha $H' = 0$ q.o. e vale
$$\int_{-1}^{1} H'\,dx = 0 < 1 = H(1) - H(-1).$$

Ora grazie al teorema 2.1.6 possiamo dedurre il seguente risultato:

Corollario 2.2.6. *Ogni funzione in $BV[a, b]$ è derivabile q.o. e la derivata f' è sommabile in $[a, b]$.*

2.3 Misure finite con segno e funzioni BV

In questo paragrafo analizzaiamo i rapporti tra le misure con segno e le funzioni a variazione limitata. Intanto estendiamo la definizione a funzioni definite su intervalli qualsiasi (anche illimitati).

Definizione 2.3.1. Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, data $f : I \to \mathbb{R}$ e definito l'insieme delle successioni crescenti finite in I, $S_I = \{(t_i)_{i=0}^n \subset I,\ n \in \mathbb{N},\ t_0 < \cdots < t_n\}$, poniamo
$$V_f(I) = \sup \left\{ \sum_i |f(t_i) - f(t_{i-1})| \ :\ (t_i) \in S \right\}.$$
Se $V_f(I) < \infty$ la funzione f è detta a *variazione limitata su I* (o variazione finita). Se $I = (-\infty, +\infty)$ e $V_f(-\infty, +\infty) < \infty$, f è detta a *variazione limitata.*

Osservazione 2.3.2. Questa definizione generalizza la definizione 2.1.1: infatti se I è un intervallo chiuso, per ottenere $V_f(I)$ è sufficiente limitarsi a fare l'estremo superiore sulle successioni contenenti gli estremi. Notiamo che a livello di notazione $V_f([a, b]) = T_a^b(f)$, utilizzeremo questa nuova notazione per comodità, poiché ci sarà utile fissare la funzione e far variare gli intervalli.

Definizione 2.3.3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a variazione limitata; diciamo *variazione di* f la funzione $V_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $V_f(x) = V_f((-\infty, x])$.

Sia μ una misura con segno finita su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Definiamo la funzione $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Se $(t_i)_{i=0}^n \subset \mathbb{R}$ è una successione crescente, allora

$$\sum_{i=0}^{n} |F_\mu(t_i) - F_\mu(t_{i-1})| = \sum_{i=0}^{n} |\mu((t_i, t_{i-1}])| \le |\mu|(\mathbb{R});$$

passando all'estremo superiore abbiamo $V_{F_\mu} \le |\mu|(\mathbb{R})$, quindi F_μ è a variazione limitata.

Proposizione 2.3.4. *Sia μ una misura con segno finita su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$; allora*

1. *F_μ si annulla a $-\infty$;*
2. *F_μ è continua a destra;*
3. *F_μ è continua in $x \in \mathbb{R}$ se e solo se $\mu(\{x\}) = 0$.*

Dimostrazione. 1. Vogliamo provare che

$$\lim_{a \to -\infty} \mu(-\infty, a] = 0.$$

Fisssato $\varepsilon > 0$ vogliamo mostrare che esiste $M < 0$ (che possiamo prendere intero per comodità) tale che per ogni $a \le M$ risulti $|\mu(-\infty, a]| < \varepsilon$. Per la formula di decomposizione di Jordan (teorema 1.2.5) possiamo scrivere μ come differenza di due misure $\mu = \mu^+ - \mu^-$, ed essendo μ finita anche le due misure saranno finite. Mostriamo che $\mu^+(-\infty, a] \to 0$ quando $a \to -\infty$, e che lo stesso vale per μ^-.

$$\mu^+(-\infty, a] \le \mu^+\Big(\bigcup_{k=0}^{-\infty}(k-1, k]\Big) = \sum_{k=0}^{-\infty} \mu^+(k-1, k] \le \mu^+(\mathbb{R}) < \infty.$$

Dunque la serie a termini positivi è convergente e le code sono dunque infinitesime, per cui esiste un $M^+ < 0$ tale che per ogni $a < M^+$

$$\mu^+(-\infty, a] \le \sum_{k=M^+}^{-\infty} \mu^+(k-1, k] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ripetendo il ragionamento per μ^- e chiamando $M = \min\{M^+, M^-\}$, per ogni $a < M$ vale

$$|\mu(-\infty, a]| = |\mu^+(-\infty, a] - \mu^-(-\infty, a]| < \varepsilon.$$

2. Proviamo che $\lim_{x\to a^+} F_\mu(x) = F_\mu(a)$. Ricordando che F_μ è a variazione limitata e dunque il suo limite destro esiste

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+} F_\mu(x) &= \lim_{x\to a^+} \mu(-\infty, x] = \lim_{n\to+\infty} F_\mu\Big(-\infty, a+\frac{1}{n}\Big]\\ &= \mu\Bigg(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(-\infty, a+\frac{1}{n}\Big]\Bigg) = \mu((-\infty, a]) = F_\mu(a).\end{aligned}$$

3. Grazie al punto (2) basta provare l'equivalenza con F_μ continua a sinistra.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^-} F_\mu(x) &= \lim_{x\to a^-} \mu(-\mu, x] = \lim_{n\to+\infty} F_\mu\Big(-\infty, a-\frac{1}{n}\Big]\\ &= \mu\Bigg(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(-\infty, a-\frac{1}{n}\Big]\Bigg) = \mu((-\infty, a)) = F_\mu(a).\end{aligned}$$

   Allora $F_\mu(a) = \mu((-\infty, a]) = \mu((-\infty, a))$ se e solo se $\mu(\{a\}) = 0$.

□

Osservazione 2.3.5. Come si è fatto nell'osservazione 2.1.2, si può provare che per ogni $a < b \in \mathbb{R}$

$$V_f(-\infty, b] = V_f(-\infty, a] + V_f[a, b]. \tag{2.3}$$

Inoltre se $b \in R$, allora

$$V_f(-\infty, b] = \lim_{a\to-\infty} V_f[a, b]; \tag{2.4}$$

infatti, dato $\varepsilon > 0$, per le proprietà dell'estremo superiore esiste una successione $(t_i)_{i=0}^n \in S_{(-\infty,b]}$ che soddisfa

$$\sum_{i=0}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| > V_f(-\infty, b] - \varepsilon.$$

Per ogni $a < t_0$ abbiamo

$$V_f(-\infty, b] - \varepsilon < V_f[a, b] \leq V_f(-\infty, b],$$

allora per arbitrarietà di ε abbiamo la tesi.

Infine se $a < c$ e se f è continua a destra in a, allora

$$V_f[a, c] = \lim_{b\to a^+} V_f[b, c]. \tag{2.5}$$

Infatti dato $\varepsilon > 0$ esiste una successione $(t_i)_{i=0}^n \in S_{[a,c]}$ tale che

$$\sum_{i=0}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| > V_f[a,c] - \varepsilon,$$

allora scelto un $b < t_1$ e tale che $|f(b) - f(a)| < \varepsilon$ (che esiste per continuità a destra di f) abbiamo

$$\begin{aligned}
V_f[a,c] - \varepsilon &< \sum_{i=0}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\
&\leq |f(b) - f(a)| + |f(t_1) - f(b)| + \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\
&\leq |f(b) - f(a)| + V_f[b,c] \leq \varepsilon + V_f[b,c],
\end{aligned}$$

da cui

$$V_f[a,c] - 2\varepsilon < V_f[b,c] \leq V_f[a,c],$$

e per arbitrarietà di ε abbiamo la tesi.

Lemma 2.3.6. *Sia una funzione a variazione limitata a valori reali. Allora*

1. *V_f è limitata e non decrescente;*
2. *V_f si annulla a $-\infty$;*
3. *se f è continua a destra allora V_f è continua a destra.*

Dimostrazione. 1. V_f è limitata, infatti

$$V_f(x) := V_f(-\infty, x] \leq V_f(\mathbb{R}) < \infty;$$

inoltre se $x < y$

$$\begin{aligned}
V_f(x) := V_f(-\infty, x] &= \sup \sum_{i=0}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\
&\leq \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + |f(y) - f(t_n)| \right\} \\
&\leq V_f(-\infty, y] = V_f(y),
\end{aligned}$$

e questo ci dà la non decrescenza.

2. Da (2.3) e (2.4) abbiamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} V_f(x) &= \lim_{x\to-\infty} V_f(-\infty, x] \\
&= \lim_{x\to-\infty} \Big[V_f(-\infty, b] - V_f[x, b]\Big] \\
&= V_f(-\infty, b] - V_f(-\infty, b] = 0.
\end{aligned}$$

3. Da (2.3) e da (2.5) (grazie alla continuità a destra di f) abbiamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a^+} V_f(x) = \lim_{x\to a^+} V_f(-\infty, x] &= \lim_{x\to a^+} \Big[V_f(-\infty, b] - V_f[x, b]\Big] \\
= \lim_{x\to a^+} \Big[V_f(-\infty, a] + V_f[a, b] - V_f[x, b]\Big] &= V_f(a).
\end{aligned}$$

□

Ora proviamo il risultato più importante di questo paragrafo: la bigezione tra le funzioni a variazione limitata e le misure con segno finite su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Teorema 2.3.7. *L'equazione (2.2) definisce una bigezione $\mu \mapsto F_\mu$ tra l'insieme di tutte le misure con segno finite su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ e l'insieme di tutte le funzioni continue a destra, a variazione limitata, che si annullano a $-\infty$.*

Dimostrazione. Data μ come nell'ipotesi, dalla proposizione 2.3.4 segue che, F_μ è continua a destra, è a variazione limitata e si annulla a $-\infty$. Siano μ, ν due misure con segno finite tali che $F_\mu = F_\nu$: scrivendo $\mu = \mu^+ - \mu^-$ e $\nu = \nu^+ - \nu^-$, si trova $F_{\mu^+} - F_{\mu^-} = F_{\nu^+} - F_{\nu^-}$. Posto $G = F_{\mu^+} + F_{\nu^-} = F_{\nu^+} + F_{\mu^-}$, poiché i due membri sono funzioni limitate, non decrescenti, continue a destra che si annullano a $-\infty$, in virtù della proposizione 1.2.4 esiste un'unica misura λ tale che $G(x) = \lambda(-\infty, x]$. Quindi $\mu^+ + \nu^- = \nu^+ + \mu^-$ per cui $\mu = \nu$, da cui l'iniettività.
Data una funzione F continua a destra, a variazione limitata e nulla a $-\infty$ possiamo scriverla come differenza di due funzioni crescenti $F = F_1 - F_2$, con F_1 e F_2 che soddisfano le ipotesi della proposizione 1.2.4, (ricordiamo che $F_1 = V_F$ e $F_2 = V_F - F$). Allora per la proposizione 1.2.4 esistono due misure μ_1 e μ_2 tali che $F_1 = F_{\mu_1}$ e $F_2 = F_{\mu_2}$ e pertanto

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x) = F_{\mu_1}(x) - F_{\mu_1}(x) = \mu_1(-\infty, x] - \mu_2(-\infty, x].$$

Una somma di misure con segno è una misura con segno, da cui la suriettività e quindi la tesi. □

2.4 Definizione moderna

In questo paragrafo presentiamo un punto di vista più moderno, legato alla teoria delle distribuzioni, definendo una funzione BV in termini della sua derivata distribuzionale e mostreremo l'effettiva equivalenza con la precedente definizione. Infine presenteremo un teorema di decomposizione. Nel seguito consideremo $BV(\Omega)$ (a priori sottospazio di $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$) come sottospazio di $L^1(\Omega)$ allo scopo di ottenere buone proprietà di compattezza e continuità.

Nel seguito Ω sarà un aperto di $\mathbb{R}$.

Definizione 2.4.1. Sia $f \in L^1(\Omega)$. Diciamo che f è una funzione a *variazione limitata in* Ω, e scriviamo $f \in BV(\Omega)$, se la derivata distribuzionale di f è rappresentabile da una misura con segno di Radon finita in Ω, cioè risulta

$$\int_\Omega f\,\varphi'\,dx = -\int_\Omega \varphi\,d\mu, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \tag{2.6}$$

per qualche misura di Radon μ, finita in Ω. Denoteremo tale μ con Df.

Definiamo inoltre la *variazione di* f *in* Ω come

$$V(f,\Omega) = \sup\left\{\int_\Omega f\,\varphi'\,dx \;:\; \varphi \in C_c^\infty(\Omega), |\varphi| \leq 1\right\}. \tag{2.7}$$

Data $f \in BV(\Omega)$ vale il seguente teorema che lega la variazione di f alla variazione totale di Df.

Teorema 2.4.2. *Sia $f \in L^1(\Omega)$. Allora $f \in BV(\Omega)$ se e solo se $V(f,\Omega) < \infty$. Inoltre $V(f,\Omega) = |Df|(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia $f \in BV(\Omega)$, allora osserviamo che, detta h la densità di Df rispetto a $|Df|$, per ogni funzione $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ vale

$$\int_\Omega f\,\varphi'\,dx = -\int_\Omega \varphi\,dDf = -\int_\Omega \varphi\,h\,d|Df| \leq \|\varphi\|_\infty |Df|(\Omega) < \infty.$$

Segue che $V(f,\Omega) \leq |Df|(\Omega)$. Per provare la disuguaglianza opposta definiamo l'operatore

$$L_f : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$$

definito come

$$L_f(\varphi) = -\int_\Omega f\,\varphi'\,dx \qquad \forall\,\varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Osserviamo che $\|L_f\| = V(f,\Omega)$. Per densità possiamo estendere L_f ad un operatore $L_f : C_0^0(\Omega) \to \mathbb{R}$, con la stessa norma. Allora per il teorema 1.2.2 di rappresentazione di Riesz esiste un'unica misura di Radon μ, finita su Ω tale che $L_f(\varphi) = \int_\Omega \varphi \, d\mu$ e la variazione totale di μ, $|\mu|$ è uguale a $\|L_f\|$. In particolare per ogni funzione $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ vale

$$-\int_\Omega f\,\varphi' \, dx = L_f(\varphi) = \int_\Omega \varphi \, d\mu,$$

quindi per la definizione 2.1.1 $\mu = Df$, da cui la tesi. □

Prima di procedere con il teorema di equivalenza osserviamo che la definizione 2.1.1 è una definizione puntuale e non adatta al contesto delle funzioni $L^1(\Omega)$: infatti basta modificare la funzione in qualche punto per ottenere una variazione diversa. Per superare questo ostacolo introduciamo la seguente definizione:

Definizione 2.4.3. Definiamo *variazione essenziale* $eV_f(\Omega)$ l'estremo inferiore delle variazioni puntuali nella classe di equivalenza di f:

$$eV_f(\Omega) = \inf\{V_g(\Omega) \ : \ g = f \; q.o. \, in \, \Omega\}. \tag{2.8}$$

Teorema 2.4.4. *Per ogni $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ l'estremo inferiore in (2.8) è raggiunto e la variazione $V(f,\Omega)$ coincide con la variazione essenziale $eV_f(\Omega)$.*

Dimostrazione. Assumiamo che $\Omega = I = (a,b)$ sia un intervallo possibilmente illimitato. Per provare la disuguaglianza $V(f,I) \leq eV_f(I)$, ci basta mostrare che per ogni g nella classe di equivalenza di f vale $V(f,I) \leq V_g(I)$. Consideriamo per ogni intero $h \geq 1$ una successione $\{x_i^h\}_{0 \leq i \leq N_h} \in S_I$ tali che

$$x_0 = a, \quad x_{N_h} = b, \quad 0 < x_{i+1}^h - x_i^h \leq \frac{1}{h} \quad \forall i = 1, \ldots, N_h - 2,$$

con $x_1^h \downarrow a$ e $x_{N_h-1}^h \uparrow b$. Data g, definiamo la funzione

$$g_h(t) = \sum_{i=0}^{N_h-1} g(y_i^h) \chi_{(x_i^h, x_{i+1}^h]}(t), \qquad con \;\; y_i^h \in (x_i^h, x_{i+1}^h].$$

Osserviamo che per ogni scelta di $\{y_i^h\}$, grazie al teorema 2.1.6, $g_h \to g$ in $L^1_{loc}(I)$ per $h \to \infty$. Infatti, scrivendo $g = g_1 - g_2$ con g_1, g_2 crescenti e a variazione limitata

$$\begin{aligned}
\int_I |g(t) - g_h(t)|\, dt &= \int_I \left| g(t) - \sum_{i=0}^{N_h-1} g(y_i^h)\chi_{(x_i^h, x_{i+1}^h]}(t) \right| dt \\
&\leq \sum_{i=0}^{N_h-1} \int_{x_i^h}^{x_{i+1}^h} |g(t) - g(y_i^h)|\, dt \\
&\leq \sum_{i=0}^{N_h-1} \int_{x_i^h}^{x_{i+1}^h} \Big[|g_1(t) - g_1(y_i^h)| + |g_2(t) - g_2(y_i^h)| \Big]\, dt \\
&\leq \frac{V_{g_1}(I) + V_{g_2}(I)}{h} \to 0.
\end{aligned}$$

Per $h > 1$, osservato che per ogni $\varphi \in C_c^\infty(I)$ con $|\varphi| \leq 1$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_I g_h \varphi' \, dx = \sum_{i=0}^{N_h-1} g(y_i^h)[\varphi(x_{i+1}^h) - \varphi(x_i^h)] &= \sum_{i=1}^{N_h-1} [g(y_{i-1}^h) - g(y_i^h)]\varphi(x_i^h)] \\
&\leq \sum_{i=1}^{N_h-1} |g(y_i^h) - g(y_{i-1}^h)|,
\end{aligned}$$

si ricava immediatamente

$$V(g_h, I) \leq \sum_{i=1}^{N_h-1} |g(y_i^h) - g(y_{i-1}^h)| \leq V_g(I).$$

Allora passando al limite per $h \to \infty$ e utilizzando la semicontinuità della variazione in $L^1_{loc}(I)$

$$V(f, I) = V(g, I) \leq \liminf_{h\to\infty} V(g_h, I) \leq V_g(I).$$

Adesso proviamo la disugualglianza opposta, $eV_f(I) \leq V(f, I)$; possiamo supporrre $V(f, I) < \infty$. Essendo $V(f, I) < \infty$ e $f \in L^1_{loc}(I)$ per il teorema 2.4.2 abbiamo $|Df|(J) = V(f, J)$ per ogni $J \Subset I$. Allora dato che

$$\sup_{J \Subset I} |Df|(J) = \sup_{J \Subset I} V(f, J) = V(f, I) < \infty,$$

possiamo estendere $|Df|$ ad una misura finita di Radon in I nel seguente modo:

$$|Df|(A) = \sup\{|Df|(A \cap J) \,:\, J \Subset I\} \qquad \forall A \in \mathcal{B}(I),$$

e abbiamo che $|Df|(I) = V(f, I)$. Sia ora $\omega(t) := Df((a,t))$: mostriamo che la derivata distribuzionale di ω è proprio Df, cioè $Df = D\omega$. Per ogni $\varphi \in C_c^\infty(I)$ applicando il teorema di Fubini abbiamo

$$\begin{aligned}\int_a^b \omega(t)\,\varphi'(t)\,dt &= \int_a^b \int_a^t \varphi'(t)\,dDf(s)\,dt \\ &= \int_a^b \int_s^b \varphi'(t)\,dt\,dDf(s) = -\int_a^b \varphi(s)\,dDf(s)\end{aligned}$$

da cui le derivate distribuzionali di f e ω coincidono. Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(t) - \omega(t) = c$ per q.o. $t \in I$, e questo prova che $\omega + c$ appartiene alla classe di equivalenza di f.

Ora, per ogni successione $\{t_i\}_{i=0}^N \in S_I$ abbiamo

$$\sum_{i=0}^{N-1} |\omega(t_{i+1}) - \omega(t_i)| = \sum_{i=0}^{N-1} |Df([t_i, t_{i+1}))| \le \sum_{i=0}^{N-1} |Df|([t_i, t_{i+1})) \le |Df|(I).$$

Quindi

$$eV_f(I) \le V_{\omega+c}(I) = V_\omega(I) \le |Df|(I) = V(f, I).$$

Oltre alla tesi per $\Omega = I$ abbiamo anche mostrato che l'estremo inferiore in (2.8) viene raggiunto da $\omega + c$. Infine, se Ω è un qualsiasi aperto notiamo che, per l'additività di $V_f(\cdot)$, $eV_f(\Omega) = \sum_I eV_f(I)$ (con I componenti connesse di Ω) e Ω ha al più una quantità numerabile di componenti connesse; allora grazie all'additività abbiamo la tesi. $\square$

Abbiamo appena provato che se f è una funzione a variazione limitata esiste un rappresentante $\bar{f}$ nella sua classe di equivalenza tale che

$$V_{\bar{f}}(\Omega) = eV_f(\Omega) = V(f, \Omega). \tag{2.9}$$

Chiameremo un rappresentante di f con questa proprietà un *buon rappresentante*. Caratterizziamo il buon rappresentante:

Teorema 2.4.5 (Buon rappresentante)**.** *Siano $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f \in BV(I)$. Sia A l'insieme degli atomi di Df, cioè $A = \{t \in I : Df(\{t\}) \neq 0\}$. Allora valgono le seguenti proprietà:*

(a) Esiste un unico $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$f^l(t) := c + Df((a,t)), \qquad f^r(t) := c + Df((a,t]) \qquad t \in I, \tag{2.10}$$

sono buoni rappresentanti di f, f^l continuo a sinistra e f^r continuo a destra. Inoltre ogni altra funzione $\bar{f} : I \to \mathbb{R}$ è un buon rappresentante di f se e solo se per ogni $t \in [0,1]$ esiste un $\theta_t \in [0,1]$ tale che

$$\bar{f}(t) = \theta_t f^l(t) + (1-\theta_t) f^r(t). \tag{2.11}$$

(b) Ogni buon rappresentante $\bar{f}$ è continuo in $I \setminus A$ ed ha discontinuità di tipo salto su ogni punto di A:

$$\bar{f}(t_-) = f^l(t) = f^r(t_-), \quad \bar{f}(t_+) = f^l(t_+) = f^r(t), \quad \forall t \in A.$$

(c) Ogni buon rappresentante $\bar{f}$ è differenziabile q.o. in I. La derivata $\bar{f}'$ è la densità di Df rispetto alla misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. (a) Da l 2.4.4 segue che la funzione $\omega + c = f^l$ è un buon rappresentante di f e con lo stesso ragionamento si può dimostrare lo stesso di f^r (la costante c è la stessa perché f^l e f^r coincidono in $I \setminus A$). Proviamo che ogni funzione $\bar{f}$ che soddisfa (2.11) è un buon rappresentante. Ci basta provare $V_{\bar{f}}(I) \leq V(f, I)$, l'altra disuguaglianza è banale in virtù di (2.9). Osserviamo che per ogni successione $\{t_i\}_{i=0}^N \in S_I$, e per ogni $\theta_t \in [0,1]$ abbiamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{N-1} |\bar{f}(t_{i+1}) - \bar{f}(t_i)| \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} |(1-\theta_{t_{i+1}}) f^l(t_{i+1}) + \theta_{t_{i+1}} f^r(t_{i+1}) - (1-\theta_{t_i}) f^l(t_i) - \theta_{t_i} f^r(t_i)| \\
&\leq \sum_{i=0}^{N-1} |f^l(t_{i+1}) - f^l(t_i)| + \theta_{t_{i+1}} \sum_{i=0}^{N-1} |f^l(t_{i+1}) - f^r(t_{i+1})| + \theta_{t_i} \sum_{i=0}^{N-1} |f^l(t_i) - f^r(t_i)| \\
&\leq \sum_{i=0}^{N-1} |f^l(t_{i+1}) - f^l(t_i)| + \sum_{i=0}^{N-1} |f^l(t_{i+1}) - f^r(t_{i+1})| + \sum_{i=0}^{N-1} |f^l(t_i) - f^r(t_i)|.
\end{aligned}$$

Notiamo che f^l e f^r coincidono su $I \setminus A$, per cui da (2.10) $f^l(t) - f^r(t) = Df(\{t\})$; quindi abbiamo

$$V_{\bar{f}}(I) \leq |Df|(I) + 2|Df|(A) < \infty. \tag{2.12}$$

Osserviamo che

$$\lim_{s \uparrow t} \overline{f}(s) = \lim_{s \uparrow t} f^l(s) = f^l(t), \qquad \lim_{s \downarrow t} \overline{f}(s) = \lim_{s \downarrow t} f^r(s) = f^r(t),$$

per ogni $t \in I$. Ora proviamo un lemma, il quale afferma che per calcolare la variazione puntuale $V_{\bar{f}}(I)$ ci si può limitare a considerare le partizioni i cui nodi sono punti di continuità; allora da (2.12) avremo $V_{\bar{f}}(I) \leq |Df|(I) = V(f, I)$.

Lemma 2.4.6. *Sia $u : I = (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione per cui $V_u(I) < \infty$. Chiamiamo*

$$T = \{\tau : a < t_1 < \cdots < t_{n_\tau} = b \mid t_i \textit{ sono punti di continuità di} u\}$$

e definiamo

$$S_u(I) = \sup_{\tau \in T} \sum_{i=1}^{n_\tau - 1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)|.$$

Se per ogni $t \in I$ esiste un $\theta_t \in [0,1]$ tale che $u(t) = \theta_t u(t_-) + (1-\theta_t)u(t_+)$ allora $S_u(I) = V_u(I)$.

Dimostrazione. Per le proprietà dell'estremo superiore $V_u(I) \geq S_u(I)$. Sia $\tau : a < t_1 < \cdots < t_{n_\tau} = b$ una partizione di (a,b) tale che esista un indice i per cui t_i è un punto di discontinuità di u. Allora

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n_\tau - 1} |u(t_{j+1}) - u(t_j)| = \sum_{j=1}^{i-1} &|u(t_{j+1}) - u(t_j)| + |u(t_i) - u(t_{i-1})| \\ &+ |u(t_{i+1}) - u(t_i)| + \sum_{j=i+1}^{n_\tau - 1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)|.\end{aligned}$$

Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Siano $t_i^1, t_i^2 \in (a,b)$ tali che $t_i^1 < t_i < t_i^2$, $|u(t_{i-}) - u(t_i^1)| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|u(t_{i+}) - u(t_i^2)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Allora

$$\begin{aligned}|u(t_i) - u(t_{i-1})| &= |\theta_{t_i} u(t_{i-}) + (1-\theta_{t_i})u(t_{i+}) - u(t_{i-1})| \\ &\leq \theta_{t_i}|u(t_{i-}) - u(t_{i-1})| + (1-\theta_{t_i})|u(t_{i+}) - u(t_{i-1})| \\ &\leq \theta_{t_i}|u(t_i^1) - u(t_{i-1})| + (1-\theta_{t_i})|u(t_i^2) - u(t_{i-1})| \\ &\quad + (1-\theta_{t_i})|u(t_i^2) - u(t_i^1)| + \frac{\varepsilon}{2};\end{aligned}$$

allo stesso modo

$$\begin{aligned}|u(t_i) - u(t_{i+1})| \leq \theta_{t_i}&|u(t_i^2) - u(t_{i+1})| + (1-\theta_{t_i})|u(t_i^1) - u(t_{i+1})| \\ &+ \theta_{t_i}|u(t_i^2) - u(t_i^1)| + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Dunque, detta τ' la partizione ottenuta da τ togliendo il nodo t_i e aggiungendo i nodi t_i^1, t_i^2, che per semplicità indichiamo con $\tau' : a < s_1 < \cdots < s_{n_{\tau'}} < b$, abbiamo

$$\sum_{j=1}^{n_\tau - 1} |u(t_{j+1}) - u(t_j)| \leq \sum_{j=1}^{n_{\tau'} - 1} |u(s_{j+1}) - u(s_j)| + \varepsilon;$$

passando all'estremo superiore, per arbitrarietà di ε abbiamo la tesi. □

Mostriamo ora che ogni buon rappresentante di f soddisfa (2.11). A questo scopo consideriamo $V_{\bar{f}}(\cdot)$ come funzione degli intervalli $J \subset I$[1]. Questa funzione soddisfa le seguenti proprietà:

[1]Abbiamo utilizzato lo stesso approccio nel paragrafo 2.3, come specificato nell'osservazione 2.3.2.

1. $V_{\bar f}(J) = \sup_{J' \Subset J} V_{\bar f}(J')$;

2. $\sum_{i=0}^n V_{\bar f}(J_i) \le V_{\bar f}(J)$, con $J \supset \bigcup_{i=0}^n J_i$ e $J_i \cap J_k = \emptyset$ se $i \neq k$.

Usando queste proprietà mostriamo che $\bar f$ è un buon rappresentante di f in ogni intervallo $J = (c, d)$. Poiché A è al più numerabile e vale la proprietà 1., per provare la disuguaglianza $V_{\bar f}(J) \le |Df|(J)$ possiamo supporre che $c, d \notin A$ [2]. Allora grazie al teorema 2.4.2

$$\begin{aligned} V_{\bar f}(J) &\le -V_{\bar f}((a,c)) - V_{\bar f}(d,b) + V_{\bar f}(I) \\ &\le -|Df|((a,c)) - |Df|((d,b)) + |Df|((a,b)) = |Df|((c,d)). \end{aligned}$$

Ricordando il teorema 2.1.6 (e modificandolo opportunamente per funzioni definite su un intervallo aperto) possiamo scrivere $\bar f$ come differenza di funzioni crescenti e dunque esistono $\bar f(t_-)$ e $\bar f(t_+)$, limite sinistro e limite destro. Allora ricordando che $\bar f$ è un buon rappresentante di f (come f^l e f^r) abbiamo:

$$\begin{aligned} \bar f(t_-) &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \int_{t-r}^{t} \bar f(s)\, ds = \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \int_{t-r}^{t} f^l(s)\, ds = f^l(t) \quad \forall t \in I, \\ \bar f(t_+) &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \int_{t}^{t+r} \bar f(s)\, ds = \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \int_{t}^{t+r} f^r(s)\, ds = f^r(t) \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Ora passando al limite per $r \to 0$ nella disuguaglianza

$$|\bar f(t-r) - \bar f(t)| + |\bar f(t) - \bar f(t+r)| \le V_{\bar f}((t-r, t+r)) = |Df|((t-r, t+r)),$$

otteniamo

$$|f^l(t) - \bar f(t)| + |\bar f(t) - f^r(t)| \le |f^l(t) - f^r(t)|,$$

che implica (2.11) e dunque (a).
(b) Per definizione f^l e f^r sono continue e coincidono su $I \setminus A$. Da (2.11) ogni buon rappresentante ha la stessa proprietà; per lo stesso motivo i limiti sinistro e destro dei buoni rappreseentanti sono gli stessi di f^l e f^r.
(c) Per il teorema 1.2.8 di Radon-Nikodym, date le due misure Df e m (la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$) esiste una misura $D^s f$ (detta *parte singolare di* Df) e una funzione $\nu \in L^1(I)$ (detta *densità di* Df *rispetto a* m) tali che $Df^s \perp m$ e $Df = D^s f + \nu m$. Proviamo che ogni buon rappresentante di $\bar f$ è differenziabile in ogni punto t, di Lebesgue di ν rispetto a m, nel quale valga anche $|D^s f|((t-r, t+r)) = o(r)$; chiamiamo tale insieme M. Per $r \to 0$,

[2] Grazie alla monotonia di $V_f(\cdot)$ possiamo limitarci a fare l'estremo superiore sugli intervalli i cui estremi non sono in A.

poiché $Df^s \perp m$, e ν è in $L^1(I)$ per il teorema dei punti di Lebesgue (teorema 1.2.10), $m(M^c) = 0$. Dalla definizione di f^l abbiamo

$$\begin{aligned}(f^l)'_+(t) &= \lim_{r\downarrow 0} \frac{f^l(t+r) - f^l(t)}{r} = \lim_{r\downarrow 0} \frac{Df([t, t+r))}{r} \\ &= \lim_{r\downarrow 0} \frac{1}{r} \int_t^{t+r} \nu(s)\, ds + \lim_{r\downarrow 0} \frac{D^s f([t, t+r))}{r} = \nu(t).\end{aligned}$$

Con un argomento simile si mostra che anche la derivata sinistra di f^l è $\nu(t)$. Poiché A, l'insieme degli atomi di Df, è contenuto nel supporto di $D^s f$, abbiamo che, in M, dove f^l è differenziabile, $\bar{f}$ coincide con f^l, quindi anche le loro derivate coincidono. Ne segue la tesi. □

Osservazione 2.4.7. L'equazione che descrive f^l e f^r può essere riscritta senza menzionare c:

$$f^l(s) - f^l(t) = Df([t, s)), \qquad f^r(s) - f^r(t) = Df((t, s]), \qquad \forall a < t < s < b,$$

e può essere considerata come il teorema fondamentale del calcolo in BV.

Se f è una funzione monotona, essa è buon rappresentante della sua classe di equivalenza: infatti f^l e f^r conicidono con f salvo che nell'insieme dei punti di discontinuità; se t è un punto di discontinuità esisterà un $\theta_t \in [0, 1]$ tale che $f(t) = \theta_t f^l(t) + (1 - \theta_t) f^r(t)$, altrimenti f non sarebbe monotona, e quindi per il teorema 2.4.5(a) concludiamo. Inoltre applicando il teorema 2.4.5(c) troviamo una forma più forte del teorema 2.2.4 (di derivazione di Lebesgue):

Corollario 2.4.8. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora f è differenziabile per q.o. $t \in (a, b)$ e*

$$|f(b_-) - f(a_+)| \geq \int_a^b |f'(t)|\, dt + \sum_{t \in A_f} |f(t_+) - f(t_-)|, \tag{2.13}$$

dove A_f è l'insieme delle discontinuità di f.

Dimostrazione. La prova si ottiene osservando che

$$\begin{aligned}|f(b_-) - f(a_+)| = |Df|((a, b)) &= \int_a^b |f'|\, dt + |D^s f|((a, b)) \\ &\geq \int_a^b |f'(t)|\, dt + \sum_{t \in A_f} |f(t_+) - f(t_-)|.\end{aligned}$$

Il segno di $\geq$ è dovuto al fatto che $D^s f$ potrebbe avere una parte Cantoriana (vedi il corollario 2.4.17). □

Osservazione 2.4.9. Nell'esempio 2.4.20 mostriamo una funzione per cui la disuguaglianza (2.13) è stretta.

Il teorema 2.4.5 mostra che esiste una bigezione tra $[BV(a,b)]^m$ e l'insieme delle coppie (c,μ) con $c \in R^m$ e $\mu \in [\mathcal{M}(a,b)]^m$.

Teorema 2.4.10. *Sia $(a,b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato. Allora la mappa lineare $(c,\mu) \mapsto f(t) = c + \mu((a,t))$ stabilisce un isomorfismo tra gli spazi di Banach $\mathbb{R}^m \times [\mathcal{M}(a,b)]^m$ e $[BV(a,b)]^m$.*

Dimostrazione. Sia $T(c,\mu)(t) = c + \mu((a,t))$. T è lineare e, come visto nella dimostrazione del teorema 2.4.4 (essendo μ una misura di Radon positiva) si ha $T(c,\mu) \in [BV(a,b)]^m$ e

$$\|T(c,\mu)\|_{BV} = \|T(c,\mu)\|_1 + |\mu((a,b))| \le |c|(b-a) + (b-a+1)|\mu|((a,b)),$$

da cui T è continuo. Se $T(c,\mu) = 0$ allora anche la sua derivata distribuzionale sarà zero e, per quanto visto nella dimostrazione del teorema 2.4.4, $0 = DT(c,\mu) = \mu$, quindi per definizione di $T(c,\mu)$ si ha anche $c = 0$ e con questo abbiamo l'iniettività. La suriettività è data dal teorema 2.4.5, e per il teorema della mappa aperta T è un isomorfismo. $\square$

Abbiamo visto che in generale un buon rapppresentante non è univocamente determinato dalla derivata distribuzionale perché la misura può avere una parte atomica. Questa eventualità non sussiste nel caso nel caso delle funzioni assolutamente continue che definiamo qui di seguito:

Definizione 2.4.11 (Funzione assolutamente continua)**.** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}$ un aperto e $f \in [L^1(\Omega)]^m$. Diciamo che f è *assolutamente continua* in Ω se $f \in [BV(\Omega)]^m$ e Df è assolutamente continua rispetto a m.

Osservazione 2.4.12. Lo spazio vettoriale delle funzioni assolutamente continue in Ω coincide con lo spazio di Sobolev $[W^{1,1}(\Omega)]^m$. Dal teorema 2.4.5 otteniamo che per ogni funzione f assolutamente continua esiste un unico buon rappresentante continuo $\bar{f}$ differenziabile m-q.o. in Ω per cui vale il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$f(s) - f(t) = \int_t^s f'(r)\,dr,$$

per ogni intervallo $[t,s] \subset \Omega$. Per questo motivo spesso si identifica f con $\bar{f}$ considerando $[W^{1,1}(\Omega)]^m \subset [C(\Omega)]^m$.

Le funzioni assolutamente continue furono introdotte da G. Vitali nel 1905 [32] con la seguente definizione:

Definizione 2.4.13. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ (con (a, b) intervallo anche illimitato) è detta *assolutamente continua* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\sum_{i=1}^{N}(b_i - a_i) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{N}(f(b_i) - f(a_i)) < \varepsilon,$$

per ogni $(a_1, b_1), \dots, (a_N, b_N) \subset (a, b)$ disgiunti.

Teorema 2.4.14. *Le definizioni 2.4.11 e 2.4.13 sono equivalenti.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Osserviamo intanto che grazie alla decomposizione di Jordan delle misure (teorema 1.2.5) $Df << m$ se e solo se $|Df| << m$. Osserviamo inoltre che per il teorema fondamentale del calcolo integrale è possibile fare la seguente stima

$$\sum_{i=1}^{N} |f(b_i) - f(a_i)| = \sum_{i=1}^{N} \left| \int_{a_i}^{b_i} f'(s)\, ds \right| \le \sum_{i=1}^{N} \int_{a_i}^{b_i} |f'(s)|\, ds = |Df| \left(\bigcup_{i=1}^{N} (a_i, b_i) \right).$$

Allora ci basta mostrare: $|Df| << m$ implica che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni famiglia finita di intervalli disgiunti $\{J_i\}_{i=1}^{N}$ per cui valga $m(\cup J_i) < \delta$, allora $|Df|(\cup J_i) < \varepsilon$. Procediamo per assurdo negando la tesi, cioè supponiamo che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un H_n, anch'esso unione di intervalli disgiunti, tale che $m(H_n) < 2^{-n}$ e $|Df|(H_n) \ge \varepsilon$. Posto allora

$$I_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} H_k, \qquad I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n,$$

abbiamo

$$m(I_n) \le \sum_{k=n}^{\infty} m(H_k) = \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \longrightarrow \infty.$$

Allora, poiché $I \subset I_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ottiene $m(I) = 0$. D'altra parte $I_n \supset H_n$ per cui $|Df|(I_n) \ge |Df|(H_n) \ge \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ma $I_n \supset I_{n+1}$, allora, ricordando che $|Df|$ è una misura finita, posso passare al limite su una successione di insiemi decrescente, ossia

$$|Df|(I) = \lim_{n \to \infty} |Df|(I_n) \ge \varepsilon;$$

contro l'ipotesi di assoluta continuità della misura.
($\Longleftarrow$) Supponiamo per assurdo che esista J, unione di intervalli aperti disgiunti (a_i, b_i), tale che $Df(J) > 0$ e $m(J) = 0$. Allora scelto $\varepsilon \in (0, Df(J)]$ abbiamo $m(J) = 0 < \delta$ per ogni δ, mentre $\varepsilon \le Df(J) = \sum [f(b_i) - f(a_i)] \le \sum |f(b_i) - f(a_i)|$, contro l'ipotesi. $\square$

Osservazione 2.4.15. Ricordando la definizione 2.4.11, per il teorema 2.4.10 le funzioni assolutamente continue in un intervallo (a, b) sono tutte e sole quelle rapppresentabili da $c + \int_a^b g(s)\, ds$ con $c \in \mathbb{R}^m$ e $g \in [L^1(a, b)]^m$.

In generale, ogni misura μ su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}$ può essere divisa in tre parti: una assolutamente continua μ^a (rispetto a m), una puramente atomica μ^j e una singolare diffusa (cioè priva di atomi) μ^c. Per ottenere questa decomposizione indichiamo con $A = \{t \in \Omega \,:\, \mu(\{t\}) \neq 0\}$ l'insieme degli atomi di μ (con cardinalità al più numerabile), per il teorema di Radon-Nikodym scriviamo μ in maniera unica come somma della parte assolutamente continua μ^a e della parte singolare μ^s e definiamo $\mu^j := \mu^s \llcorner A$ la *restrizione di* μ^s *all'insieme* A, cioè $\mu^s \llcorner A(E) = \mu^s(E \cap A)$, e $\mu^c := \mu^s \llcorner (\Omega \setminus A)$. Così otteniamo:

$$\mu = \mu^a + \mu^s = \mu^a + \mu^j + \mu^c. \tag{2.14}$$

Questa decomposizione di μ è unica e poiché le misure μ^a, μ^j, μ^c sono mutuamente singolari abbiamo anche $|\mu| = |\mu^a| + |\mu^j| + |\mu^c|$. Dal teorema 1.2.9 di derivazione di Besicovitch sappiamo che μ^s si può rappresentare come restrizione di μ a un insieme m-trascurabile

$$S := \left\{ t \in \Omega \,:\, \lim_{r \to 0} \frac{|\mu|((t - r, t + r))}{r} = \infty \right\}$$

contenente A; allora possiamo descrivere le tre misure in un modo più costruttivo:

$$\mu^a = \mu \llcorner (\Omega \setminus S), \qquad \mu^j = \mu \llcorner A, \qquad \mu^c = \mu \llcorner (S \setminus A). \tag{2.15}$$

In accordo con questa decomposizione diamo la seguente

Definizione 2.4.16. Sia $f \in BV(\Omega)$; diciamo che

- f è una *funzione salto* se $Df = D^j f$, cioè se Df è puramente una misura atomica;
- f è una *funzione di Cantor* se $Df = D^c f$, cioè se Df è una misura singolare senza atomi.

Dal teorema 2.4.10 e dall'equazione (2.14) deduciamo la seguente rappresentazione su un intervallo:

Corollario 2.4.17. *Sia* $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ *un intervallo limitato. Allora per ogni* $f \in [BV(\Omega)]^m$ *vale la seguente rappresentazione:*

$$f = f^a + f^j + f^c, \tag{2.16}$$

dove f^a è assolutamente continua (quindi $f^a \in [W^{1,1}(\Omega)]^m$), f^j è una funzione salto e f^c è una funzione di Cantor. Le tre funzioni sono univocamente determinate a meno di una costante additiva e vale

$$|Df|(\Omega) = |D^a f|(\Omega) + |D^j f|(\Omega) + |D^c f|(\Omega) \tag{2.17}$$

$$= \int_a^b |\bar{f}'(t)|\, dt + \sum_{t \in A} |f(\bar{t}_+) - \bar{f}(t_-)| + |D^c f|(\Omega), \tag{2.18}$$

dove $\bar{f}$ è un buon rappresentante di f e A è l'insieme degli atomi di $|Df|$.

Osservazione 2.4.18. Questa decomposizione è tipica delle funzioni BV in una dimensione; per dimensioni maggiori non vale (vedi esempio 4.1 [4]).

Mentre abbiamo già caratterizzato le funzioni assolutamente continue, portiamo ora degli esempi di funzioni salto e di Cantor:

Esempio 2.4.19 (di una funzione salto). Un esempio classico di funzione salto è il seguente: sia $\{x_n\} \subset (a, b)$ una successione (finita o infinita), e $\{a_n\}$ una successione tale che $\sum a_n < \infty$. Allora definiamo

$$f(t) := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \chi_{(a,x_n)}(t).$$

La derivata distribuzionale di f è la misura positiva finita $\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \delta_{x_n}$, infatti $f(t) = \mu((a, t))$ per ogni $t \in (a, b)$. In generale come mostrato nel teorema 2.4.5 la derivata distribuzionale può essere ricostruita come differenza di limite destro e limite sinistro di un buon rappresentante.

Per il teorema 2.4.5 e per la definizione 2.4.16 una funzione di Cantor (ovviamente il suo buon rappresentante) è continua nel suo dominio per l'assenza di atomi della misura associata (nel senso del teorema 2.4.10), ed è differenziabile con derivata 0 quasi ovunque. Questo mostra che a differenza delle funzioni assolutamente continue e delle funzioni salto, la derivata di una funzione di Cantor può essere vista solo come misura nel senso distribuzionale, e non si può studiare con gli strumenti dell'analisi classica come limiti destro e sinistro e derivate.

Presentiamo l'esempio classico che giustifica la terminologia di funzione di Cantor:

Esempio 2.4.20 (funzione di Cantor-Vitali). Consideriamo il seguente insieme definito per ricorrenza: $C = \cap C_n$ con $C_0 = [0, 1]$ e C_{n+1} ottenuto da C_n dividendo ogni intervallo in tre intervalli di uguale lunghezza e rimuovendo il secondo. Quindi C_n consiste di 2^n intervalli chiusi e disgiunti di ampiezza $\frac{1}{3^n}$, per cui $m(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ che tende a 0 per $n \to \infty$; ciò implica $m(C) = 0$. Ora definiamo la funzione lineare a tratti $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \int_0^x \left(\frac{3}{2}\right)^n \chi_{C_n}(t)\, dt,$$

La successione $\{f_n\}$ è di Cauchy in $C[0,1]$: proviamo infatti che $|f_n - f_{n+1}|_{C[0,1]} \leq \frac{1}{3 \cdot 2^{n+1}}$. Osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione f_n cresce linearmente con pendenza $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ su C_n e rimane costante su $[0,1] \setminus C_n$. Scriviamo $C_n = \cup_{i=1}^{2^n} I_i^n$, con I_i^n intervalli disgiunti di ampiezza $\frac{1}{3^n}$. Se x è l'estremo destro (o sinistro) di un I_i^n, ricordando che $C_{n+1} \subset C_n$ si deduce $f_n(x) = f_{n+1}(x)$, infatti

$$f_n(x) = \int_0^x \left(\frac{3}{2}\right)^n \chi_{C_n}(t)\, dt = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{i}{3^n} = \frac{i}{2^n}$$
$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \chi_{C_{n+1}}(t)\, dt = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \frac{2i}{3^{n+1}} = \frac{i}{2^n}.$$

Poiché le funzioni crescono linearmente (con pendenza costante) e si incontrano alla fine di ogni I_i^n, ci limitiamo a studiare $|f_n - f_{n+1}|_{C[0,1]}$ su $I_1^n = [0, \frac{1}{3^n}]$. Su $[0, \frac{1}{3^n}]$ le funzioni crescono con pendenze diverse, quindi avremo il massimo della differenza in $x = \frac{1}{3^n}$.

$$f_n\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right) = \int_0^{\frac{1}{3^{n+1}}} \left(\frac{3}{2}\right)^n \chi_{C_n}(t)\, dt = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3\, 2^n}$$
$$f_{n+1}\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right) = \int_0^{\frac{1}{3^{n+1}}} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \chi_{C_{n+1}}(t)\, dt = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}},$$

perciò $|f_n(\frac{1}{3^{n+1}}) - f_{n+1}(\frac{1}{3^{n+1}})| = \frac{1}{3 \cdot 2^{n+1}}$. In $[\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{2}{3^{n+1}}]$ f_n cresce e f_{n+1} rimane costante, dunque ha senso valutare il modulo della differenza all'estremo dell'intervallo, ma per simmetria del problema troviamo nuovamente $\frac{1}{3\, 2^{n+1}}$ e abbiamo quanto cercato. Ora per ogni $m > n$ abbiamo

$$|f_m - f_n|_{C[0,1]} \leq \sum_{i=n}^{m} |f_{n+1} - f_n|_{C[0,1]} \leq \sum_{i=n}^{m} \frac{1}{3 \cdot 2^{n+1}} \leq \frac{1}{3 \cdot 2^n}.$$

Ne segue che la successione è di Cauchy; allora f_n converge ad una funzione f continua e monotona su $[0,1]$ chiamata *funzione di Cantor-Vitali* (o *scala del diavolo*).

Dai teoremi 2.4.5 e 2.4.10 abbiamo che la derivata distribuzionale di f è una misura μ tale che $\mu[0,x] = f(x)$. Osserviamo che $\mu \perp m$ in quanto $m(C) = 0$

e $m([0,1] \setminus C) = 1$ mentre per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo $\mu([0,1] \setminus C_n) = 0$, infatti in tali intervalli f è costante. Allora poiché $[0,1] \setminus C_n$ è una successione crescente di insiemi, passando al limite otteniamo $\mu([0,1] \setminus C) = 0$; di conseguenza $\mu(C) = 1$. Dalla continuità di f possiamo dedurre che μ non ha atomi, quindi da (2.14) abbiamo che μ è una misura di Cantor: dunque f è una funzione di Cantor secondo la definizione 2.4.16.

Capitolo 3

Funzioni BV in $\mathbb{R}^n$

In questo capitolo definiamo le funzioni BV su un generico aperto Ω di $\mathbb{R}^n$. Utilizziamo la definizione legata alla teoria delle distribuzioni.

3.1 Definizione e prime proprietà

Definizione 3.1.1. Sia $f \in L^1(\Omega)$. Diciamo che f è una funzione a *variazione limitata in* Ω, e scriviamo $f \in BV(\Omega)$, se la derivata distribuzionale di f è rappresentabile da una misura con segno di Radon finita in Ω, cioè se

$$\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \varphi \, d\mu_i, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \qquad i = 1, \dots, n, \tag{3.1}$$

per qualche misura vettoriale di Radon $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, finita in Ω. Denoteremo tali μ_i con $D_i f$ e μ con Df. Definiamo la *variazione totale di f* come

$$V(f, \Omega) = \sup \left\{ \int_\Omega f \operatorname{div} g \, dx \;\middle|\; g \in \mathfrak{C}(\Omega) \right\},$$

dove $\mathfrak{C}(\Omega) = \{g = (g_1, \dots, g_n) \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid |g| \leq 1 \quad \forall\, x \in \Omega\}$
e $\operatorname{div} g = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i}$.

Osservazione 3.1.2. Come visto nel teorema 2.4.2, possiamo provare (con una dimostrazione pressocché identica) che $f \in BV(\Omega)$ se e solo se $V(f, \Omega) < \infty$ e $V(f, \Omega) = |Df|(\Omega)$. Nel seguito useremo i due simboli indifferentemente.

Osserviamo che, con un argomento di densità, la formula (3.1) di integrazione per parti vale per ogni $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Queste formule possono essere sommate in una singola equazione scrivendo

$$\int_\Omega f \operatorname{div} \varphi \, dx = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega \varphi_i \, dD_i f \qquad \forall \varphi \in [C_c^1(\Omega)]^n.$$

Osserviamo che lo spazio di Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$ è contenuto in $BV(\Omega)$: infatti per ogni $f \in W^{1,1}(\Omega)$ la derivata distribuzionale è data da $\nabla f\, m_n$[1]. Nel prossimo esempio mostriamo che tale inclusione è stretta:

Esempio 3.1.3. Sia $E = B(x_0, r) \subset \Omega$ (E ha frontiera di classe C^∞, a noi basterà C^2) e consideriamo χ_E, la funzione caratteristica di E, appartenente a $L^1(\Omega)$ perché E è limitato. Vediamo che $\chi_E \notin W^{1,1}(\Omega)$: supponiamo che χ_E abbia derivate parziali deboli in $L^1(\Omega)$; allora, per ogni $\varphi \in C^1_c(\Omega)$, dovrebbe valere la formula:

$$\int_\Omega \frac{\partial \chi_E}{\partial x_i}\, \varphi\, dx = -\int_\Omega \chi_E\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx.$$

Notiamo che $m(\partial(E)) = 0$ per cui

$$\int_\Omega \chi_E\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial \chi_E}{\partial x_i}\, \varphi\, dx = -\int_E \frac{\partial \chi_E}{\partial x_i}\, \varphi\, dx - \int_{\Omega\setminus\bar{E}} \frac{\partial \chi_E}{\partial x_i}\, \varphi\, dx = 0,$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che in E e $\Omega \setminus \bar{E}$ le derivate deboli coincidono con le derivate classiche, quindi sono identicamente nulle, quindi $\frac{\partial \chi_E}{\partial x_i} = 0$ q.o.. Se consideriamo una φ tale che $\varphi_{|\overline{E}} \equiv \sum_{i=1}^n x_i$ e sia regolarizzata ad una funzione $C^\infty_c(\Omega)$ otteniamo:

$$0 = -\int_\Omega \frac{\partial \chi_E}{\partial x_i}\, \varphi\, dx = \int_E 1\, dx = m(E) \neq 0.$$

Questa contraddizione mostra che le derivate deboli di χ_E non sono funzioni in $L^1(\Omega)$.

Mostriamo che $\chi_E \in BV(\Omega)$. Supponiamo $g \in \mathfrak{C}(\Omega)$, per il teorema di Gauss-Green

$$\int_\Omega \chi_E\, \mathrm{div} g\, dx = \int_E \mathrm{div} g\, dx = \int_{\partial E\cap\Omega} g \cdot \nu\, dH_{n-1},$$

dove $\nu(x)$ è il versore normale esterno alla superficie ∂E e H_{n-1} è la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz abbiamo $\int_{\partial E\cap\Omega} g \cdot \nu\, dH_{n-1} \leq H_{n-1}(\partial E \cap \Omega) < +\infty$, e quindi

$$|D\chi_E|(\Omega) = \sup_{g\in\mathfrak{C}(\Omega)} \int_\Omega \chi_E\, \mathrm{div} g\, dx \leq H_{n-1}(\partial E \cap \Omega) < +\infty.$$

Perciò $\chi_E \in BV(\Omega)$. Notiamo che per mostrare la disuguaglianza $|D\chi_E|(\Omega) \leq H_{n-1}(\partial E \cap \Omega)$ abbiamo utilizzato solo la regolarità di ∂E; sotto l'ipotesi di regolarità C^2 del bordo vale

$$|D\chi_E|(\Omega) = H_{n-1}(\partial E \cap \Omega). \tag{3.2}$$

[1] m_n è la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$.

Per provare (3.2) ci basta provare $|D\chi_E|(\Omega) \geq H_{n-1}(\partial E \cap \Omega)$. L'insieme E ha frontiera C^2 e dunque $\nu(x)$ sarà una funzione di classe C^1 (è il gradiente della parametrizzazione di ∂E) con $|\nu(x)| \leq 1$ per ogni x in ∂E, così possiamo estenderla ad una funzione N definita su tutto $\mathbb{R}^n$ tale che $N \in C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $|N(x)| \leq 1$ per ogni x in $\mathbb{R}^n$. Siano ora $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ con $|\eta| \leq 1$ e $g = N\,\eta$; si ha

$$\int_E \mathrm{div} g \, dx = \int_{\partial E} g \cdot \nu \; dH_{n-1} = \int_{\partial E} \eta \, (N \cdot \nu) \; dH_{n-1} = \int_{\partial E} \eta \; dH_{n-1},$$

cosi

$$|D\chi_E|(\Omega) = \sup_{g \in \mathfrak{C}(\Omega)} \int_E \mathrm{div}\, g \, dx \geq \sup_{\eta \in C_0^\infty(\Omega), |\eta| \leq 1} \int_{\partial E} \eta \; dH_{n-1} = H_{n-1}(\partial E \cap \Omega).$$

Nel precedente esempio abbiamo considerato una particolare classe di funzioni $BV(\Omega)$ chiamate funzioni caratteristiche con bordo liscio (C^2). Ora estendiamo l'idea a insiemi più generali.

Definizione 3.1.4. Sia E un boreliano e Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Definiamo il *perimetro* di E in Ω come:

$$P(E, \Omega) = |D\chi_E|(\Omega) = \sup_{\mathfrak{C}(\Omega)} \int_E \mathrm{div} g \; dx.$$

Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, denotiamo $P(E) = P(E, \mathbb{R}^n)$. Se un boreliano E ha perimetro localmente finito, ossia per ogni aperto Ω limitato si ha $P(E, \Omega) < +\infty$, allora E è chiamato *insieme di Caccioppoli.*

Esempio 3.1.5. Mostriamo un esempio di una funzione $f \in L^1(\Omega) \setminus BV(\Omega)$. Sia $\Omega = \mathbb{R}$ e denotiamo $s_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ x & x \in [0, s_1) \\ \frac{x}{2} & x \in [s_1, s_2) \\ \vdots & \\ \frac{x}{n} & x \in [s_{n-1}, s_n) \\ \vdots & \end{cases}$$

Allora $f \in L^1(\mathbb{R})$, infatti

$$\int_{\mathbb{R}} |f| \, dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty;$$

d'altra parte $f \notin BV(\mathbb{R})$ perché f è C^1 a tratti e allora per il corollario 2.4.8

$$|Df|(\mathbb{R}) \geq \int_0^\infty |\mathrm{grad} f| \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

3.2 Proprietà di semicontinuità

Una delle più importanti proprietà delle funzioni BV è dimostrata nel prossimo teorema.

Teorema 3.2.1 (Semicontinuità)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\{f_j\}$ una successione di funzioni in $BV(\Omega)$ che converge in $L^1_{loc}(\Omega)$ ad una funzione f. Allora*

$$|Df|(\Omega) \leq \liminf_{j\to\infty} |Df_j|(\Omega). \tag{3.3}$$

Dimostrazione. Sia $g \in \mathfrak{C}(\Omega)$. Poiché $f_j \to f$ in $L^1_{loc}(\Omega)$

$$\int_\Omega f \,\mathrm{div} g \, dx = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j \,\mathrm{div} g \, dx;$$

infatti

$$\left| \int_\Omega (f_j - f) \,\mathrm{div}\, g \, dx \right| = \left| \int_{\mathrm{supp}\, g} (f_j - f) \,\mathrm{div}\, g \, dx \right| \leq \|\mathrm{div} g\|_\infty \int_{\mathrm{supp}\, g} |f_j - f| \, dx \to 0.$$

Allora abbiamo:

$$\int_\Omega f \,\mathrm{div} g \, dx = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j \,\mathrm{div} g \, dx \leq \liminf_{j\to\infty} \sup_{g\in\mathfrak{C}(\Omega)} \int_\Omega f_j \,\mathrm{div} g \, dx = \liminf_{j\to\infty} |Df_j|(\Omega).$$

Passando all'estremo superiore su $\mathfrak{C}(\Omega)$ al primo membro troviamo la tesi. $\square$

Dall'equazione (3.2) abbiamo visto che se E è un insieme di $\mathbb{R}^n$ con frontiera C^2 allora $P(E, \mathbb{R}^n) = H_{n-1}(\partial E \cap \Omega)$. Se la frontiera di E non è sufficientemente regolare l'uguaglianza non è necessariamente vera.

Esempio 3.2.2. Sia $\{x_i\}$ la successione di tutti i punti a coordinate razionali in $\mathbb{R}^n$ e siano $B_i = (x_i, 2^{-i}) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_i| < 2^{-i}\}$ e $E = \cup_{i=0}^\infty B_i$. Allora

$$|E| \leq \sum_{i=0}^\infty |B_i| = \omega_n \sum_{i=0}^\infty 2^{-in} = \frac{\omega_n}{1 - 2^{-n}},$$

dove $\omega_n = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)^n}$ è la misura della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$. I punti a coordinate razionali sono densi in $\mathbb{R}^n$ e quindi $\overline{E} = \mathbb{R}^n$ per cui $|\partial E| = +\infty$ e a maggior ragione $H_{n-1}(\partial E) = +\infty$. D'altra parte se definiamo $E_k = \cup_{i=0}^k B_i$ allora $E_k \to E$ (o $\chi_{E_k} \to \chi_E$ in L^1); inoltre ∂E_k è C^2 a tratti, dunque vale (3.2) e otteniamo

$$P(E_k) = H_{n-1}(\partial E_k) \leq H_{n-1}\big(\cup_{i=0}^k \partial B_k\big) = n\omega_{n-1} \sum_{i=0}^k 2^{-i(n-1)} \leq \frac{n\omega_{n-1}}{1 - 2^{1-n}},$$

e per il teorema 3.2.1 concludiamo:

$$P(E) \leq \liminf_{k\to\infty} P(E_k) \leq \frac{n\omega_{n-1}}{1-2^{1-n}} < \infty.$$

Con il prossimo esempio mostriamo come l'uguaglianza in (3.3) non venga necessariamente raggiunta.

Esempio 3.2.3. Siano $\Omega = (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ e $f_j(x) = \frac{1}{j}\sin(jx)$ per $x \in \Omega$ e $j = 1, 2, \ldots$. Le f_j sono in $L^1(\Omega)$ e inoltre

$$\int_\Omega |f_j|\, dx = \frac{1}{j}\int_0^{2\pi} |\sin(jx)|\, dx \leq \frac{2\pi}{j},$$

così $f_j \to 0$ in L^1. D'altra parte le f_j sono C^1, dunque con facili conti abbiamo

$$|Df_j|(\Omega) = \int_\Omega |\mathrm{grad} f_j|\, dx = \int_0^{2\pi} |\cos(jx)|\, dx = 4.$$

Sebbene generalmente in (3.3) non possiamo aspettarci l'uguaglianza, possiamo provarla in casi particolari, come vedremo in 3.2.5 e 3.3.1.

Proposizione 3.2.4. *Lo spazio delle funzioni a variazione limitata, dotato della norma*

$$\|f\|_{BV} = \|f\|_{L^1} + |Df|(\Omega) \tag{3.4}$$

è uno spazio di Banach.

Dimostrazione. Intanto $\|\cdot\|_{BV}$ è una norma perché $\|\cdot\|_{L^1}$ è una norma e $|Df|(\Omega)$ è una seminorma per le proprietà dell'estremo superiore. Rimane da provare la completezza.

Sia $\{f_j\}$ una successione di Cauchy in $BV(\Omega)$; da (3.4) $\{f_j\}$ deve anche essere una successione di Cauchy in $L^1(\Omega)$, e dalla completezza di $L^1(\Omega)$ esiste $f \in L^1(\Omega)$ tale che $f_j \to f$ in $L^1(\Omega)$. Dato che $\{f_j\}$ è di Cauchy in $BV(\Omega)$, $\|f\|_{BV}$ è limitata, quindi $|Df_j|(\Omega)$ è limitata quando $j \to \infty$.
Allora per la semicontinuità (3.3)

$$|Df|(\Omega) \leq \liminf_{j\to\infty} |Df_j|(\Omega),$$

dunque $|Df|(\Omega)$ è finita e così $f \in BV(\Omega)$. Ora bisogna mostrare che $f_j \to f$ in $BV(\Omega)$; basta provare che $\int_\Omega |D(f - f_j)| \to 0$ per $j \to \infty$. Supponiamo $\varepsilon > 0$, allora esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $j, k \geq n$ abbiamo $\|f_j - f_k\|_{BV} < \varepsilon$ e quindi $|D(f_j - f_k)|(\Omega) \leq \varepsilon$. Ora poiché $f_k \to f$ in L^1 anche $f_j - f_k \to f_j - f$ in L^1; così per semicontinuità (teorema 3.2.1)

$$|D(f_j - f)|(\Omega) \leq \liminf_{k\to\infty} |D(f_j - f_k)|(\Omega) \leq \varepsilon, \qquad \forall j \geq n.$$

Dunque abbiamo $f_j \to f$ in $BV(\Omega)$. $\square$

Proposizione 3.2.5. *Sia* $\{f_j\}$ *una successione in* $BV(\Omega)$ *tale che*

$$f_j \to f \text{ in } L^1_{loc}(\Omega) \qquad \text{e} \qquad \lim_{j\to\infty} |Df_j|(\Omega) = |Df|(\Omega).$$

Allora per ogni aperto $A \subset \Omega$

$$|Df|(\overline{A} \cap \Omega) \geq \limsup_{j\to\infty} |Df_j|(\overline{A} \cap \Omega). \tag{3.5}$$

In particolare, se $|Df|(\partial A \cap \Omega) = 0$ *allora* $|Df|(A) = \lim_{j\to\infty} |Df_j|(A)$.

Dimostrazione. Sia $B = \Omega \setminus \overline{A}$; B è aperto. Per semicontinuità (teorema 3.2.1) abbiamo

$$|Df|(A) \leq \liminf_{j\to\infty} |Df_j|(A) \quad \text{e} \quad |Df|(B) \leq \liminf_{j\to\infty} |Df_j|(B).$$

D'altra parte (ricordando che $|Df|$ è una misura),

$$\begin{aligned} |Df|(\overline{A} \cap \Omega) + |Df|(B) &= |Df|(\Omega) \overset{ipotesi}{=} \lim_{j\to\infty} |Df_j|(\Omega) \\ &\geq \limsup_{j\to\infty} |Df_j|(\overline{A} \cap \Omega) + \liminf_{j\to\infty} |Df_j|(B) \\ &\geq \limsup_{j\to\infty} |Df_j|(\overline{A} \cap \Omega) + |Df|(B), \end{aligned}$$

quindi vale (3.5). Inoltre, se $|Df|(\partial A \cap \Omega) = 0$,

$$\begin{aligned} \limsup_{j\to\infty} |Df_j|(A \cap \Omega) &\leq \limsup_{j\to\infty} |Df_j|(\overline{A} \cap \Omega) \\ &\leq |Df|(\overline{A} \cap \Omega) = |Df|(A \cap \Omega) \leq \liminf_{j\to\infty} |Df_j|(A \cap \Omega). \end{aligned}$$

□

3.3 Risultati di approssimazione

Proposizione 3.3.1. *Sia* $f \in BV(\Omega)$ *e sia* $A \subset\subset \Omega$ *aperto tale che*

$$|Df|(\partial A) = 0. \tag{3.6}$$

Allora se f_ε *sono le funzioni mollificate (dove* f *è estesa a zero fuori da* Ω*) si ha*

$$|Df|(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_A |Df_\varepsilon| \, dx. \tag{3.7}$$

Dimostrazione. Dalla proposizione 1.1.2(a) $f_\varepsilon \to f$ in $L^1(\Omega)$ e allora per semicontinuità (teorema 3.2.1)

$$|Df|(A) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_A |Df_\varepsilon|\, dx.$$

Supponiamo ora $g \in \mathfrak{C}(A)$, allora per la proposizione 1.1.2(c) e (d) abbiamo

$$\int_\Omega f_\varepsilon \,\mathrm{div} g\, dx \overset{(c)}{=} \int_\Omega f\left(\mathrm{div} g\right)_\varepsilon dx \overset{(d)}{=} \int_\Omega f \,\mathrm{div}\, g_\varepsilon\, dx.$$

Dato che $|g| \leq 1$, per la proposizione 1.1.2(b) allora anche $|g_\varepsilon| \leq 1$ e per la proposizione 1.1.2(e) da $\mathrm{supp} g \subset A$ segue che $\mathrm{supp} g_\varepsilon \subset A_\varepsilon$; così

$$\int_\Omega f_\varepsilon \,\mathrm{div} g\, dx \leq |Df|(A_\varepsilon),$$

e passando, nel primo membro, all'estremo superiore su $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ otteniamo

$$\int_A |Df_\varepsilon|\, dx \leq |Df|(A_\varepsilon).$$

Così

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \int_A |Df_\varepsilon|\, dx \leq \lim_{\varepsilon\to 0} |Df|(A_\varepsilon) = |Df|(\overline{A}) \overset{(3.6)}{=} |Df|(A).$$

□

Osservazione 3.3.2. Se $A = \mathbb{R}^n$ allora la proposizione 3.3.1 mostra che

$$|Df|(\mathbb{R}^n) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |Df_\varepsilon|\, dx,$$

e in particolare, se $f = \chi_E$ otteniamo

$$P(E) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |D(\chi_E)_\varepsilon|\, dx.$$

Ora possiamo mostrare che ogni funzione $f \in BV(\Omega)$ può essere approssimata in qualche senso da funzioni C^∞. Non possiamo sperare nell'approssimazione in norma $BV(\Omega)$, dato che la chiusura di C^∞ in questa norma è $W^{1,1}(\Omega)$ che è diverso da $BV(\Omega)$ (vedi esempio 3.1.3). Così in particolare, non possiamo sperare di trovare $\{f_j\} \in C^\infty$ tale che $f_j \to f$ in $L^1(\Omega)$ e $|D(f_j - f)|(\Omega) \to 0$.

Teorema 3.3.3 (Approssimazione)**.** *Sia $f \in BV(\Omega)$, allora esiste una successione $\{f_j\} \subset C^\infty(\Omega)$ tale che*

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega |f_j - f|\, dx = 0 \quad e \quad \lim_{j\to\infty} |Df_j|(\Omega) = |Df|(\Omega). \tag{3.8}$$

Dimostrazione. Supponiamo che Ω sia limitato. Sia $\varepsilon > 0$. Esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che, dato $\Omega_k = \left\{x \in \Omega \,|\, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{m+k}\right\}$, si ha

$$|Df|(\Omega \setminus \Omega_0) < \varepsilon.$$

Consideriamo ora gli insiemi A_i con $i = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} A_1 = \Omega_2 \\ A_i = \Omega_{i+1} \setminus \overline{\Omega_{i-1}}, \end{cases}$$

e sia $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{A_i\}$, cioè $\varphi_i \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \le \varphi_i \le 1$ e $\sum_{i=1}^\infty \varphi_i \equiv 1$.

Sia η un mollificatore positivo simmetrico. Ricordando la proposizione 1.1.2(e) e (a) per ogni i possiamo scegliere ε_i tale che

(i) $\mathrm{supp}(\eta_{\varepsilon_i} * f\,\varphi_i) \subset \Omega_{i+2} \setminus \Omega_{i-2} \quad (\Omega_{-1} = \emptyset)$

(ii) $\int_\Omega |\eta_{\varepsilon_i} * (f\,\varphi_i) - f\,\varphi_i|\, dx < \varepsilon\, 2^{-i}$

(iii) $\int_\Omega |\eta_{\varepsilon_i} * (f\, D\varphi_i) - f\, D\varphi_i|\, dx < \varepsilon\, 2^{-i}$.

Infine sia $f_\varepsilon = \sum_{i=1}^\infty \eta_{\varepsilon_i} * (f\,\varphi_i)$. Da (i) segue che la somma che definisce f_ε è localmente finita e dunque $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$; dato che $f = \sum_{i=1}^\infty f\,\varphi_i$, da (ii) abbiamo

$$\int_\Omega |f_\varepsilon - f|\, dx \le \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega |\eta_{\varepsilon_i} * (f\,\varphi_i) - f\,\varphi_i|\, dx < \varepsilon,$$

dove abbiamo portato fuori la somma per il teorema di Beppo Levi. Dunque quando $\varepsilon \to 0$ abbiamo $f_\varepsilon \to f$ in $L^1(\Omega)$. Dalla semicontinuità (teorema 3.2.1) abbiamo

$$|Df|(\Omega) \le \liminf_{\varepsilon\to 0} |Df_\varepsilon|(\Omega). \tag{3.9}$$

Sia ora $g \in \mathfrak{C}(\Omega)$. Segue:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega f_\varepsilon \, \mathrm{div} g \, dx &= \int_\Omega \sum_{i=1}^\infty \eta_\varepsilon * (f\,\varphi_i) \, \mathrm{div} g \, dx \overset{Lebesgue}{=} \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega \eta_\varepsilon * (f\,\varphi_i) \, \mathrm{div} g \, dx \\
&= \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega \Big[\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) \, f(y) \, \varphi_i(y) \, \mathrm{div} g(x) \, dy \Big] \, dx \\
&= \sum_{i=1}^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Big[\int_\Omega \eta_\varepsilon(y-x) \, \mathrm{div} g(x) \, dx \Big] \, f(y) \, \varphi_i(y) \, dy \\
&= \sum_{i=1}^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Big[\int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y) \, \mathrm{div} g(x) \, dx \Big] \, f(y) \, \varphi_i(y) \, dy, ,
\end{aligned}
$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo utilizzato il teorema di Fubini. Ora considerando g zero fuori da Ω, ricordando che η è simmetrico e considerando i supporti delle varie funzioni in gioco, possiamo "scambiare" gli insiemi di integrazione, così

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \Big[\int_\Omega \eta_{\varepsilon_i}(x-y) \, \mathrm{div} g(x) \, dx \Big] \, f(y) \, \varphi_i(y) \, dy = \\
&\qquad = \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega f(y) \, \varphi_i(y) \Big[\int_{\mathbb{R}^n} \eta_{\varepsilon_i}(x-y) \, \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_j}(x) \, dx \Big] \, dy \\
&\qquad = \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega f(y) \, \varphi_i(y) \, \big(\eta_{\varepsilon_i} * \mathrm{div} g \big) \, dy = \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega f \, \varphi_i \, \mathrm{div}\big(\eta_{\varepsilon_i} * g \big) \, dx,
\end{aligned}
$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la proprietà della convoluzione di scaricare la derivata. Così:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega f_\varepsilon \, \mathrm{div} g \, dx &= \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega f \, \varphi_i \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \big(\eta_{\varepsilon_i} * g_j \big) \right] dx \\
&= \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^n \left[\int_\Omega f \, \frac{\partial}{\partial x_j} \big(\varphi_i \, \eta_{\varepsilon_i} * g_j \big) \, dx - \int_\Omega f \, D\varphi_i \big(\eta_{\varepsilon_i} * g_j \big) \, dx \right] \\
&= \sum_{i=1}^\infty \int_\Omega f \, \mathrm{div}\big(\varphi_i \, (\eta_{\varepsilon_i} * g_j) \big) \, dx - \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^n \int_\Omega f \, D\varphi_i \big(\eta_{\varepsilon_i} * g_j \big) \, dx.
\end{aligned}
$$

Ora con gli stessi accorgimenti utilizzati prima studiamo il termine generale del secondo addendo:

$$\int_\Omega f(x)\, D\varphi_i(x)\, \big(\eta_{\varepsilon_i} * g_j\big)(x)\, dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, D\varphi_i(x)\, \eta_{\varepsilon_i}(x-y)\, g_j(y)\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_\Omega f(x)\, D\varphi_i(x)\, \eta_{\varepsilon_i}(x-y)\, g_j(y)\, dx\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(-z+y)\, D\varphi_i(-z+y)\, \eta_{\varepsilon_i}(-z)\, g_j(y)\, dz\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Big[f\, D\varphi_i * \eta_{\varepsilon_i}\Big](y)\, g_j(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Osservando che $\sum_{i=0}^{\infty} D\varphi_i \equiv 0$ abbiamo

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega f_\varepsilon\, \mathrm{div} g\; dx = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega f\, \mathrm{div}\big(\varphi_i\, (\eta_{\varepsilon_i} * g)\big)\, dx - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \Big[f\, D\varphi_i * \eta_{\varepsilon_i}\Big](y)\, g_j(y)\, dy \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega f\, \mathrm{div}\big(\varphi_i\, (\eta_{\varepsilon_i} * g)\big)\, dx - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \Big[f\, D\varphi_i * \eta_{\varepsilon_i} - f\, D\varphi_i\Big](y)\, g_j(y)\, dy \\
&= \int_\Omega f\, \mathrm{div}\big(\varphi_1\, (\eta_{\varepsilon_1} * g)\big)\, dx + \sum_{i=2}^{\infty} \int_\Omega f\, \mathrm{div}\big(\varphi_i\, (\eta_{\varepsilon_i} * g)\big)\, dx \\
&\qquad - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \Big[f\, D\varphi_i * \eta_{\varepsilon_i} - f\, D\varphi_i\Big](y)\, g_j(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Ora tiriamo le somme. Dato che $|\varphi_i\, \eta_{\varepsilon_i} * g| \le 1$ otteniamo

$$\int_\Omega f\, \mathrm{div}(\varphi_1\, \eta_{\varepsilon_1} * g)\, dx \le |Df|(\Omega);$$

poiché l'intersezione di più di tre A_i è vuota, per (i) e (ii) risulta

$$\sum_{i=2}^{\infty} \int_\Omega f\, \mathrm{div}\big(\varphi_i\, (\eta_{\varepsilon_i} * g)\big)\, dx \le 3\, |Df|(\Omega \setminus \Omega_0) < 3\, \varepsilon;$$

infine per (iii) abbiamo

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \Big[f\, D\varphi_i * \eta_{\varepsilon_i} - f\, D\varphi_i\Big](y)\, g_j(y)\, dy < \sqrt{n}\; \varepsilon,$$

dove abbiamo portato la somma dentro l'integrale, abbiamo interpretato l'integrando come prodotto scalare tra g e $[f\, D\varphi_i * \eta_{\varepsilon_i} - f\, D\varphi_i](1, \dots, 1)$ e concluso per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Cosi

$$\int_\Omega f_\varepsilon \,\mathrm{div} g\, dx < |Df|(\Omega) + 4\,\varepsilon \quad \text{da cui} \quad |Df_\varepsilon|(\Omega) < |Df|(\Omega) + 4\,\varepsilon.$$

Al tendere di $\varepsilon \to 0$, per (3.9) abbiamo la tesi nel caso di Ω limitato. Applicando quanto appena visto ad una successione di aperti $B_r \cap \Omega$ che invadono Ω, con un procedimento diagonale ritroviamo la tesi. □

Osservazione 3.3.4. Per ogni $f \in BV(\Omega)$, per ogni $\varepsilon > 0$, per ogni $n > 0$ e per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ si ha

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^{-n} \int_{B(x_0, \rho) \cap \Omega} |f_\varepsilon - f|\, dx = 0. \tag{3.10}$$

Infatti, mantenendo la notazione della precedente dimostrazione, se $x \in B(x_0, \rho) \cap \Omega$ allora dalla nostra scelta $\mathrm{supp}\varphi_k = A_k = \Omega_{k+1} \setminus \overline{\Omega_{k-1}}$ segue che

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \Big[\eta_{\varepsilon_k} * (f\,\varphi_k) - f\,\varphi_k\Big], \quad \text{dove} \quad k_0 = \left[\frac{1}{\rho}\right] - m - 2.$$

Infatti se $x \in A_k$ con $k \le k_0$ allora

$$\mathrm{dist}(x, x_0) \ge \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{m+k+1} > \frac{1}{[1/\rho] - 1} > \rho.$$

Allora da (ii)

$$\rho^{-n} \int_{B(x_0,\rho)\cap\Omega} |f_\varepsilon - f|\, dx \le 2^{-k_0}\, \rho^{-n}\, \varepsilon;$$

dalla definizione di k_0 abbiamo che $\lim_{\rho\to 0} 2^{-k_0}\, \rho^{-n}\, \varepsilon \to 0$, da cui la tesi.

3.4 Risultati di convergenza

In questo paragafo introduciamo la convergenza debole* e la convergenza stretta nello spazio $BV(\Omega)$.

Definizione 3.4.1. Siano $(f_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$ e $u \in BV(\Omega)$. Diciamo che $(u_h)_{h\in\mathbb{N}}$ *converge debole* in* $BV(\Omega)$ a u se $(u_h)_{h\in\mathbb{N}}$ converge a u in $L^1(\Omega)$ e $(Du_h)_{h\in\mathbb{N}}$ converge debole* a Du in Ω, cioè

$$\lim_{h\to\infty} \int_\Omega \varphi\, dDu_h = \int_\Omega \varphi\, dDu \qquad \forall \varphi \in C_0(\Omega). \tag{3.11}$$

Adesso proviamo una formulazione equivalente della convergenza debole*.

Proposizione 3.4.2. *Sia* $(u_h)_h \subset BV(\Omega)$*. Allora* $(u_h)_h$ *converge debole* ad* u *in* $BV(\Omega)$ *se e solo se* $(u_h)_h$ *è limitata in norma* $BV(\Omega)$ *e converge a* u *in* $L^1(\Omega)$*.*

Dimostrazione. ($\Longleftarrow$) Supponiamo che $(u_h)_h$ sia limitata in $BV(\Omega)$ e che converga a u in $L^1(\Omega)$; dobbiamo solo mostrare che $(Du_h)_h$ converge debole* a Du in Ω nel senso di (3.11). Allora dal teorema 1.2.7, $(Du_h)_h$ è debolmente relativamente compatta, quindi basta provare che ogni punto limite $\mu = \lim_{k\to\infty} Du_{h_k}$ coincide con Du. Infatti, passando al limite per $k \to \infty$ nell'uguaglianza

$$\int_\Omega u_{h_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \varphi\, dD_i u_{h_k}, \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \qquad i = 1, \ldots, n$$

otteniamo

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \varphi\, d\mu_i, \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \qquad i = 1, \ldots, n,$$

cioè la tesi.
($\Longrightarrow$) La tesi segue dal teorema di Banach-Steinhaus, perché la convergenza finita di misure con segno di Radon finite in Ω corrisponde alla convergenza nel duale di $[C_0(\Omega)]^n$ (vedi l'osservazione 1.2.3). $\square$

Definizione 3.4.3 (Convergenza stretta)**.** Siano $u, u_h \in BV(\Omega)$. Diciamo che $(u_h)_h$ *converge strettamente in* $BV(\Omega)$ a u se $(u_h)_h$ converge a u in $L^1(\Omega)$ e la successione delle variazioni totali $(|Du_h|_h(\Omega))$ converge a $|Du|(\Omega)$ per $h \to \infty$.

Si può verificare che

$$d(u, v) = \int_\Omega |u - v|\, dx + ||Du|(\Omega) - |Dv|(\Omega)|$$

è una distanza in $BV(\Omega)$ che induce la stretta convergenza. Dalla proposizione 3.4.2 ricaviamo che la convergenza stretta implica la convergenza debole*, mentre l'esempio 3.2.3 mostra che il viceversa, in generale, non vale.

Definizione 3.4.4 (Dominio di estensione)**.** Diciamo che un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ è un *dominio di estensione* se $\partial\Omega$ è limitato e per ogni aperto $A \supset \overline{\Omega}$ e per ogni $m \geq 1$ esiste un operatore lineare e continuo $T : [BV(\Omega)]^m \to [BV(\mathbb{R}^n)]^m$, detto operatore di estensione, che soddisfa (*a*) $Tu = 0$ q.o. in $\mathbb{R}^n \setminus A$ per ogni $u \in [BV(\Omega)]^m$;

(*b*) $|DTu|(\partial\Omega) = 0$ per ogni $u \in [BV(\Omega)]^m$;

(*c*) per ogni $p \in [1, \infty]$ la restrizione di T su $[W^{1,p}(\Omega)]^m$ induce una mappa lineare e continua tra questo spazio e $[W^{1,p}(\mathbb{R}^n)]^m$.

Teorema 3.4.5. *Ogni insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega$, compatta e Lipschitziana è un dominio di estensione (per una dimostrazione si veda [?]).*

Adesso proveremo un risultato di compattezza; premettiamo un lemma.

Lemma 3.4.6. *Sia $u \in BV(\Omega)$ e $K \subset \Omega$ un insieme compatto. Allora*

$$\int_K |u * \eta_\varepsilon - u| \, dx \leq \varepsilon |Du|(\Omega) \qquad \forall (0, d(k, \partial\Omega)).$$

Dimostrazione. Dal teorema 3.3.3 possiamo assumere, senza perdita di generalità, che $u \in C^1(\Omega)$. Partendo dall'identità

$$u(x - \varepsilon y) - u(x) = -\varepsilon \int_0^1 \langle \nabla u(x - \varepsilon t y), y \rangle \, dt \qquad x \in K, \; y \in B(0, 1)$$

integrando su k rispetto alla variabile x e utilizzando il teorema di Fubini otteniamo

$$\int_K |u(x - \varepsilon y) - u(x)| \, dx = \varepsilon \int_0^1 \int_K \langle \nabla u(x - \varepsilon t y), y \rangle \, dx \, dt \leq \varepsilon \, |Du|(\Omega).$$

Moltiplicando sia destra che a sinistra per un mollificatore $\eta(y)$ (vedi la definizione 1.1.2) e integrando nella variabile y otteniamo

$$\int_K \left(\int_{R^n} |u(x - \varepsilon y) - u(x)| \eta(y) \, dy \right) dx \leq \varepsilon \, |Du|(\Omega). \tag{3.12}$$

Poiché $u * \eta_\varepsilon - u$ è uguale a $\int_{R^n} (u(x - \varepsilon y) - u(x)) \eta(y) \, dy$ da (3.12) abbiamo

$$\int_K |u * \eta_\varepsilon - u| \, dx \leq \int_K \left(\int_{R^n} |u(x - \varepsilon y) - u(x)| \eta(y) \, dy \right) dx \leq \varepsilon \, |Du|(\Omega).$$

□

Teorema 3.4.7 (Compattezza in BV)**.** *Ogni successione $(u_h)_h \subset BV_{loc}(\Omega)$ che soddisfa*

$$\sup \left\{ \int_A |u_h| \, dx + |Du|(A) \; : \; h \in \mathbb{N} \right\} < \infty \qquad \forall A \Subset \Omega \textit{ aperto}$$

ammette una sottosuccessione $(u_{h_k})_k$ convergente in $L^1_{loc}(\Omega)$ a $u \in BV_{loc}(\Omega)$. Se Ω è un dominio di estensione limitato e la successione è limitata in $BV(\Omega)$ possiamo dire che $u \in BV(\Omega)$ e che la sottosuccessione converge debole ad u.*

Dimostrazione. Sia Ω_j una successione di aperti $\Omega_j \Subset \Omega$ tale che $\Omega_j \uparrow \Omega$; se per ogni indice j troviamo una sottosuccessione $u_h^{(j)}$ convergente in $L^1(\Omega_j)$ posssiamo estrarre una sottosuccessione diagonale che soddisfa la tesi. Allora, sia $\Omega' \Subset \Omega$ un insieme aperto, basta mostrare l'esistenza di una sottosuccessione convergente in $L^1(\Omega')$ ad una qualche funzione u (notiamo che dalla proposizione 3.4.2 $u \in BV(\Omega')$). Sia $\delta = d(\Omega', \partial\Omega) > 0$. Consideriamo $U \subset \Omega$ un $\frac{\delta}{2}$-intorno di Ω' e sia $u_{h,\varepsilon} = u_h * \eta_\varepsilon$ (con η come nella definizione 1.1.2). Se $\varepsilon \in (0, \frac{\delta}{2})$ le funzioni $u_{h,\varepsilon}$ sono lisce in $\overline{\Omega'}$ e soddisfano

$$\|u_{h,\varepsilon}\|_{C(\overline{\Omega'})} \leq \|u_h\|_{L^1(U)} \|\eta_\varepsilon\|_\infty, \qquad \|\nabla u_{h,\varepsilon}\|_{C(\overline{\Omega'})} \leq \|u_h\|_{L^1(U)} \|\nabla \eta_\varepsilon\|_\infty.$$

Le successioni (u_h) e $(u_{h,\varepsilon})$ sono equilimitate ed equicontinue per ε fissato. Qesto significa che, fissato ε, possiamo trovare una sottosuccessione convergente di $(u_{h,\varepsilon})$ in $C(\overline{\Omega'})$. Con un argomento diagonale possiamo trovare una sottosuccessione di indici (h_k) tale che per ogni $\varepsilon = \frac{1}{m}$ con $m > \frac{2}{\delta}$ la successione $u_{h_k,\varepsilon}$ converge in $C(\overline{\Omega'})$. Applicando il lemma 3.4.6 abbiamo

$$\begin{aligned}
\limsup_{k,k' \to \infty} \int_{\Omega'} |u_{h_k} - u_{h'_k}|\, dx &\leq \limsup_{k,k' \to \infty} \int_{\Omega'} |u_{h_k, \frac{1}{m}} - u_{h'_k, \frac{1}{m}}|\, dx \\
&\quad + \limsup_{k,k' \to \infty} \int_{\Omega'} \left[|u_{h_k} - u_{h_k, \frac{1}{m}}| + |u_{h'_k} - u_{h'_k, \frac{1}{m}}| \right] dx \\
&\leq \frac{2}{m} \sup_{h \in \mathbb{N}} |Du_h|(U).
\end{aligned}$$

Così per arbitrarietà di m e per la completezza di $L^1(\Omega')$ abbiamo che u_{h_k} converge in $L^1(\Omega')$.
Se Ω è un dominio di estensione limitato, applicare la prima parte della dimostrazione alle estensioni $Tu_h \in BV(\mathbb{R}^n)$, troviamo una sottosuccessione di indici (h_k) tale che (Tu_{h_k}) converge ad una qualche funzione $u \in BV(\Omega)$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. In particolare (u_{h_k}) converge ad u in $L^1(\Omega)$, quindi, grazie alla proposizione 3.4.2, $u \in BV(\Omega)$ e abbiamo la convergenza debole*. □

Il seguente teorema è un'estensione della disuguaglianza di Sobolev per funzioni in $W^{1,1}(\Omega)$.

Teorema 3.4.8 (Disuguaglianza di Sobolev). 1. *Sia $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ con supporto compatto. Allora:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\frac{n}{n-1}} \, dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq c_1 \int_{\mathbb{R}^n} |Df|, \tag{3.13}$$

dove c_1 è una costante dipendente solo dalla dimensione n.

2. *Sia $f \in BV(B_\rho)$ e definamo $f_\rho = \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} f \, dx$. Allora*

$$\left(\int_{B_\rho} |f - f_\rho|^{\frac{n}{n-1}} \, dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq c_2 \int_{B_\rho} |Df|, \tag{3.14}$$

con c_2 costante dipendente solo da n.

Dimostrazione. Le disuguaglianze (3.13) e (3.14) sono note per funzioni $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $C^\infty(B_\rho)$ rispettivamente.
Mostriamo la prima. Scegliamo una successione $\{f_j\}$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $f_j \to f$ in L^1 e $\int_{\mathbb{R}^n} |Df_j| \to \int_{\mathbb{R}^n} |Df|$ che sappiamo esistere per il teorema 3.3.3. Ora per (3.13) le $\{f_j\}$ sono uniformemente limitate in $L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)$, infatti

$$\|f_j\|_{\frac{n}{n-1}} \leq c_1 \int_{\mathbb{R}^n} |Df_j| \leq c_1 \int_{\mathbb{R}^n} |Df| + \varepsilon,$$

che è finito perché ogni $\int_{\mathbb{R}^n} |Df_j|$ è finito e $\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |Df_j| = \int_{\mathbb{R}^n} |Df|$ è anch'esso finito. Quindi le $\{f_j\}$ sono limitate in $L^{\frac{n}{n-1}}$ e allora, poiché $L^{\frac{n}{n-1}}$ è riflessivo, esiste una sottosuccessione (che richiamiamo $\{f_j\}$) che converge debolmente ad una certa funzione $f_0 \in L^{\frac{n}{n-1}}$. Poiché $f_j \to f$ in L^1, $f_j \rightharpoonup f$ in $L^{\frac{n}{n-1}}$ e $f_0 = f$; questo perché, per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ abbiamo

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f - f_0) \, \varphi \, dx \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f - f_j) \, \varphi \, dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f_j - f_0) \, \varphi \, dx \right| \\ &\leq \|f - f_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \sup \varphi + \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f_j - f_0) \, \varphi \, dx \right| \end{aligned}$$

che tende a zero al tendere di $j \to \infty$. Quindi $f - f_0 = 0$ *q.o.* per il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni e $f = f_0 \in L^{\frac{n}{n-1}}$, per cui $f_j \rightharpoonup f$ in $L^{\frac{n}{n-1}}$. Allora per la convergenza debole

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\frac{n}{n-1}} \, dx \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \liminf_{j\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_j|^{\frac{n}{n-1}} \, dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq c_1 \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |Df_j| = c_1 \int_{\mathbb{R}^n} |Df|. \end{aligned}$$

Ora mostriamo la seconda disuguaglianza. Sia come sopra $\{f_j\}$ una successione in $C^\infty(B_\rho)$ tale che $f_j \to f$ e $\int_{B_\rho} |Df_j| \to \int_{B_\rho} |Df|$; verifichiamo che $f_j - f_{j\rho} \rightharpoonup f - f_\rho$ in $L^{\frac{n}{n-1}}(B_\rho)$. Per (3.14), $f_j - f_{j\rho}$ sono equilimitate in $L^{\frac{n}{n-1}}(B_\rho)$, quindi esiste una sottosuccessione (che richiamiamo $\{f_j\}$) tale che $f_j - f_{j\rho} \rightharpoonup f_0$; ma $f_j - f_{j\rho} \to f - f_\rho$ in $L^1(B_\rho)$, infatti

$$\|(f_j - f_{j\rho}) - (f - f_\rho)\|_{L^1(B_\rho)} \leq \|(f_j - f\|_{L^1(B_\rho)} + \|(f_{j\rho} - f_\rho)\|_{L^1(B_\rho)} < 2\varepsilon,$$

perché

$$\begin{aligned} \|f_{j\rho} - f_\rho\|_{L^1(B_\rho)} &= \int_{B_\rho} \left| \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} (f_j - f)\, dy \right| dx \\ &\leq \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} \|f_j - f\|_{L^1(B_\rho)}\, dx = \|f_j - f\|_{L^1(B_\rho)}. \end{aligned}$$

Allora come prima $f_j - f_{j\rho} \rightharpoonup f - f_\rho$ e $f_0 = f - f_\rho$, da cui per convergenza debole e (3.14) per funzioni $C^\infty(B_\rho)$

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_\rho} |f - f_\rho|^{\frac{n}{n-1}}\, dx \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \liminf_{j\to\infty} \left(\int_{B_\rho} |f_j - f_{j\rho}|^{\frac{n}{n-1}}\, dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq c_2 \lim_{j\to\infty} \int_{B_\rho} |Df_j| = c_2 \int_{B_\rho} |Df|. \end{aligned}$$

□

Corollario 3.4.9 (Disuguaglianza isoperimetrica)**.** *Sia E un insieme limitato di Caccioppoli in $\mathbb{R}^n$. Allora*

$$|E|^{\frac{n-1}{n}} \leq c_1 \int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_E|; \tag{3.15}$$

$$\min\{|E \cap B_\rho|, |E^c \cap B_\rho|\}^{\frac{n-1}{n}} \leq 2^{\frac{1}{n}}\, c_2 \int_{B_\rho} |D\chi_E|. \tag{3.16}$$

Dimostrazione. La (3.15) è diretta conseguenza della (3.13) prendendo $f = \chi_E$ ($\chi_E \in BV(\mathbb{R}^n)$ ed è a supporto compatto):

$$|E|^{\frac{n-1}{n}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_E|^{\frac{n}{n-1}}\, dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq c_1 \int_{\mathbb{R}^n} |D\chi_E|.$$

Proviamo ora (3.16). Notiamo che se $f = \chi_E$ allora $f_\rho = \frac{|E\cap B_\rho|}{|B_\rho|}$ e così

$$\int_{B_\rho} |f - f_\rho|^{\frac{n}{n-1}}\, dx = \left\{ 1 - \frac{|E \cap B_\rho|}{|B_\rho|} \right\}^{\frac{n}{n-1}} |E \cap B_\rho| + \left\{ \frac{|E \cap B_\rho|}{|B_\rho|} \right\}^{\frac{n}{n-1}} |E^c \cap B_\rho|.$$

Notiamo che $|E^c \cap B_\rho| = |B_\rho|\big\{1 - \frac{|E \cap B_\rho|}{|B_\rho|}\big\}$, e quindi possiamo riscrivere:

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{B_\rho} |f - f_\rho|^{\frac{n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \geq \\
&\qquad \geq \min\{|E \cap B_\rho|, |E^c \cap B_\rho|\}^{\frac{n-1}{n}} \left\{\left[\frac{|E \cap B_\rho|}{|B_\rho|}\right]^{\frac{n}{n-1}} + \left[\frac{|E_c \cap B_\rho|}{|B_\rho|}\right]^{\frac{n}{n-1}}\right\}^{\frac{n-1}{n}} \\
&\qquad \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \min\{|E \cap B_\rho|, |E^c \cap B_\rho|\}^{\frac{n-1}{n}},
\end{aligned}
$$

dove nell'ultimo passaggio (notando che $\frac{|E \cap B_\rho|}{|B_\rho|}$ e $\frac{|E_c \cap B_\rho|}{|B_\rho|}$ sono minori di 1 e la loro somma è 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ è il minimo assunto dalla funzione $\left[x^{\frac{n}{n-1}} + (1-x)^{\frac{n}{n-1}}\right]^{\frac{n-1}{n}}$ in $(0,1)$. $\square$

Capitolo 4

Analisi in spazi metrici

In questo capitolo introdurremo alcune nozioni relative agli spazi metrici che serviranno per poi costruire la teoria sulle funzioni BV in ambiente metrico e ottenere un teorema di equivalenza.

4.1 Curve in spazi metrici

Sia (X, d) uno spazio metrico.

Definizione 4.1.1. Diciamo *curva* una mappa continua $\gamma : [a, b] \to X$ e indichiamo con $|\gamma| := \gamma([a, b])$ la sua *immagine*. Data $\pi : a = t_0 \leq \ldots, t_n = b$ una partizione dell'intervallo $[a, b]$ definiamo la *lunghezza* di γ come

$$l(\gamma) = \sup_{\pi \in \Pi} \sum_{i=0}^{n_\pi - 1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})), \tag{4.1}$$

dove Π è l'insieme delle partizioni finite dell'intervallo $[a, b]$. Diciamo che la curva γ è *rettificabile* se $l(\gamma) < \infty$. La *funzione lunghezza* associata ad una curva rettificabile $\gamma : [a, b] \to X$ è $s_\gamma : [a, b] \to [0, l(\gamma)]$ data da $s_\gamma(t) = l(\gamma_{|[a,t]})$.

Osservazione 4.1.2. Una curva è rettificabile se e solo se è una funzione continua e di variazione limitata (vedi l'osservazione (2.1.3)), con $l(\gamma) = T_a^b(\gamma)$.

Lemma 4.1.3. *Sia $\gamma : [a, b] \to X$ una curva rettificabile, allora la funzione lunghezza $s_\gamma : [a, b] \to [0, l(\gamma)]$ è non decrescente e continua.*

Dimostrazione. Chiaramente s_γ è non decrescente. Proviamo la continuità per assurdo. Cominciamo dalla continuità in (a, b). Supponiamo per assurdo che ci sia $\tau \in (a, b)$ per cui

$$\lim_{t \to \tau^+} s_\gamma(t) - \lim_{t \to \tau^-} s_\gamma(t) = \eta > 0. \tag{4.2}$$

Prendiamo una partizione $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tale che

$$t_a^b(\gamma, \pi) = \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_{i+1}), \gamma(t_i)) > l(\gamma) - \frac{\eta}{3} \tag{4.3}$$

e $d(\gamma(t_{i+1}), \gamma(t_i)) < \frac{\eta}{3}$ per $i = 0, \ldots, n-1$. Possiamo sempre supporre che τ non sia un nodo della partizione π: infatti se τ coincide con uno dei t_i, per (4.3) esiste un $\varepsilon \in]0, \frac{\eta}{3}]$ tale che

$$t_a^b(\gamma, \pi) = l(\gamma) - \frac{\eta}{3} + \varepsilon,$$

e in virtù della continuità di γ esistono t_i^1 e t_i^2 tali che $t_i^1 < \tau < t_i^2$, per cui $d(\gamma(t_i^1), \gamma(\tau))$ e $d(\gamma(t_i^1), \gamma(\tau))$ sono minori di $\frac{\varepsilon}{3}$. Allora considerando la nuova partizione $\pi' : a = t_0 < \cdots < t_{i-1} < t_i^1 < t_i^2 < \cdots < t_n = b$ si ha

$$t_a^b(\gamma, \pi') > t_a^b(\gamma, \pi) - \frac{2\varepsilon}{3} = l(\gamma) - \frac{\eta}{3} + \frac{\varepsilon}{3},$$

dunque la (4.3) vale anche per π' che non ha τ come nodo. Sia dunque π una partizione che non ha τ come elemento e sia $\tau \in (t_i, t_{i+1})$. Dall'equazione (4.2) segue che $l(\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}) \geq \eta$, allora esiste una partizione σ di $[t_i, t_{i+1}]$ per cui $t_{t_i}^{t_{i+1}}(\gamma, \sigma) > \frac{2\eta}{3}$. Rimpiazzando in (4.3) l'addendo $d(\gamma(t_{i+1}), \gamma(t_i))$ con $t_{t_i}^{t_{i+1}}(\gamma, \sigma)$ e detta $\pi'' = \pi \cup \sigma$ otteniamo

$$t_a^b(\gamma, \pi'') > \left(l(\gamma) - \frac{\eta}{3}\right) - \frac{\eta}{3} + \frac{2\eta}{3} = l(\gamma),$$

in contraddizione con la definizione di lunghezza.
Il procedimento è analogo nel caso in cui la presunta discontinuità sia in un estremo dell'intervallo $[a, b]$ (lo proviamo solo per l'estremo a). Infatti supponiamo per assurdo che

$$\lim_{t \to \alpha^+} s_\gamma(t) - s_\gamma(a) = \eta > 0.$$

Considerando come prima una partizione $\pi : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ per cui vale (4.3) e un'opportuna suddivisione di $[a, t_1]$ avremmo di nuovo $t_a^b(\gamma, \pi) > l(\gamma)$; assurdo. $\square$

Definizione 4.1.4. Se $\gamma : [a, b] \to X$ è una curva e $\alpha : [c, d] \to [a, b]$ è una funzione continua, crescente e suriettiva, allora diciamo che la curva $\gamma \circ \alpha$ è ottenuta da γ con un *cambio di variabile non decrescente*. Notiamo che

$$l(\gamma) = l(\gamma \circ \alpha). \tag{4.4}$$

Possiamo definire la lunghezza anche per curve arbitrarie, non necessariamente continue, $\gamma : [a,b] \to X$, nello stesso modo delle curve continue. Come visto in osservazione 2.2.2 anche nel caso di curve rettificabili a valori in uno spazio metrico la curva ha al più una quantità numerabile di punti di discontinuità. Infatti se γ avesse una quantità più che numerabile di discontinuità potremmo considerare gli insiemi $D_n = \{t \in [a,b] \ : \ d(\gamma(t_+), \gamma(t_-)) \geq 2^{-n}\}$; se solo uno di questi fosse più che numerabile, potremmo estrarne un sottoinsieme numerabile e costruire una successione di partizioni che evidenzi tali salti così da ottenere lunghezza infinita. Allora la cardinalità dei salti è numerabile perché unione numerabile di insiemi D_n al più numerabili. Osserviamo che (4.4) vale per una mappa arbitraria $\gamma : [a,b] \to X$.
Ogni curva rettificabile ammette una parametrizzazione con buone proprietà, detta parametrizzazione per *lunghezza d'arco*.

Teorema 4.1.5. *Se $\gamma : [a,b] \to X$ è una curva rettificabile, allora c'è un'unica curva $\tilde{\gamma} : [0, l(\gamma)] \to X$ tale che*

$$\gamma = \tilde{\gamma} \circ s_\gamma. \tag{4.5}$$

Inoltre $l(\tilde{\gamma}_{[0,t]}) = t$ per ogni $t \in [0, l(\gamma)]$. In particolare $\tilde{\gamma} : [0, l(\gamma)] \to X$ è una funzione 1-Lipschitziana.

Dimostrazione. Assumiamo per comodità che $a = 0$. Sia

$$h(t) = \inf\{s_\gamma^{-1}(t)\} \quad \forall\ t \in [0, l(\gamma)].$$

Notiamo che $h(t) \in s_\gamma^{-1}(t)$: infatti dalla continuità di s_γ per ogni $t \in [0, l(\gamma)]$ l'insieme $s_\gamma^{-1}(t)$ è un chiuso in $[0, l(\gamma)]$, dunque compatto, ed inoltre $t \in s_\gamma^{-1}(s_\gamma(t))$. Allora

$$s_\gamma(h(t)) = t \qquad e \qquad h(s_\gamma(t)) \leq t.$$

Se $\tilde{\gamma}(t)$ soddisfa (4.5) allora $\gamma(h(t)) = \tilde{\gamma}(s_\gamma(h(t))) = \tilde{\gamma}(t)$ per ogni $t \in [0, l(\gamma)]$, quindi

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(h(t)) \qquad \forall\ t \in [0, l(\gamma)], \tag{4.6}$$

che ci dà l'unicità. Supponiamo ora che $\tilde{\gamma}(t)$ soddisfi (4.6), allora ci rimane da provare (4.5) e $l(\gamma_{|[0,t]}) = t$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} d(\gamma(t), \gamma(h(s_\gamma(t)))) &\leq l(\gamma_{|[h(s_\gamma(t)),t]}) = s_\gamma(t) - s_\gamma(h(s_\gamma(t))) \\ &= s_\gamma(t) - s_\gamma(t) = 0. \end{aligned}$$

Quindi per le proprietà della distanza e (4.6) abbiamo $(\tilde{\gamma} \circ s_\gamma)(t) = \gamma(h(s_\gamma(t))) = \gamma(t)$, da cui (4.5). Inoltre ricordando (4.4)

$$l(\tilde{\gamma}_{|[0,t]}) = l(\tilde{\gamma}_{|[0,s_\gamma(h(t))]}) = l((\tilde{\gamma} \circ s_\gamma)_{|[0,(h(t))]}) = l(\gamma_{|[0,(h(t))]}) = s_\gamma(h(t)) = t.$$

Da questo otteniamo la 1-Lipschitzianità di $\tilde{\gamma}$

$$d(\tilde{\gamma}(t_2), \tilde{\gamma}(t_1)) \leq l(\tilde{\gamma}_{|[t_1,t_2]}) = t_2 - t_1,$$

e dunque la tesi. □

Osservazione 4.1.6. In particolare il teorema 4.1.5 mostra che ogni curva rettificabile ammette una parametrizzazione 1-Lipschitziana. Diciamo che $\tilde{\gamma}$ è parametrizzata con *lunghezza d'arco* perché $l(\tilde{\gamma}_{[0,t]}) = t$ per ogni $t \in [0, l(\gamma)]$.

Definizione 4.1.7. Sia $\gamma : [a, b] \to X$ una curva; definiamo la *velocità di* γ in un punto $t \in [a, b]$ come

$$|\dot{\gamma}|(t) = \lim_{h\to 0} \frac{d(\gamma(t+h), \gamma(t))}{h}, \tag{4.7}$$

quando tale limite esiste.

Teorema 4.1.8. *Per ogni curva Lipschitziana* $\gamma : [a, b] \to X$ *esiste q.o. la velocità e vale:*

$$l(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}|(t)\, dt. \tag{4.8}$$

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sottoinsieme denso di $|\gamma| = \gamma([a, b])$. Siano $\varphi_n(t) : [a, b] \to \mathbb{R}$ definite come $\varphi_n(t) = d(\gamma(t), x_n)$. Le funzioni φ_n sono Lipschitziane, infatti dalla Lipschitzianità di γ

$$|\varphi_n(t_2) - \varphi_n(t_1)| = |d(\gamma(t_2), x_n) - d(\gamma(t_1), x_n)| \leq d(\gamma(t_2), \gamma(t_1)) \leq |t_2 - t_1|. \tag{4.9}$$

Inoltre $\varphi_n \in BV[a, b]$, infatti

$$T_a^b(\varphi_n) = \sup_{\pi\in\Pi} \sum_{i=0}^{N} |\varphi_n(t_{i+1}) - \varphi_n(t_i)| \leq \sup_{\pi\in\Pi} \sum_{i=0}^{N} d(\gamma(t_{i+1}), \gamma(t_i)) = l(\gamma),$$

e grazie al corollario 2.2.6 le φ_n sono differenziabili q.o.. Sia $m(t) = \sup_n |\dot{\varphi_n}(t)|$. Vogliamo provare che

$$|\dot{\gamma}(t)| = m(t) \text{ q.o..} \tag{4.10}$$

Proseguendo come in (4.9), per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per q.o. $t \in [a, b]$ troviamo

$$|\dot{\varphi_n}|(t) = \lim_{h\to 0} \frac{|\varphi_n(t+h) - \varphi_n(t)|}{|h|} \leq \liminf_{h\to 0} \frac{d(\gamma(t+h), \gamma(t))}{h},$$

allora passando all'estremo superiore su $\mathbb{N}$ otteniamo

$$m(t) \leq \liminf_{h\to 0} \frac{d(\gamma(t+h), \gamma(t))}{h} \leq L \qquad \text{per q.o. } t \in [a, b], \tag{4.11}$$

con L la costante di Lipschitz di γ. Quindi m è limitata e dunque integrabile in $[a, b]$. D'altra parte per $t_1 \leq t_2$ abbiamo

$$d(\gamma(t_2), \gamma(t_1)) = \sup_n |d(\gamma(t_2), x_n) - d(\gamma(t_1), x_n)| \tag{4.12}$$

$$\leq \sup_n \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\varphi}_n(s)| \, ds \leq \int_{t_1}^{t_2} m(s) \, ds. \tag{4.13}$$

Ora per ogni $t \in (a, b)$ punto di Lebesgue per m, dal teorema 4.2.14 di Lebesgue abbiamo

$$\limsup_{h \to 0} \frac{d(\gamma(t+h), \gamma(t))}{|h|} \leq \limsup_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} m(s) \, ds = m(t). \tag{4.14}$$

Le equazioni (4.11) e (4.14) implicano (4.10).
Adesso vogliamo provare (4.8). Ricordando (4.12) e (4.10), per una generica partizione π di $[a, b]$ troviamo

$$\sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(t_{i+1}), \gamma(t_i))) \leq \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} m(s) \, ds = \int_a^b |\dot{\gamma}|(s) \, ds,$$

e passando all'estremo superiore su tutte le partizioni finite di $[a, b]$ otteniamo $l(\gamma) \leq \int_a^b |\dot{\gamma}|(s) \, ds$. Per provare la disuguaglianza opposta fissiamo un $\varepsilon > 0$ e dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n segmenti di unguale lunghezza, $t_i = a + ih_n$ con $h_n = \frac{b-a}{n}$. Preso n tale che $h_n < \varepsilon$ abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_n} \int_a^{b-\varepsilon} d(\gamma(t + h_n), \gamma(t)) \, dt &\leq \frac{1}{h_n} \int_0^{h_n} \sum_{i=0}^{n-2} d(\gamma(t + t_{i+1}), \gamma(t + t_i)) \, dt \\ &\leq \frac{1}{h_n} \int_0^{h_n} l(\gamma) \, dt = l(\gamma). \end{aligned}$$

Ora per la definizione di velocità e per il lemma di Fatou troviamo

$$\begin{aligned} \int_a^{b-\varepsilon} |\dot{\gamma}|(t) \, dt &= \int_a^{b-\varepsilon} \lim_{n \to \infty} \frac{d(\gamma(t + h_n), \gamma(t))}{h_n} \, dt \\ &\leq \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{h_n} \int_a^{b-\varepsilon} d(\gamma(t + h_n), \gamma(t)) \, dt \leq l(\gamma). \end{aligned}$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ otteniamo la tesi. $\square$

Corollario 4.1.9. *Per ogni $\gamma : [a, b] \to X$ e sia $\tilde{\gamma}$ la curva parametrizzata per lunghezza d'arco, vale $|\dot{\tilde{\gamma}}|(t) = 1$ per q.o. $t \in [0, l(\gamma)]$.*

Dimostrazione. Dalla Lipschitzianità di $\tilde{\gamma}$ abbiamo $|\dot{\tilde{\gamma}}| \leq 1$. Allora

$$l(\gamma) = l(\tilde{\gamma}) = \int_0^{l(\gamma)} |\dot{\tilde{\gamma}}| \, dt \leq l(\gamma),$$

da cui $|\dot{\tilde{\gamma}}| = 1$ q.o.. □

Corollario 4.1.10. *Se $\gamma : [a,b] \to X$ è una curva Lipschitziana allora s_γ è Lipschitziana e $\dot{s}_\gamma(t) = |\dot{\gamma}|(t)$ per q.o. $t \in (a,b)$.*

Dimostrazione. Dati $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$ abbiamo

$$|s_\gamma(t_2) - s_\gamma(t_1)| = l(\gamma_{|[t_1,t_2]}) = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}|(t) \, dt \leq L \, |t_2 - t_1|,$$

ove L è la costante di Lipschitz di γ. Dunque s_γ è Lipschitziana.
Essendo s_γ Lipschitziana, per il teorema 4.1.8 è anche differenziabile, quindi

$$\int_a^b |\dot{\gamma}|(t) \, dt = l(\gamma) = s_\gamma(b) - s_\gamma(a) = \int_a^b \dot{s_\gamma}(t) \, dt.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} |\dot{\gamma}|(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{d(\gamma(t+h), \gamma(t))}{h} \leq \lim_{h \to 0} \frac{l(\gamma_{|[t,t+h]})}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{s_\gamma(t+h) - s_\gamma(t)}{h} = \dot{s_\gamma}(t), \end{aligned}$$

da cui $|\dot{\gamma}|(t) = \dot{s_\gamma}(t)$ per q.o. $t \in [a,b]$. □

Adesso, grazie all'esistenza delle parametrizzazioni secondo lunghezza d'arco di curve rettificabili, mostriamo l'esistenza di geodetiche in spazi metrici. Introduciamo una definizione che condizionerà l'esistenza delle geodetiche:

Definizione 4.1.11. Uno spazio metrico si dice *proprio* se gli insiemi chiusi e limitati sono compatti.

Osservazione 4.1.12. La proprietà di essere *proprio* è una condizione più forte della locale compattezza: basta vedere per esempio $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La tesi del prossimo teorema è falsa per $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Teorema 4.1.13. *Sia (X,d) uno spazio metrico proprio tale che per ogni due punti $x, y \in X$ esista una curva che li unisce. Allora, detto $\Gamma_{x,y}$ l'insieme delle curve che congiungono x e y, per ogni $x, y \in X$ esiste una* geodetica, *ossia una curva che realizza il minimo delle lunghezze in $\Gamma_{x,y}$.*

Dimostrazione. Sia L l'estremo inferiore delle lunghezze $l(\gamma)$ con $\gamma : [a, b] \to X$ e $\gamma \in \Gamma_{x,y}$ (grazie a (4.4) possiamo fissare il dominio delle γ). L è limitato inferiormente, infatti $0 < d(\gamma(a), \gamma(b)) \leq L$. Mostriamo che esiste una curva di lunghezza L. Sia $\gamma_n : [a, b] \to X$ una successione minimizzante rispetto alla lunghezza in $\Gamma_{x,y}$, cioè $l(\gamma_n) \to L$ per $n \to \infty$. Senza perdere di generalità possiamo supporre $L_n = l(\gamma_n) \leq L + 1$. Indichiamo ora con $\tilde{\gamma}$ la curva γ parametrizzata per lunghezza d'arco. Allora riparametrizziamo le $\tilde{\gamma}_n$ definendo $\eta_n(t) : [0, L] \to X$, $\eta_n(t) = \tilde{\gamma}_n(\frac{tL_n}{L})$. Notiamo che grazie al teorema 4.1.5 abbiamo

$$\begin{aligned} d(\eta_n(t_2), \eta_n(t_1)) &= d\left(\tilde{\gamma}_n\left(\frac{t_2 L_n}{L}\right), \tilde{\gamma}_n\left(\frac{t_1 L_n}{L}\right)\right) \\ &\leq \frac{L_n}{L}\left|t_2 - t_1\right| \leq \frac{L+1}{L}\left|t_2 - t_1\right|, \end{aligned}$$

da cui abbiamo l'equicontinuità della famiglia $\eta_n(t)$. Le immagini delle curve sono contenute in un insieme compatto di X (per esempio una palla di raggio $L + 1$ e centro in x); allora per il teorema di Ascoli-Arzelà possiamo estrarre una sottosuccessione uniformemente convergente $\eta_{n_k} \to \eta$ con $\eta : [0, L] \to X$. Ora dalla definizione di lunghezza e per la semicontinuità della variazione totale (3.2.1) abbiamo $l(\eta) \leq \liminf_k l(\eta_{n_k}) = L$. Essendo η una curva in $\Gamma_{x,y}$ la sua lunghezza non può essere inferiore a L, quindi $l(\eta) = L$. $\square$

Osservazione 4.1.14. Una geodetica $\gamma : [a, b] \to X$ è iniettiva, infatti se esistessero $c, d \in [a, b]$ e $x \in X$ per cui $\gamma(c) = \gamma(d) = x$ avremmo $l(\gamma_1) < l(\gamma)$ dove $\gamma_1 : [a, b] \to X$ è la curva definita come

$$\gamma_1(x) := \begin{cases} \gamma(x) & \text{se } x \in [a, c] \\ \gamma(c) & \text{se } x \in [c, d] \\ \gamma(x) & \text{se } x \in [d, b] \ . \end{cases}$$

Adesso definiamo l'integrale di una funzione di Borel lungo una curva rettificabile.

Definizione 4.1.15. Sia $\gamma : [a, b] \to X$ una curva rettificabile e $\rho : |\gamma| \to [0, \infty]$ una funzione di Borel (ricordiamo che $|\gamma| = \gamma([a, b])$). Allora definiamo

$$\int_\gamma \rho := \int_0^{l(\gamma)} \rho(\tilde{\gamma}(t))\, dt,$$

dove $\tilde{\gamma} : [0, l(\gamma)] \to X$ è la parametrizzazione per lunghezza d'arco di γ.

Teorema 4.1.16. *Sia $\gamma : [a, b] \to X$ una curva Lipschitziana e $\rho : |\gamma| \to [0, \infty]$ una funzione di Borel. Allora*

$$\int_\gamma \rho = \int_a^b \rho(\gamma(t))\, |\dot\gamma|(t)\, dt.$$

Dimostrazione. Dato che per il teorema 4.1.5 e il corollario 4.1.9 $\gamma = \tilde\gamma \circ s_\gamma$ e s_γ è Lipschitziana con $\dot s_\gamma(t) = |\dot\gamma|(t)$ q.o., facendo il cambio di variabile $\tau = s_\gamma(t)$ abbiamo

$$\int_\gamma \rho = \int_0^{l(\gamma)} \rho(\tilde\gamma(\tau))\, d\tau = \int_a^b \rho(\tilde\gamma(s_\gamma(t)))\, \dot s_\gamma\, dt = \int_a^b \rho(\gamma(s_\gamma(t)))\, |\dot\gamma|\, dt.$$

□

4.2 Misure doubling e operatore massimale

Studieremo alcune proprietà di media per funzioni su spazi metrici. Tali risultati dipendono da una proprietà di riscalamento della misura. In particolare risulta utile restringersi ad una particolare classe di misure di Borel dette doubling. Introdurremo una naturale generalizzazione dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood per funzioni su spazi metrici, ed osserveremo che essa possiede, nel caso in cui la misura sia doubling, proprietà funzionali del tutto simili a quelle dell'operatore classico su spazi euclidei (per il caso reale vedi [16]).

Definizione 4.2.1 (misura doubling)**.** Una misura μ di Borel $\mu : \mathfrak{B}(X) \to [0, \infty]$ è detta *doubling* se $0 < \mu(B) < \infty$ per ogni palla B, ed esiste una costante $C_d \geq 1$ detta *costante doubling* tale che

$$\mu(B_{2r}(x)) \leq C_d\, \mu(B_r(x)) \quad \forall x \in X,\ \forall r > 0. \tag{4.15}$$

Mostriamo ora una caratterizzazione di queste misure.

Teorema 4.2.2. *Una misura $\mu : \mathfrak{B}(X) \to [0, \infty]$ per cui $0 < \mu(B) < \infty$ per ogni palla B, è doubling se solo se esistono s, C' tali che*

$$\frac{\mu(B_r(x))}{\mu(B_R(y))} \geq C' \left(\frac{r}{R}\right)^s \tag{4.16}$$

per ogni $x, y \in X$ e per ogni $R \geq r > 0$ tali che $x \in B_R(y)$.

Dimostrazione. ($\Longleftarrow$) Da (4.16) prendendo $y = x$ e $R = 2r$ abbiamo

$$\mu(B_{2r}(x)) \leq \frac{1}{C'}\left(\frac{1}{2}\right)^s \mu(B_r(x))$$

che è quanto volevamo.
($\Longrightarrow$) Per $i = 1, 2, \ldots$, definiamo $R_i := 2^i r$ e sia $j := \min\{i | B_R(y) \subset B_{R_i}(x)\}$. Iterando (4.15) j volte otteniamo

$$\mu(B_R(y)) \leq \mu(B_{R_j}(x)) \leq C_d^j \mu(B_r(x)) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mu(B_r(x))}{\mu(B_R(y))} \geq C_d^{-j}$$

D'altra parte $B_R(y) \not\subset B_{R_{j-1}}(x)$: allora poiché $x \in B_R(y)$ si ha $R_{j-1} \leq 2R$. Quindi

$$2^{j-1} r \leq 2R \qquad \Longrightarrow \qquad j \leq \log_2\left(\frac{4R}{r}\right).$$

Vogliamo mostrare che esistono due costanti positive C' e s che soddisfano la relazione (4.16), e per fare ciò esibiremo s e C' tali che $C_d^{-j} \geq C'\left(\frac{r}{R}\right)^s$. Sia $C' := C_d^{-2}$, troviamo un $s > 0$ che soddisfi tale disuguaglianza: si ha

$$C_d^{-j+2} \geq \left(\frac{r}{R}\right)^s \quad \Longleftrightarrow \quad j - 2 \leq s \log_{C_d}\left(\frac{R}{r}\right).$$

Ma per quanto visto sopra

$$j \leq \log_2\left(\frac{4R}{r}\right) \quad \Longrightarrow \quad j - 2 \leq \log_2\left(\frac{R}{r}\right)$$

Allora basta che $s \log_{C_d}\left(\frac{R}{r}\right) \geq \log_2\left(\frac{R}{r}\right)$ per avere la tesi. Quindi basta scegliere $s = \log_2 C_d$. □

L'esponente $s = \log_2 C_d$ è chiamato *dimensione omogenea dello spazio* X. Notiamo che la dimensione omogenea non è univocamente associata ad una data misura doubling, infatti si può sempre prendere una costante C_d più grande. Ma è anche vero, come visto nella dimostrazione, che in generale l'esponente $s = \log_2 C_d$ non può essere abbassato. Verrebbe naturale definire costante doubling l'estremo inferiore delle costanti che soddisfano la definizione 4.2.1 e quindi fissare univocamente la dimensione omogenea s, ma a volte in letteratura viene richiesta la condizione $s > 1$, soprattutto nei teoremi di immersione di Sobolev dove l'esponente s gioca lo stesso ruolo di n (dimensione di $\mathbb{R}^n$) e può essere utile farlo variare. Nel caso particolare in cui μ è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ troviamo appunto che $C_d = 2^n$ e che $s = n$.

Osservazione 4.2.3. Se μ è una misura doubling, allora grazie a (4.16) μ è finita sui limitati ed è uniformemente localmente positiva, nel senso che per ogni limitato $A \subset X$ e per ogni $\varepsilon > 0$

$$\inf_{x \in A} \mu(B(x, \varepsilon)) > 0.$$

La proprietà doubling di una misura è strettamente collegata alla geometria dello spazio; i seguenti risultati forniscono condizioni sullo spazio affinché possa supportare una misura doubling.

Lemma 4.2.4. [1] *Se μ è doubling, allora lo spazio metrico X è* doubling*, nel senso che esiste una costante $C > 0$, dipendente dalla costante doubling C_d, tale che il minimo numero di palle di raggio $\frac{r}{2}$ necessario per ricoprire ogni palla $B(x, r)$ è maggiorato da C.*

Dimostrazione. Sia $\{x_i\}_{i \in I} \subset B(x, r)$ un insieme di punti massimale rispetto alla proprietà che $d(x_i, x_j) \geq \frac{r}{2}$ per ogni $i, j \in I$ con $i \neq j$. Per massimalità, $B(x, r) \subset \cup_{i \in I} B(x_i, \frac{r}{2})$ e inoltre $B(x_i, \frac{r}{4})$ sono palle disgiunte; per la definizione 4.2.1 e per (4.16) abbiamo

$$\sum_{i \in I} \mu(B(x_i, \frac{r}{4})) \leq \mu(B(x, 2r)) \leq C_d \, \mu(B(x, r)),$$

da cui, dividendo gli estremi della disuguaglianza per $\mu(B(x, r))$, troviamo

$$C_d \geq \sum_{i \in I} \frac{\mu(B(x_i, \frac{r}{4}))}{\mu(B(x, r)} \geq \sum_{i \in I} C_d^{-2} 4^{-s}.$$

Allora ricordando che $s = \log_2 C_d$ abbiamo $|I| \leq C_d^5$. □

Osservazione 4.2.5. Il lemma 4.2.4 ci dice che in (X, d, μ) un insieme limitato è totalmente limitato: [2], infatti per ogni limitato K esiste un punto $x \in K$ e un raggio $R > 0$ per cui $K \subset B(x, R)$. Sia ora $\varepsilon > 0$: allora esiste un $n \in \mathbb{N}$ per cui $2^{-n} R < \varepsilon$. Allora applicando n volte il lemma troviamo l'insieme cercato; la sua cardinalità sarà minore di $C_d^5 n$.

Teorema 4.2.6. *Uno spazio metrico, completo e doubling è proprio.*

Dimostrazione. Sia $K \subset X$ un sottoinsieme chiuso e limitato. Per l'osservazione 4.2.5, K è totalmente limitato, inoltre lo spazio metrico (K, d) e completo. Allora (K, d) è uno spazio metrico completo e totalmente limitato, dunque compatto. □

[1] Vale il viceversa per spazi metrici completi, si veda [29, 33]

[2] Un sottoinsieme K di uno spazio metrico (X, d) si dice *totalmente limitato* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme finito di punti $\{x_i\}$ tale che $K \subset \cup B(x_i, \varepsilon)$

Le misure doubling hanno molte proprietà in comune con la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$; infatti l'operatore massimale di Hardy-Littlewood è limitato in L^p con $p > 1$, per $p = 1$ si ha una stima debole $(1, 1)$ e vale il teorema di differenziazione di Lebesgue.

Definizione 4.2.7 (operatore massimale di Hardy-Littlewood)**.** Date due misure μ e ν non negative su uno spazio metrico X, definiamo l'operatore massimale della misura ν rispetto alla misura μ come

$$M_\nu(x) := \sup_{r>0} \frac{\nu(B_r(x))}{\mu(B_r(x))} \quad \forall x \in X.$$

Inoltre definiamo $M_f := M_{f\mu}$ per ogni funzione Boreliana $f : \mathfrak{B}(X) \to [0, \infty]$ se la misura μ è chiara dal contesto.

Osservazione 4.2.8. Segue dalla definizione che

$$M_f(x) := M_{f\mu}(x) = \sup_{r>0} \frac{(f\mu)(B_r(x)}{\mu(B_r(x))} = \sup_{r>0} \frac{\int_{B_r(x)} f \ d\mu}{\mu(B_r(x))} = \sup_{r>0} ⨍_{B_r(x)} f \ d\mu.$$

Osservazione 4.2.9. L'operatore massimale M_f è una funzione misurabile.

Dimostrazione. Sia f una funzione borelaina non negativa, allora la funzione $⨍_{B_r(x)} f \ d\mu$ è continua rispetto alle due variabili x e r. Poiché

$$\sup_{r>0} ⨍_{B_r(x)} f \ d\mu = \sup_{r\in\mathbb{Q}^+} ⨍_{B_r(x)} f \ d\mu$$

M_f risulta misurabile perché estremo superiore di un insieme numerabile di funzioni misurabili. □

Ci proponiamo di studiare per quali classi di funzioni l'operatore massimale ha proprietà rilevanti. Cominciamo mostrando che per una qualunque funzione non nulla $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ allora $M_f \notin L^1(\Omega, m_n)$. Ma nel seguito vedremo che nel caso $p = 1$ abbiamo una stima debole (1-1). Nel caso $p \in (1, \infty)$ abbiamo un teorema dovuto a Hardy e Littlewood che ci dice che se $f \in L^p(E, \mu)$ allora anche M_f vi appartiene.

Proposizione 4.2.10. *Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ non nulla; allora $M_f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Data $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ non nulla esiste un $R > 0$ tale che

$$\int_{B_R(0)} |f| \ dx = C \qquad \textit{con } C > 0,$$

(se $0 \notin \Omega$ ci si può riportare in questa situazione con una traslazione, e la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni). Allora per definizione di operatore massimale di f rispetto alla misura di Lebesgue abbiamo:

$$M_f(x) = \sup_{r>0} \frac{\int_{B_r(x)} f \, d\mu}{\mu(B_r(x))} \geq \frac{\int_{B_{R+|x|}(x)} f \, d\mu}{\mu(B_{R+|x|}(x))} \geq \frac{C}{\mu(B_{R+|x|}(x))}.$$

Ci basta mostrare che $\frac{C}{\mu(B_{R+|x|}(x))} \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ per provare la tesi. Notiamo che

$$\frac{C}{\mu(B_{R+|x|}(x))} = \frac{C}{\omega_n \, \big(R+|x|\big)^n} = \frac{C}{\omega_n \, |x|^n} \frac{|x|^n}{\big(R+|x|\big)^n}$$

ma la quantità $\frac{|x|^n}{\big(R+|x|\big)^n}$ è limitata e tende crescendo ad 1, per cui la funzione all'ultimo membro non appartiene a $L^1(\mathbb{R}^n)$. Ne segue

$$\int_{\mathbb{R}^n} M_f \, dx \geq \int_{B_R(0)^c} \frac{C}{\omega_n \, \big(R+|x|\big)^n} \, dx = \infty$$

quindi la tesi. $\square$

Teorema 4.2.11 (Stima debole $(1-1)$)**.** *Siano μ e ν due misure non negative su uno spazio metrico X. Se μ è una misura doubling con supp$(\mu) = X$, allora esiste una costante K (dipendente dalla costante doubling di μ) per cui vale la seguente stima:*

$$\mu\Big(\{x \in X | \ M_\nu(x) > \lambda\}\Big) \leq \frac{K}{\lambda}\nu(X) \qquad \forall \lambda > 0. \tag{4.17}$$

Prima di procedere dimostriamo un lemma di ricoprimento.

Lemma 4.2.12. *Sia X uno spazio metrico e sia $\mathfrak{F}$ un'arbitraria famiglia di palle in X tali che $\sup\{r(B) | B \in \mathfrak{F}\} < +\infty$ con $r(B)$ raggio di B. Allora esiste una sottofamiglia $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$, costituite da palle disgiunte, tale che*

$$\bigcup_{B \in \mathfrak{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathfrak{F}'} \widehat{B}$$

con $\widehat{B(x,r)} := B(x, 5r)$.

Dimostrazione. Partizioniamo la famiglia $\mathfrak{F}$ in sottofamiglie a due a due disgiunte

$$\mathfrak{F}_j := \left\{ B \in \mathfrak{F} \ \middle| \ \frac{R}{2^{j+1}} < r(B) \leq \frac{R}{2^j} \right\}$$

con $j \in \mathbb{N}$ e $R := \sup\{r(B) \mid B \in \mathfrak{F}\}$. Sia $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{o}}$ una sottofamiglia di elementi disgiunti massimale in $\mathfrak{F}_{\mathfrak{o}}$, che esiste per il *lemma di Zorn* (infatti ogni catena ascendente rispetto all'inclusione ha un elemento massimale che è l'unione di tutti gli elementi della catena). Allora induttivamente scegliamo $\mathfrak{F}'_{\mathrm{j}}$ per $j \in \mathbb{N}$ come una famiglia di elementi disgiunti massimale in

$$\left\{B \in \mathfrak{F}_{\mathrm{j}} \;\middle|\; B \cap B' = \emptyset \quad \forall B' \in \bigcup_{i=0}^{j-1} \mathfrak{F}'_{\mathrm{i}}\right\}. \tag{4.18}$$

Posto $\mathfrak{F}' := \cup_{j=0}^{\infty} \mathfrak{F}'_{\mathrm{j}}$, la famiglia $\mathfrak{F}'$ è disgiunta per costruzione. Ora scegliamo $B \in \mathfrak{F}_{\mathrm{j}}$; affermiamo che esiste $B' \in \cup_{i=0}^{j} \mathfrak{F}'_{\mathrm{i}}$ tale che $B \subset \hat{B}'$, il che concluderebbe la dimostrazione. Scegliamo $B' \in \cup_{i=0}^{j} \mathfrak{F}'_{\mathrm{i}}$ tale che $B \cap B' \neq \emptyset$; un tale B' esiste: infatti se per ogni $B' \in \cup_{i=0}^{j} \mathfrak{F}'_{\mathrm{j}}$ fosse $B \cap B' = \emptyset$, potremmo aggiungere B alla famiglia $\mathfrak{F}'_{\mathrm{j}}$, contro la massimalità. Allora per definizione $r(B) \leq R\, 2^{-j}$ e $r(B') > R 2^{-j-1}$; ne segue $r(\hat{B}') > 5R2^{-j-1} > R2^{-j+1} \geq 2\, r(B)$, il che implica $B \subset \hat{B}'$. $\square$

Osservazione 4.2.13. Se l'insieme X ha misura finita e ogni palla ha misura strettamente positiva, la famiglia $\mathfrak{F}' := \cup_{j=0}^{\infty} \mathfrak{F}'_{\mathrm{j}}$ ha cardinalità al più numerabile. Infatti gli insiemi $\mathfrak{F}'_{\mathrm{i}}$ sono al più numerabili perché sono costituiti da insiemi disgiunti con misura strettamente positiva la cui unione è contenuta in X. Si conclude per additività della misura μ.

Possiamo ora dimostrare il teorema 4.2.11.

Dimostrazione. Se $\nu(X) = \infty$ non c'è niente da dimostrare; supponiamo quindi $\nu(X) < \infty$. Scegliamo $\lambda > 0$, $R > 0$ e definiamo

$$M_{\nu,R}(x) := \sup_{0<r<R} \frac{\nu(B_r(x))}{\mu(B_r(x))} \qquad \forall x \in X \tag{4.19}$$

$$A_R := \big\{x \in X | M_{\nu,R}(x) > \lambda\big\}. \tag{4.20}$$

Sia $\mathfrak{F}$ la famiglia di tutte le palle aperte $B_r(x)$ tali che $x \in A_R$, $0 < r < R$, e $\nu(B_r(x)) > \lambda\mu(B_r(x))$. Dal lemma 4.2.12 esiste una sottofamiglia di elementi disgiunti $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$ tale che $A_R \subset \cup_{B\in\mathfrak{F}'} \hat{B}$ dove $\hat{B}$ è come nel lemma 4.2.12. Poiché μ è doubling e $5 < 2^3$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \mu(A_R) &\leq \mu\bigg(\bigcup_{B\in\mathfrak{F}'} \hat{B}\bigg) \leq \sum_{B\in\mathfrak{F}'} \mu(\hat{B}) \\ [\mu \textit{ doubling}] \; &\leq C_d^3 \sum_{B\in\mathfrak{F}'} \mu(B) \leq \frac{C_d^3}{\lambda} \sum_{B\in\mathfrak{F}'} \nu(B) \\ &\leq \frac{C_d^3}{\lambda}\nu(X) = \frac{K}{\lambda}\nu(X). \end{aligned}$$

Poiché $\nu(X) < \infty$, per l'ossservazione 4.2.13 la famiglia $\mathfrak{F}'$ è al più numerabile. Infine per l'arbitrarietà di R, otteniamo:

$$\mu\Big(\{x \in X |\ M_\nu(x) > \lambda\}\Big) \leq \lim_{R\to\infty} \mu(A_R) \leq \frac{K}{\lambda}\nu(X) \qquad \forall\lambda > 0.$$

□

Utilizziamo la stima appena trovata per dimostrare la versione del teorema di Lebesgue nel caso metrico.

Teorema 4.2.14 (di Lebesgue)**.** *Siano X uno spazio metrico, μ una misura doubling su X e f una funzione in $L^1_{loc}(X, \mu)$. Allora abbiamo:*

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\ d\mu(y) = 0 \tag{4.21}$$

per μ-quasi ogni $x \in X$.

Osservazione 4.2.15. Un punto che soddisfa (4.21) è detto *punto di Lebesgue per f*. Il teorema appena enunciato può dunque essere così riformulato: L'insieme dei punti di X che non sono di Lebesgue per f ha misura nulla.

Dimostrazione. Per il teorema di *Lusin* (teorema 1.2.13) e per il teorema di *Tietze* (teorema 1.2.16) per ogni $i \in \mathbb{N}$ possiamo trovare una funzione continua f_i tale che, posta $g_i = f - f_i$, vale $\|g_i\|_{L_1(X,\mu)} \leq 2^{-i}$. Definiamo

$$N_i = \Big\{x \in X |\ |g_i| > \Big(\frac{2}{3}\Big)^i\Big\} \cup \Big\{x \in X |\ M_{|g_i|} > \Big(\frac{2}{3}\Big)^i\Big\}.$$

Per la disuguaglianza di Markov (teorema 1.2.20) e per la formula (4.17) abbiamo

$$\mu(N_i) \leq \Big(\frac{3}{2}\Big)^i \|g_i\|_{L^1(X)} + K\Big(\frac{3}{2}\Big)^i \|g_i\|_{L^1(X)} \leq \Big(\frac{3}{4}\Big)^i (1 + K)$$

con K come in (4.17), il cubo della costante doubling di μ. Definiamo ora

$$N := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{i\geq n} N_i.$$

Si ha $\mu(N) = 0$, infatti

$$\mu(\bigcup_{i\geq n} N_i) \leq (1 + K)\Big(\frac{3}{4}\Big)^n \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\frac{3}{4}\Big)^i = 4\Big(\frac{3}{4}\Big)^n (1 + K)$$

$$\implies \quad \mu\Big(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{i\geq n} N_i\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{i\geq n} N_i\Big) = \lim_{n\to\infty} 4\Big(\frac{3}{4}\Big)^n (1 + K) = 0.$$

Mostriamo che (4.21) vale per ogni $x \in X \setminus N$. Se $x \in X \setminus N$, allora $x \notin N_i$ per i sufficientemente grande (dipendente da x); allora $|g_i|(x) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^i$ e $M_{|g_i|}(x) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^i$ per i sufficientemente grande. Quindi per i opportunamente grande abbiamo, essendo $f = f_i + g_i$:

$$\begin{aligned}
\limsup_{r\downarrow 0} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| \, d\mu(y) \\
&\leq \limsup_{r\downarrow 0} \fint_{B_r(x)} |f_i(y) - f_i(x)| \, d\mu(y) \\
&\quad + \limsup_{r\downarrow 0} \fint_{B_r(x)} |g_i(y) - g_i(x)| \, d\mu(y) \\
&\leq 0 + \limsup_{r\downarrow 0} \fint_{B_r(x)} [|g_i(y)| + |g_i(x)|] \, d\mu(y)
\end{aligned}$$

dove il primo addendo va a zero per la continuità di f_i. Ora per l'osservazione 4.2.8 e per le maggiorazioni fatte abbiamo

$$\begin{aligned}
\limsup_{r\downarrow 0} \fint_{B_r(x)} [|g_i(y)| + |g_i(x)|] \, d\mu(y) &\leq |g_i(x)| + \limsup_{r\downarrow 0} \fint_{B_r(x)} |g_i(y)| \, d\mu(y) \\
&\leq |g_i|(x) + M_{|g_i|}(x) \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^i
\end{aligned}$$

che tende a zero quando i tende ad infinito. □

Lemma 4.2.16 (Principio di Cavalieri). *Sia E un insieme non vuoto, $\mathfrak{M}$ una σ-algebra su E e μ una misura non negativa su $\mathfrak{M}$. Se u è una funzione integrabile e non negativa su E, allora*

$$\int_E u \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{u > t\}) \, dt. \tag{4.22}$$

Dimostrazione. Supponiamo che μ sia σ-finita e che u sia sommabile, allora per ogni $x \in E$ abbiamo

$$u(x) = \int_0^{u(x)} dt = \int_0^\infty \chi_{[0,u(x)]}(t) \, dt.$$

Per il teorema di *Fubini* (che possiamo utilizzare perché abbiamo supposto u sommabile) abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_E u(x) \, d\mu &= \int_E \int_0^\infty \chi_{[0,u(x)]}(t) \, dt \, d\mu \\
&= \int_0^\infty \int_E \chi_{\{x\in E \,:\, u(x)>t\}}(x) \, d\mu \, dt = \int_0^\infty \mu(\{u > t\}) \, dt.
\end{aligned}$$

Se μ non è σ-finita, sia $A := \{u > 0\}$ e $\widetilde{\mu}$ la restrizione di μ ad A. Osserviamo che

$$\int_E u \; d\mu = \int_A u \; d\widetilde{\mu}$$

e

$$\mu(\{u > t\}) = \widetilde{\mu}(\{u > t\})$$

Allora se $\widetilde{\mu}$ è σ-finita concludiamo per quanto appena visto. In caso contrario per ogni successione di insiemi $(X_i) \subset \mathfrak{M}$ tali che $\cup_i X_i = A$ esiste un indice k per cui $\mu(X_k) = \infty$. Consideriamo gli X_i della forma $X_i := \{u > i^{-1}\}$, allora esisterà un k tale che $\mu(\{u > k^{-1}\}) = \infty$. Allora

$$\int_0^\infty \mu(\{u > t\}) \; dt \geq \int_0^{\frac{1}{k}} \mu(\{u > t\}) \; dt \geq \frac{1}{k}\mu\left(\left\{u > \frac{1}{k}\right\}\right) = \infty.$$

Ma allo stesso tempo $u \notin L^1(E, \mu)$, infatti

$$\int_E |u| \; d\mu \geq \int_{\{|u| > \frac{1}{k}\}} |u| \; d\mu \geq \frac{1}{k}\mu\left(\left\{|u| > \frac{1}{k}\right\}\right) \geq \frac{1}{k}\mu\left(\left\{u > \frac{1}{k}\right\}\right) = \infty.$$

Allora poiché u è non negativa segue che $\int_E u \; d\mu = \infty$, e questo completa la dimostrazione. $\square$

Osservazione 4.2.17. Con il principio di Cavalieri abbiamo guadagnato un criterio di sommabilità per funzioni non negative. Una funzione f non negativa è sommabile se e solo se il secondo membro di (4.22) è finito.

Corollario 4.2.18. *Sia E un insieme, $\mathfrak{M}$ una σ-algebra su E e μ una misura non negativa su $\mathfrak{M}$. Se u è una funzione integrabile e non negativa su E allora vale la seguente uguaglianza:*

$$\int_E u^p \; d\mu = p \int_0^\infty t^{p-1}\mu(\{u > t\}) \; dt \tag{4.23}$$

per ogni $p > 1$.

Dimostrazione. Utilizzando la (4.22) sulla funzione u^p e con il cambio di variabili $s = t^{\frac{1}{p}}$ otteniamo

$$\begin{aligned}\int_E u^p \; d\mu &= \int_0^\infty \mu(\{u^p > t\}) \; dt \\ &= \int_0^\infty \mu(\{u > t^{\frac{1}{p}}\}) \; dt \\ &= p \int_0^\infty s^{p-1}\mu(\{u > s\}) \; dt,\end{aligned}$$

quindi la tesi. $\square$

Il seguente risultato, dovuto ad Hardy e Littlewood, mostra come l'operatore massimale è una mappa continua da L^p in L^p per ogni $p > 1$.

Teorema 4.2.19 (di Hardy-Littlewood)**.** *Sia (X, μ) uno spazio metrico con una misura doubling, e sia $f \in L^p(X, \mu)$ con $p > 1$ o $p = \infty$. Allora*

$$\|M_f\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p} \tag{4.24}$$

per una certa costante $C_p > 0$ che dipende solo da p.

Dimostrazione. Il caso $p = \infty$ si dimostra utilizzando la definizione di M_f, infatti

$$M_f(x) = \sup_{r>0} \frac{\int_{B_r(x)} f \, d\mu}{\mu(B_r(x))} \leq \sup_{r>0} \frac{\int_{B_r(x)} \|f\|_{L^\infty} \, d\mu}{\mu(B_r(x))} = \|f\|_{L^\infty}$$

e passando all'estremo superiore abbiamo la tesi.
Vediamo il caso $p > 1$. Osserviamo intanto che

$$|M_f|(x) = \sup_{r>0} \frac{|\int_{B_r(x)} f \, d\mu|}{\mu(B_r(x))} \leq \sup_{r>0} \frac{\int_{B_r(x)} |f| \, d\mu}{\mu(B_r(x))} = M_{|f|}(x)$$

quindi possiamo supporre $f \geq 0$. Se $t \geq 0$, da $f \leq \left(f - \frac{t}{2}\right)^+ + \frac{t}{2}$ otteniamo

$$\begin{aligned} M_f(x) = \sup_{r>0} \frac{\int_{B_r(x)} f \, d\mu}{\mu(B_r(x))} &\leq \sup_{r>0} \frac{\int_{B_r(x)} \left[\left(f - \frac{t}{2}\right)^+ + \frac{t}{2}\right] \, d\mu}{\mu(B_r(x))} \\ &= \sup_{r>0} \frac{\int_{B_r(x)} \left(f - \frac{t}{2}\right)^+ \, d\mu}{\mu(B_r(x))} + \frac{t}{2} = M_{\left(f - \frac{t}{2}\right)^+}(x) + \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\{M_f > t\} \subseteq \{M_{\left(f - \frac{t}{2}\right)^+} > \frac{t}{2}\}$$

e

$$\mu\Big(\{M_f > t\}\Big) \leq \mu\Big(\{M_{\left(f - \frac{t}{2}\right)^+} > \frac{t}{2}\}\Big).$$

Allora per (4.23) abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_X (M_f)^p \, d\mu &= p \int_0^\infty t^{p-1} \, \mu\Big(\{M_f > t\}\Big) \, dt \\
&\leq p \int_0^\infty t^{p-1} \, \mu\Big(\{M_{\left(f-\frac{t}{2}\right)^+} > \frac{t}{2}\}\Big) \, dt \\
[t = 2s] &= p2^p \int_0^\infty s^{p-1} \, \mu\Big(\{M_{(f-s)^+} > s\}\Big) \, ds \\
(4.17) &\leq p2^p \int_0^\infty s^{p-1} \frac{K}{s} \int_{\{f>s\}} (f(x) - s) \, d\mu \, ds \\
&\leq Kp2^p \int_0^\infty s^{p-2} \int_X f(x) \chi_{\{f>s\}}(x) \, d\mu \, ds \\
(Tonelli) &\leq Kp2^p \int_X f(x) \int_0^\infty s^{p-2} \, \chi_{\{f>s\}}(x) \, ds \, d\mu \\
&\leq Kp2^p \int_X f(x) \int_0^{f(x)} s^{p-2} \, ds \, d\mu \\
&= K \, \frac{p}{p-1} \, 2^p \int_X f(x)^p \, d\mu \\
&= {C_p}^p \int_X f(x)^p \, d\mu,
\end{aligned}$$

dove la costante

$$C_p = 2 \sqrt[p]{\frac{Kp}{p-1}} = 2 \sqrt[p]{\frac{C_d^3 p}{p-1}}$$

dipende da p e C_d (la costante doubling di μ). Estraendo la radice p-esima abbiamo la tesi. □

4.3 Moduli di famiglie di curve

In questo paragrafo assumiamo che (X, d, μ) sia uno spazio metrico misurato. Sia $\mathfrak{M}$ la famiglia delle curve rettificabili non costanti. Può accadere che $\mathfrak{M} = \emptyset$, ma a noi interesseranno spazi metrici in cui $\mathfrak{M}$ sia abbastanza grande. Nel seguito analizzeremo delle proprietà valide per "quasi tutte" le curve; a tale proposito introduciamo una misura esterna su $\mathfrak{M}$ che renderà rigoroso la dicitura "per quasi ogni $\gamma \in \mathfrak{M}$".

Definizione 4.3.1. Dato $\Gamma \subset \mathfrak{M}$, sia $F(\Gamma)$ la famiglia di tutte le funzioni boreliane $\rho : X \to [0, \infty]$ tale che

$$\int_\gamma \rho \geq 1 \qquad\qquad \forall \, \gamma \in \Gamma.$$

Ora per ogni $1 \leq p < \infty$ definiamo

$$Mod_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in F(\Gamma)} \int_X \rho^p \, d\mu.$$

Il numero $Mod_p(\Gamma)$ è chiamato *p-modulo* della famiglia Γ.

Teorema 4.3.2. *Mod_p è una misura esterna su $\mathfrak{M}$, cioè*

1. *$Mod_p(\emptyset) = 0$,*
2. *Se $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, allora $Mod_p(\Gamma_1) \leq Mod_p(\Gamma_2)$,*
3. *$Mod_p(\cup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} Mod_p(\Gamma_i)$.*

Dimostrazione. 1. $Mod_p(\emptyset) = 0$ perché $\rho \equiv 0$ appartiene a $F(\emptyset)$.

2. Se $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ allora $F(\Gamma_2) \subset F(\Gamma_1)$ e quindi $Mod_p(\Gamma_1) \leq Mod_p(\Gamma_2)$.
3. Intanto si può supporre che per ogni indice i $Mod_p(\Gamma_i)$ sia finito, perché altrimenti la tesi sarebbe banale. Ora, scegliamo $\rho_i \in \Gamma_i$ tale che $\int_X \rho_i^p \, d\mu < Mod_p(\Gamma_i) + \varepsilon \, 2^{-i}$. Allora $\rho := (\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^p)^{\frac{1}{p}} \in F(\cup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i)$, e

$$\int_x \rho^p \, d\mu = \int_X \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i^p \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X \rho_i^p \, d\mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} Mod_p(\Gamma_i) + \varepsilon, \quad (4.25)$$

quindi la tesi.

□

Dal teorema 4.3.2(2) abbiamo visto che più è grande la famiglia, più è grande il modulo. Ma vale anche che più sono corte le curve, più il modulo cresce:

Lemma 4.3.3. *Siano $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathfrak{M}$. Se per ogni curva, $\gamma : [a, b] \to X$, $\gamma \in \Gamma_1$ esiste una curva $\gamma' : [c, d] \to X$, $\gamma' \in \Gamma_2$ tale che $[c, d] \subset [a, b]$ e $\gamma_{|[c,d]} \equiv \gamma'$, allora $Mod_p(\Gamma_1) \leq Mod_p(\Gamma_2)$.*

Dimostrazione. $F(\Gamma_2) \subset F(\Gamma_1)$ e quindi la tesi. □

Se una certa proprietà vale per ogni curva $\gamma \in \mathfrak{M}' \setminus \Gamma$ con $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$ e $Mod_p(\Gamma) = 0$ allora diciamo che la proprietà vale per *p-q.o. curva* in $\mathfrak{M}'$. Se $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$ diciamo che la proprietà vale per *p-q.o. curva*.
Negli spazi euclidei la nozione di p-q.o. curva è consistente con la nozione di "quasi tutte le curve parallele ad una direzione coordinata". Più in dettaglio:

Esempio 4.3.4. Sia $Q^n = [0,1]^n = [0,1] \times Q^{n-1}$ e sia $x = (x_1, x')$ un suo punto. Sia $1 \le p < \infty$. Dato $E \subset Q^{n-1}$, consideriamo la famiglia di curve passanti per E e parallele a x_1, cioè

$$\Gamma_E = \{\gamma_{x'} : [0,1] \to Q^n \mid \gamma_{x'}(t) = (t, x'),\ x' \in E\}.$$

Allora $Mod_p(\Gamma_E) = 0$ se e solo se $m_{n-1}(E) = 0$. Quindi in questo caso p-q.o. curva (parallela alla direzione x_1) corrisponde a q.o. rispetto alla misura di Lebesgue m_{n-1} (dove identifichiamo ogni segmento con la sua proiezione su $\{0\} \times Q^{n-1}$).

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $\rho \in F(\Gamma_E)$ per cui, grazie alla disuguaglianza di Hölder,

$$\begin{aligned} \varepsilon > \Big(\int_{Q^n} \rho^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} &\ge \Big(\int_E \int_0^1 \rho^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\ge m_{n-1}(E)^{-\frac{1}{p'}} \int_E \int_0^1 \rho(t, x') \, dt \, dx' \ge m_{n-1}(E), \end{aligned}$$

da cui $m_{n-1}(E) = 0$.
($\Longleftarrow$) Notiamo che $\rho = \chi_{[0,1]\times E} \in F(\Gamma_E)$; allora

$$Mod_p(\Gamma_E) \le \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p \, d\mu = m_n([0,1] \times E) = m_{n-1}(E) = 0.$$

□

Ora caratterizziamo le famiglie di curve Γ di p-modulo zero.

Teorema 4.3.5. *Sia $\Gamma \subset \mathfrak{M}$, allora $Mod_p(\Gamma) = 0$ se e solo se esiste una funzione boreliana non negativa $\rho \in L^p(X)$, tale che*

$$\int_\gamma \rho = +\infty \qquad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Per ipotesi, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una funzione $\rho_n \in F(\Gamma)$ tale che $\int_X \rho_n^p \, d\mu < 2^{-n}$. Allora la funzione $\rho := \big(\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \big)$ è la funzione cercata.
($\Longleftarrow$) Per ipotesi esiste una funzione boreliana positiva $\rho \in L^p(X)$ per cui $\int_\gamma \rho = \infty$ per ogni $\gamma \in \Gamma$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $\frac{\rho}{n}$ appartiene a $F(\Gamma)$, quindi $Mod_p(\Gamma) \le \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{\rho}{n} \right\|_{L^p} = 0$. □

Corollario 4.3.6. *Data una funzione boreliana non negativa $g \in L^p(X)$, con $1 \le p < \infty$, si ha $\int_\gamma g < \infty$ per p-q.o. $\gamma \in \mathfrak{M}$.*

Questo teorema sarà utile nel seguito:

Teorema 4.3.7. *Siano* $u_k : X \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *funzioni boreliane, tali che* $u_k \to u$ *in* $L^p(X)$. *Allora esiste una sottosuccessione* $(u_{k_j})_j$ *per cui*

$$\int_\gamma |u_{k_j} - u| \to 0 \qquad \text{per } j \to \infty,$$

per p-q.o. curva $\gamma \in \mathfrak{M}$.

Dimostrazione. Sia $(u_{k_j})_j$ una sottosuccessione tale che

$$\int_X |u_{k_j} - u|^p \, d\mu < 2^{-pj-j}. \tag{4.26}$$

Sia ora $\Gamma \subset \mathfrak{M}$ tale che, per ogni $\gamma \in \Gamma$, $\int_\gamma |u_{k_j} - u|$ non converga a 0; vogliamo provare che $Mod_p(\Gamma) = 0$. Denotiamo con $\Gamma_j \subset \mathfrak{M}$ la famiglia di curve per cui $\int_\gamma |u_{k_j} - u| > 2^{-j}$ per ogni $\gamma \in \Gamma_j$. Notiamo che $2^j|u_{k_j} - u| \in F(\Gamma_j)$ e quindi per quanto supposto su $(u_{k_j})_j$ abbiamo $Mod_p(\Gamma_j) < 2^{-j}$. Poiché $\Gamma \subset \cup_{j=i}^{\infty}\Gamma_j$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, allora $Mod_p(\Gamma) < 2^{-i+1}$ per ogni i, per cui $Mod_p(\Gamma) = 0$ e dunque la tesi. □

4.4 Gradiente superiore

Vogliamo generalizzare il concetto di gradiente superiore introdotto da B. Levi nel 1901 in $\mathbb{R}^2$ (utilizzando solo linee orizzontali e verticali) e generalizzato a $\mathbb{R}^n$ da B. Fuglede nel 1957 [14]. Tale generalizzazione in spazi metrici è stata ottenuta da Heinonen e Koskela nel 1998 [24].

Definizione 4.4.1. Sia $u : X \to \mathbb{R}$ una funzione boreliana. Diciamo che una funzione $g : X \to [0, \infty]$ è un *gradiente superiore di* u, se

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_\gamma g \tag{4.27}$$

per ogni curva rettificabile γ che congiunge i punti $x, y \in X$. Diciamo invece che g è un gradiente superiore p-debole se la condizione (4.27) vale per p-q.o. curva $\gamma \in \mathfrak{M}$.

Osservazione 4.4.2. Se g è un gradiente superiore di u e f è una funzione boreliana per cui $f = g$ μ-q.o., allora non è detto che f sia un gradiente superiore di u.

Esempio 4.4.3. Sia (X, d, μ) la palla $B(0, 2) \subset \mathbb{R}^2$ con la distanza euclidea e la misura di Lebesgue ristretta alla palla. Consideriamo $u(x) = \|x\|$, allora $g = 1$ è un gradiente superiore: infatti

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq l(\gamma) = \int_\gamma 1,$$

per ogni curva che collega $x, y \in X$. Sia invece f definita da

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x = (x_1, x_2) \in X \setminus \{x_1 = x_2\}) \\ 0 & \text{se } x \in \{x_1 = x_2\} \ . \end{cases}$$

Se consideriamo la curva $\gamma : [0, 1] \to X$ definita da $\gamma(t) = (tx_1, tx_2)$, allora abbiamo $|\|(1, 1)\| - \|(0, 0)\|| = \sqrt{2} > 0 = \int_\gamma f$. Quindi f non è un gradiente superiore.

Sotto questo punto di vista il gradiente superiore p-debole è più flessibile:

Lemma 4.4.4. *Sia $u : X \to \mathbb{R}$ una funzione boreliana, g un gradiente superiore p-debole di u e f un altra funzione boreliana non negativa tale che $f = g$ μ-q.o.. Allora anche f è un gradiente superiore p-debole di u.*

Dimostrazione. Consideriamo la successione costante $f_n = f$. Per ipotesi abbiamo che $|f_n - g| \to 0$ in $L^p(X)$, quindi per il teorema 4.3.7 $\int_\gamma |f - g| \, d\mu = 0$ p-q.o. su $\mathfrak{M}$. Allora per ogni $x, y \in X$ abbiamo

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_\gamma g \leq \int_\gamma f + \int_\gamma |f - g| \leq \int_\gamma f,$$

sulle curve in $\mathfrak{M}$ che congiungono x e y; quindi f è gradiente superiore p-debole e vale la convergenza del teorema 4.3.7, quindi per p-q.o. curva. $\square$

Il prossimo risultato mostra che il gradiente superiore p-debole può essere approssimato da gradienti superiori.

Lemma 4.4.5. *Sia $u : X \to \mathbb{R}$ una funzione boreliana finita q.o.. Se g è un gradiente superiore p-debole di u, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un gradiente superiore g_ε di u tale che*

$$g_\varepsilon(x) \geq g(x) \quad \forall\, x \in X \qquad e \qquad \|g_\varepsilon - g\|_{L^p} < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Sia $\Gamma \subset \mathfrak{M}$ la famiglie di curve $\gamma : [a, b] \to X$ per cui non vale la disuguaglianza

$$|u(\gamma(b)) - u(\gamma(a))| \leq \int_\gamma g.$$

Allora per definizione $Mod_p(\Gamma) = 0$, quindi per il teorema 4.3.5 esiste una funzione boreliana positiva $\rho \in L^p(X)$ tale che $\int_\gamma \rho = \infty$ per ogni curva $\gamma \in \mathfrak{M}$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ considerando le funzioni $g_\varepsilon = g + \varepsilon \frac{\rho}{\|\rho\|_{L^p}}$, abbiamo la tesi. $\square$

Il risultato seguente mostra come il gradiente superiore di u sia proprio la generalizzazione di $|\nabla u|$.

Proposizione 4.4.6. *Se $u \in C^\infty(\Omega)$ con Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, allora $|\nabla u|$ è un gradiente superiore di u. Questo gradiente è il più piccolo, nel senso che se $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ è un altro gradiente superiore di u allora $g \geq |\nabla u|$ q.o..*

Dimostrazione. Siano $x, y \in X$ e $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva rettificabile, parametrizzata secondo la lunghezza d'arco, che connette x e y. Allora ricordando che $|\dot\gamma|(t) \equiv 1$ per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz abbiamo

$$|u(x) - u(y)| = \Big| \int_a^b \frac{d}{dt} u(\gamma(t))\, dt \Big| \leq \int_a^b |\nabla u(\gamma(t))|\, dt = \int_\gamma |\nabla u|.$$

Sia ora $\nu \in S^{n-1}$ una direzione in $\mathbb{R}^n$. Consideriamo tutte le curve definite su un compatto tale che $\dot\gamma = \nu$, cioè tutti i segmenti orientati paralleli a ν parametrizzati secondo lunghezza d'arco. Sia $g \in L^p(\Omega)$ un gradiente superiore di u: allora, per il corollario 4.3.6 g ristretto a q.o. segmento risulta integrabile. Siano x e y estremi di un tale segmento $\gamma(t) = x + t\, r$ con $r = |x - y|$. Allora dalla definizione di gradiente superiore

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_\gamma g = \int_0^r g(\gamma(t))\, dt.$$

Dividendo per r e facendo il limite per $r \to 0$, per il teorema 4.2.14 abbiamo

$$g(x) = \lim_{r \to 0} \fint_0^r g(\gamma(t))\, dt \geq \lim_{r \to 0} \frac{|u(x) - u(x + r\nu)|}{r} = |\nabla u(x) \cdot \nu|, \qquad (4.28)$$

per ogni x punto di Lebesgue di u che rispetta le condizioni precedenti, quindi per q.o. $x \in \Omega$. Allora se $\{\nu_n\}$ è un sottoinsieme denso di S^{n-1} abbiamo che, per tutte le direzioni ν_n, la (4.28) vale q.o. (l'insieme di misura nulla su cui non vale è unione degli insiemi di misura nulla associati alle direzioni ν_n). Allora per q.o. $x \in \Omega$, considerando una sottosuccessione di $\{\nu_n\}$ che tende a $\frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}$, per la continuità del prodotto scalare abbiamo $g(x) \geq |\nabla u(x)|$. $\square$

Osservazione 4.4.7. La proposizione 4.4.6 non è più vera senza l'ipotesi $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Infatti sia $u(x) = x$ su $[0, 1]$, sia $E \subset [0, 1]$ un insieme di tipo Cantor con misura di Lebesgue positiva. Allora la funzione $g = \infty \cdot \chi_E$ è un gradiente superiore per u, ma non è vero che $g \geq |u'|$ q.o..

È naturale chiedersi se esista una costruzione canonica per un gradiente superiore di una funzione u in spazi metrici. Sia u un'arbitraria funzione Lipschitziana su uno spazio metrico e definiamo:

$$|\nabla^+ u|(x) := \limsup_{y \neq x,\, y \to x} \frac{|u(y) - u(x)|}{d(x,y)}.$$

Allora $|\nabla^+ u|$ è un gradiente superiore. Ma si può dire di più:

Definizione 4.4.8. Sia $u : X \to \mathbb{R}$. Definiamo la *costante di Lipschitz superiore* e *inferiore* in un punto $x \in X$ come

$$Lip\, u(x) = \limsup_{r \to 0} \frac{L(x,u,r)}{r}, \qquad lip\, u(x) = \liminf_{r \to 0} \frac{L(x,u,r)}{r},$$

dove

$$L(x,u,r) = \sup\{|u(y) - u(x)| \,:\, d(x,y) \leq r\} \quad per \;\; r > 0.$$

Chiaramente $lip(u) \leq Lip(u) = |\nabla^+ u|(x)$ e si mostra facilmente che se u è Lipschitziana $Lip(u)$ e $lip(u)$ sono funzioni boreliane.

Lemma 4.4.9. *Se $u : X \to \mathbb{R}$ è una funzione Lipschitziana, allora $Lip(u)$ e $lip(u)$ sono gradienti superiori di u.*

Dimostrazione. Sia $\gamma : [a,b] \to X$ una curva rettificabile, parametrizzata per lunghezza d'arco, che congiunge x e y. La funzione $u \circ \gamma$ è Lipschitziana (perché composizione di due funzioni Lipschitziane) e quindi differenziabile q.o.; allora vale $|(u \circ \gamma)'(t)| \leq lip\, u(t)$, infatti

$$\begin{aligned}
|(u \circ \gamma)'(t)| &= \Big| \lim_{h \to 0} \frac{u \circ \gamma(t+h) - u \circ \gamma(t)}{h} \Big| = \Big| \liminf_{h \to 0} \frac{u \circ \gamma(t+h) - u \circ \gamma(t)}{h} \Big| \\
&\leq \liminf_{h \to 0} \frac{\sup\{|u(\gamma(t+k)) - u(\gamma(t))| \;:\; d(\gamma(t+k), \gamma(t)) \leq h\}}{h} \\
&= lip\, u(t),
\end{aligned}$$

per cui vale

$$|u(x) - u(y)| = \Big| \int_a^b \frac{d}{dt} u(\gamma(t))\, dt \Big| \leq \int_a^b lip\, u(t)\, dt$$

e quindi la tesi. □

Osservazione 4.4.10. Se u è solamente continua $lip(u)$ non è un gradiente superiore. Un controesempio è u la funzione di Cantor (vedi esempio 2.4.20), infatti $u' = 0$ q.o. e quindi $lip(u) = 0$ non è un gradiente superiore.

4.5 Spazi di Sobolev metrici

Definizione 4.5.1. Siano (X, d_X) e (F, d_F) spazi metrici, e sia μ una misura di Borel non negativa, finita sugli insiemi limitati.

Per $p \in [1, +\infty]$, definiamo $W^{1,p}_m(X, \mu, F)$ come lo spazio di tutte le funzioni $u : X \to F$ tali che esistono $g \in L^p(X)$, $g \geq 0$ e $N \subset X$ (dipendenti da u) con $\mu(N) = 0$ e

$$d_F\big(u(x), u(y)\big) \leq d_X\big(x, y\big)\big(g(x) + g(y)\big) \qquad \forall x, y \in X \setminus N. \tag{4.29}$$

Tale g (in generale) non è unica; definiamo allora $M(u)$ come l'insieme delle $g \in L^p(X)$ per cui vale la definizione, a meno di un insieme N di misura nulla dipendente da g. Come di consueto identifichiamo due funzioni $u, v \in W^{1,p}_m(X, \mu, F)$ se $u = v$ μ-q.o. su X.

Osservazione 4.5.2. A noi interesserà essenzialmente il caso $F = \mathbb{R}$.

Si può provare che l'insieme $M(u)$ è convesso e chiuso in $L^p(X)$ e che se $p \in (1, +\infty)$ esiste un unico elemento in $M(u)$ con norma minimale (perché $L^p(X)$ è uniformemente e strettamente convesso).

La definizione 4.5.1, introdotta da Hajlasz nel 1996 in [19] (nel caso $F = \mathbb{R}$), è motivata dal seguente risultato:

Teorema 4.5.3. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio di estensione (vedi 3.4.4) e $p > 1$. Allora $u \in W^{1,p}(\Omega)$, lo spazio di Sobolev classico, se e solo se esiste una funzione $g \in L^p(\Omega)$ e un insieme N di misura nulla tali che vale*

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|(g(x) + g(y)) \qquad \forall\, x, y \in \Omega \setminus N.$$

Consideriamo ora uno spazio metrico (X, d_X) e una misura di Borel positiva tali che $\mathrm{diam}(X) < \infty$ e $\mu(X) < \infty$. Per $p > 1$ dotiamo $W^{1,p}_m(X, \mu)$ della seguente norma

$$\|u\|_{W^{1,p}_m} := \|u\|_{L^p} + \inf_{g \in M(u)} \|g\|_{L^p}. \tag{4.30}$$

Osservazione 4.5.4. Si verifica facilmente che $\|u\|_{W^{1,p}_m}$ è effettivamente una norma, in quanto somma di una norma e di una seminorma.

Questa è una generalizzazione della norma classica degli spazi di Sobolev; nel nostro caso, mancando una struttura differenziale, la norma del gradiente è rimpiazzata da un opportuno estremo inferiore.

Adesso mostriamo che, come nel caso classico lo spazio $\big(W^{1,p}_m(X, \mu), \|\cdot\|_{W^{1,p}_m}\big)$ è di Banach.

Teorema 4.5.5. *Se $p \geq 1$ lo spazio $\big(W^{1,p}_m(X, \mu), \|\cdot\|_{W^{1,p}_m}\big)$ è di Banach.*

Dimostrazione. Sia $(f_n)_n$ una successione di Cauchy in $W^{1,p}_m(X,\mu)$. Dalla definizione di $\|\cdot\|_{W^{1,p}_m}$ esiste una $f \in L^p$ tale che $(f_n)_n$ converge in L^p ad f. Proviamo che $f \in W^{1,p}_m$ e che la convergenza è in $W^{1,p}_m$. Sia $(f_{n_i})_i$ una sottosuccessione che converge puntualmente a f tale che $\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_{W^{1,p}_m} < 2^{-i}$, allora per ogni i esiste una $g_i \in L^p$ per cui vale

$$\left|\left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)(x) - \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)(y)\right| \leq d_X(x,y)\left(g_i(x) + g_i(y)\right),$$

e $\|g_i\|_{L^p} < 2^{-i}$. Se $h := \sum_{i=1}^{\infty} g_i$ abbiamo $\|h\|_{L^p} < 1$.
Segue che se $j > i$ abbiamo

$$\begin{aligned}\left|\left(f_{n_j} - f_{n_i}\right)(x) - \left(f_{n_j} - f_{n_i}\right)(y)\right| &\leq d_X(x,y)\left(\sum_{n=i}^{j-1} g_n(x) + \sum_{n=i}^{j-1} g_n(y)\right)\\ &\leq d_X(x,y)\left(h(x) + h(y)\right).\end{aligned}$$

Passando al limite per $j \to \infty$ segue che

$$\left|\left(f - f_{n_i}\right)(x) - \left(f - f_{n_i}\right)(y)\right| \leq d_X(x,y)\left(h(x) + h(y)\right),$$

da cui troviamo la convergenza in $W^{1,p}$. Inoltre

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq \left|\left(f - f_{n_i}\right)(x) - \left(f - f_{n_i}\right)(y)\right| + |f_{n_i}(x) - f_{n_i}(y)|\\ &\leq d_X(x,y)\left(h(x) + h(y) + \bar{g}_i(x) + \bar{g}_i(y)\right)\end{aligned}$$

ove $\bar{g}_i \in M(f_{n_i})$. Dunque $f \in W^{1,p}_m(X,\mu)$.

□

Vale inoltre un teorema di densità delle funzioni Lipschitziane in $W^{1,p}(X,d,\mu)$.

Teorema 4.5.6. *Se $u \in W^{1,p}(X,d,\mu)$ con $1 < p < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione Lipschtziana h tale che*

1. $\mu(\{x \mid u(x) \neq h(x)\}) < \varepsilon$,

2. $\|u - h\|_{W^{1,p}} < \varepsilon$.

Dimostrazione. Sia $E_\lambda = \{x \in X \ : \ |u(x)| \leq \lambda, |g(x)| \leq \lambda\}$ dove g è l'elemento di minima norma in $M(u)$ (vedi la definizione 4.5.1). Essendo $u, g \in L^p(X)$ allora $\lambda^p \mu(X \setminus E_\lambda) \to 0$ per $\lambda \to \infty$. Poiché $u \in W^{1,p}_m$ abbiamo che $u_{|E_\lambda}$ è Lipschitziana con costante di Lipschitz 2λ. Possiamo estendere $u_{|E_\lambda}$ ad una funzione $\bar{u}$ su X con la stessa costante (1.2.17). Ora possiamo modificare questa estensione nel seguente modo:

$$u_\lambda = (\mathrm{sgn}\bar{u})\min(|\bar{u}|, \lambda).$$

Ovviamente u_λ è Lipschitziana di costante 2λ, $u_{\lambda|E_\lambda} = u_{|E_\lambda}$ e $|u_\lambda| \le \lambda$. Inoltre

$$\mu(\{x \ : \ u(x) \neq u_\lambda(x)\}) \le \mu(X \setminus E_\lambda) \to 0 \qquad \text{per } \lambda \to \infty.$$

Per avere la tesi basta provare che $u_\lambda \to u$ per $\lambda \to \infty$ in $W^{1,p}_m$. Intanto $u_\lambda \to u$ in L^p, infatti

$$\begin{aligned}\|u - u_\lambda\|^p_{L^p} &= \int_{X\setminus E_\lambda} |u - u_\lambda|^p \, d\mu \\ &\le C\Big(\int_{X\setminus E_\lambda} |u|^p \, d\mu + \lambda^p \, \mu(X \setminus E_\lambda)\Big) \to 0 \qquad \text{per } \lambda \to \infty.\end{aligned}$$

Ora stimiamo la norma della funzione

$$g_\lambda(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in E_\lambda \\ g(x) + 3\lambda & \text{se } x \in X \setminus E_\lambda \ . \end{cases}$$

Vogliamo provare che $g_\lambda \in M(u - u_\lambda)$, ossia che

$$|(u - u_\lambda)(x) - (u - u_\lambda)(y)| \le d(x, y)(g_\lambda(x) + g_\lambda(y)) \tag{4.31}$$

a meno di un insieme di misura nulla. La disuguaglianza è ovvia per ogni $x, y \in E_\lambda \setminus N$ (dove N è l'insieme di misura nulla fornito dalla definizione di u). Fissato λ, se $x, y \in X \setminus E_\lambda$ abbiamo

$$\begin{aligned}|(u - u_\lambda)(x) - (u - u_\lambda)(y)| &\le |u(x) - u(y)| + |u_\lambda(x) - u_\lambda(y)| \\ &\le d(x, y)(g(x) + g(y) + 2\lambda) \\ &\le d(x, y)(g_\lambda(x) + g_\lambda(y)),\end{aligned}$$

per ogni $x, y \in X \setminus (E_\lambda \cup N)$. Se invece $x \in E_\lambda$ e $y \in X \setminus E_\lambda$ abbiamo

$$\begin{aligned}|(u - u_\lambda)(x) - (u - u_\lambda)(y)| &\le |u(y) - u(x)| + |u_\lambda(x) - u_\lambda(y)| \\ &\le d(x, y)(g(x) + g(y) + 2\lambda) \\ &\le d(x, y)(g(y) + 3\lambda) \\ &\le d(x, y)(g_\lambda(x) + g_\lambda(y)),\end{aligned}$$

per ogni $x \in E_\lambda \setminus N$ e $y \in X \setminus (E_\lambda \cup N)$; allora (4.31) vale per ogni $x, y \in X \setminus N$. Ora dato che $\|g_\lambda\|_{L^p} \to 0$ per $\lambda \to \infty$ abbiamo la tesi. □

4.6 Disuguaglianza di Poincaré

In questo paragrafo presentiamo una generalizzazione della classica disuguaglianza di Poincaré e nel caso in cui la misura μ sia doubling vediamo la relazione tra tale disuguaglianza e gli spazi di Sobolev appena definiti.

Definizione 4.6.1. Sia (X, d, μ) uno spazio metrico misurato. Diciamo che X supporta una *disuguaglianza debole* $(1,p)$*-Poincaré* con $0 < p < \infty$, se esistono delle costanti $C_p > 0$, $\tau \geq 1$ tali che per ogni palla $B = B(x,r)$, per ogni funzione Lipschitziana u e per ogni g gradiente superiore p-debole di u vale

$$\fint_B |u - u_B| \, d\mu \leq C_p \, r \left(\fint_{\tau B} g^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.32}$$

dove $u_B = \fint_B u \, d\mu = \mu(B)^{-1} \int_B u \, d\mu$. La disuguaglianza è detta $(1,p)$-*Poincaré* se $\tau = 1$.

Vale il seguente risultato (che riformuleremo nel seguito per funzioni BV).

Teorema 4.6.2. *Sia X uno spazio doubling. Supponiamo che la coppia (u, g) soddisfi una disuguaglianza $(1,p)$-Poincaré debole con $p > 0$, allora*

$$|u(x) - u(y)| \leq C \, d(x,y) \Big(\big(M_{2\sigma d(x,y)} g^p(x) \big)^{\frac{1}{p}} + \big(M_{2\sigma d(x,y)} g^p(y) \big)^{\frac{1}{p}} \Big) \tag{4.33}$$

per quasi ogni $x, y \in X$, dove $M_R v(x)$ è l'operatore massimale di Hardy-Littlewood ristretto (vedi (4.19)).

Dimostrazione. Siano $x, y \in X$ punti di Lebesgue di u (per il teorema di Lebesgue 4.2.14 possiamo ripetere il ragionamento per q.o. punto in X). Poniamo $B_i(x) = B(x, r_i) = B(x, 2^{-i} d(x,y))$ con $i \in \mathbb{N}$. Allora per il teorema di Lebesgue $u_{B_i(x)} \to u(x)$ per $i \to \infty$. Utilizzando la disuguaglianza triangolare, la proprietà doubling di μ e la disuguaglianza debole $(1,p)$-Poincaré otteniamo

$$\begin{aligned}
|u(x) - u_{B_0(x)}| &\leq \sum_{i=0}^{\infty} |u_{B_{i+1}(x)} - u_{B_i(x)}| \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \fint_{B_{i+1}(x)} |u(x) - u_{B_i(x)}| \, d\mu \\
&\leq C_d \sum_{i=0}^{\infty} \fint_{B_i(x)} |u(x) - u_{B_i(x)}| \, d\mu \\
&\leq C \sum_{i=0}^{\infty} r_i \left(\fint_{\tau B_i(x)} g^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C \sum_{i=0}^{\infty} r_i \big(M_{\tau d(x,y)} g^p(x) \big)^{\frac{1}{p}} \\
&= C \, d(x,y) \, \big(M_{\tau d(x,y)} g^p(x) \big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Similmente
$$|u(x) - u_{B_0(x)}| \le C\, d(x,y) \left(M_{\tau\, d(x,y)} g^p(y)\right)^{\frac{1}{p}}.$$
Inoltre ricordando il teorema 4.16

$$\begin{aligned}
|u_{B_0(x)} - u_{B_0(y)}| &\le |u_{B_0(x)} - u_{2B_0(x)}| + |u_{B_0(y)} - u_{2B_0(x)}| \\
&\le \fint_{B_0(x)} |u - u_{2B_0(x)}|\, dm + \fint_{B_0(y)} |u - u_{2B_0(x)}|\, dm \\
&\le c_d \fint_{2B_0(x)} |u - u_{2B_0(x)}|\, dm + \frac{2^s}{C'^2} \fint_{2B_0(x)} |u - u_{2B_0(x)}|\, dm \\
&\le C\, d(x,y) \Big(\fint_{2\tau\, B_0(x)} g^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C\, d(x,y) \big(M_{2\tau\, d(x,y)} g^p(x) \big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Osservando che $M_r v(x) \le M_R v(x)$ se $r \le R$, dalle tre disuguaglianze concludiamo. □

Teorema 4.6.3. *Sia X uno spazio doubling. Se $1 < p < \infty$, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *$u \in W^{1,p}_m(X, d, \mu)$;*
2. *$u \in L^p(X, \mu)$ e esistono $C > 0$, $\sigma \ge 1$, e una funzione positiva $g \in L^q(X)$ con $0 < q < p$ per cui vale la disuguaglianza di Poincaré*
$$\fint_B |u - u_B|\, d\mu \le C\, r \left(\fint_{\sigma B} g^q\, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.34}$$
per ogni palla B di raggio r.

Dimostrazione. ($1 \Longrightarrow 2$) Integrando ambo i membri della disuguaglianza (4.29) su una palla B rispetto ad x e a y troviamo

$$\begin{aligned}
\int_B |u(y) - u_B| d\mu_y &= \fint_B |\fint_B (u(x) - u(y))\, d\mu_x|\, d\mu_y \\
&\le \fint_B \fint_B |u(x) - u(y)|\, d\mu_x\, d\mu_y \\
&\le \fint_B \fint_B C' d(x,y)\, (g(x) + g(y))\, d\mu_y\, d\mu_y \\
&\le C\, r \fint_B g\, d\mu
\end{aligned}$$

da cui la tesi $q = 1$.
($2 \implies 1$) Siano $u, g \in L^p(X)$ per cui valga (4.34), allora per il teorema 4.6.2, vale (4.33) con q al posto di p. Notiamo che $\left(M_{2\sigma d(x,y)} g^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(M g^q\right)^{\frac{1}{q}}$. Concludiamo allora grazie al teorema 4.2.19: poiché $g^q \in L^{\frac{p}{q}}$ con $\frac{p}{q} > 1$ segue che $M g^q \in L^{\frac{p}{q}}$, da cui $\left(M g^q\right)^{\frac{1}{q}} \in L^p$ e quindi la tesi. $\square$

Capitolo 5

Funzioni BV in spazi metrici

In questo capitolo definiremo le funzioni BV in spazi metrici, mostreremo che la variazione totale è la restrizione sugli aperti dello spazio di un'opportuna misura finita positiva e proveremo una caratterizzazione puntuale.

5.1 Definizione di BV e alcune proprietà

Sia (X, d, μ) uno spazio metrico misurato, con μ una misura doubling.

Richiamiamo alcune importanti proprietà degli spazi doubling (vedi l'appendice B di [18]):

Proposizione 5.1.1 (Partizione dell'unità). *Sia $t > 0$ un valore fissato; allora esiste $A_t \subset X$ tale che*

- $d(a_1, a_2) \geq t$ *per ogni* $a_1, a_2 \in A_t$ *con* $a_1 \neq a_2$;
- $X \subset \bigcup_{a \in A_t} B_a$, *dove* $B_a = B(a, t)$.

Inoltre, per ogni $k > 0$ esiste una costante $\beta(k)$ dipendente solo da k e da C_d, la costante doubling di μ, per cui

- $\sum_{a \in A_t} \chi_{k\,B_a}(x) \leq \beta(k)$ *per ogni* $x \in X$.

In aggiunta, possiamo trovare una famiglia $\{\varphi_a^{(t)}\}_{a \in A_t}$ di funzioni Lipschitziane su X a valori reali tali che

- $0 \leq \varphi_a^{(t)} \leq \chi_{2\,B_a}$;
- *le funzioni $\varphi_a^{(t)}$ hanno costanti di Lipschitz maggirate da $\frac{\Lambda}{t}$, con Λ una costante positiva dipendente solo da C_d;*

- $\sum_{a\in A_t} \varphi_a^{(t)}(x) \equiv 1$ *per ogni* $x \in X$.

Prima di dare la definizione di funzione BV ci serve un risultato di densità.

Teorema 5.1.2. *Sia (X, d, μ) uno spazio metrico σ-compatto, misurato; allora $Lip_{loc}(X) \subset L^1_{loc}(X)$ è denso rispetto alla convergenza L^1_{loc}.*

Dimostrazione. Sia K un insieme compatto. É noto che le funzioni semplici sono dense in $L^1(K)$, mentre con il lemma di Urysohn possiamo approssimare le funzioni caratteristiche con funzioni continue. Ora poiché le funzioni lipschitziane su K (più in generale le funzioni Lipschitziane limitate) sono un'algebra che contiene le costanti e che separa i punti, per il teorema di Stone-Weierstrass possiamo approssimare le funzioni continue con funzioni Lipschitziane. Allora ho che $\mathrm{Lip}(K)$ è denso in $L^1(K)$.

Se lo spazio è σ-compatto prendendo un'esaustione in compatti e con un procedimento diagonale si ottiene la tesi. □

Osservazione 5.1.3. Se lo spazio (X, d, μ) è anche completo allora è anche σ-compatto e dunque il teorema 5.1.2.

D'ora in avanti X sarà uno spazio metrico completo, misurato con μ una misura doubling.

Ora sfruttando la densità delle funzioni localmente Lipschitziane in quelle localmente integrabili definiamo le funzioni a variazione limitata:

Definizione 5.1.4. Sia $\Omega \subset X$ un insieme aperto; data $u \in L^1_{loc}(X)$, definiamo la *variazione totale di u su un aperto $A \subset \Omega$* come

$$\|Du\|(A) = \inf \left\{ \liminf_{i\to\infty} \int_A \mathrm{lip}\, u_i \, d\mu \ : \ (u_i)_i \subset \mathrm{Lip}_{loc}(X),\ u_i \xrightarrow{L^1_{loc}} u \right\}. \quad (5.1)$$

Diciamo che una funzione u è *localmente a variazione limitata su* Ω se $\|Du\|(A) < \infty$ per ogni aperto $A \Subset \Omega$. Diciamo che una funzione u è a *variazione limitata su* Ω se $\|Du\|(\Omega) < \infty$. Denotiamo gli spazi vettoriali delle funzioni (localmente) a variazione limitata con $BV(\Omega)$ ($BV_{loc}(\Omega)$).

Osservazione 5.1.5. Con un argomento diagonale si trova una successione $(u_i)_i \subset \mathrm{Lip}_{loc}(X)$ tale che

$$u_i \xrightarrow{L^1_{loc}} u \qquad \text{e} \qquad \|Du\|(A) = \lim_{i\to\infty} \int_A \mathrm{lip}\, u_i \, d\mu. \quad (5.2)$$

Proposizione 5.1.6. *Siano $u, v \in L^1_{loc}(X, \mu)$; per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni A e B aperti di X abbiamo*

1. $\|D(\alpha u)\|(A) = |\alpha|\|Du\|(A)$;

2. $\|D(u+v)\|(A) \leq \|Du\|(A) + \|Dv\|(A)$;

3. $\|Du\|(A \cup B) \geq \|Du\|(A) + \|Du\|(B)$ *se* $A \cap B = \emptyset$;

4. $\|Du\|(A \cup B) = \|Du\|(A) + \|Du\|(B)$ *se* $d(A, B) > 0$.

Dimostrazione. I primi tre punti si verificano facilmente usando la definizione di variazione totale o grazie all'osservazione 5.1.5. Per il punto 4 è sufficiente considerare due successioni $(u_i) \subset \mathrm{Lip}_{loc}(A)$ e $(v_i) \subset \mathrm{Lip}_{loc}(B)$, convergenti a u rispettivamente in $L^1_{loc}(A)$ e $L^1_{loc}(B)$, per le quali valga la (5.2). Allora definiamo

$$w_i := \begin{cases} u_i(x) & \text{su } A \\ v_i(x) & \text{su } B \ ; \end{cases}$$

w_i converge ad u in $L^1_{loc}(A \cup B)$ e, sfruttando il fatto che A e B hanno distanza maggiore di 0, abbiamo

$$\|D(u)\|(A \cup B) \leq \liminf_{i \to \infty} \int_{A \cup B} \mathrm{lip}\, w_i \, d\mu = \|Du\|(A) + \|Du\|(B).$$

Allora grazie al punto 3 abbiamo la tesi. □

Ci proponiamo di provare che $\|Du\|$ definisce una misura, ma nel caso metrico non è possibile usare, come nel caso euclideo, il teorema di rappresentazione di Riesz. Utilizziamo un altro approccio:

Lemma 5.1.7. *Siano M, N aperti di X, allora:*

1. *Se N è limitato e $\partial N \cap \partial M = \emptyset$, allora esistono degli aperti $H \Subset M \cap N$, $C_1, C_2 \subset M \cup N$ e una costante $c = c(M, N)$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $u \in Lip(M)$ e $v \in Lip(N)$, è possibile trovare una funzione $w \in Lip(M \cup N)$ tale che*

$$\int_{M \cup N} \mathrm{lip}\, w \, d\mu \leq \int_M \mathrm{lip}\, u \, d\mu + \int_N \mathrm{lip}\, v \, d\mu + c(M, N) \int_H |u - v| \, d\mu + \varepsilon; \tag{5.3}$$

$$w \equiv u \text{ su } M \setminus N, \qquad w \equiv v \text{ su } N \setminus M; \tag{5.4}$$

$$\int_K |w - \sigma| \, d\mu \leq \int_{K_1} |u - \sigma| \, d\mu + \int_{K_2} |v - \sigma| \, d\mu, \tag{5.5}$$

per ogni $\sigma \in L^1_{loc}(M \cup N, \mu)$, dove $K \Subset M \cup N$ e $K_1 = K \cap C_1 \Subset M$, $K_2 = K \cap C_2 \Subset N$.

2. *Se $M' \Subset M$ e $N' \Subset N$, allora esiste un aperto $H \Subset M \cap N$ e una costante $c > 0$ dipendente solo da M, N, M' e N' tale che per ogni $\varepsilon > 0$ e $u \in Lip(M)$, $v \in Lip(N)$ è possibile trovare $w \in Lip(M \cup N)$ per cui valga*
$$\int_{M' \cup N'} \operatorname{lip} w \, d\mu \leq \int_M \operatorname{lip} u \, d\mu + \int_N \operatorname{lip} v \, d\mu + c \int_H \|u - v\| \, d\mu + \varepsilon. \tag{5.6}$$

Dimostrazione. 1. Per ipotesi $\partial N \cap \partial M = \emptyset$ dunque $\overline{N \setminus M}$ e $\overline{M \setminus N}$ sono disgiunti; dunque è possibile trovare una funzione $\psi \in \mathrm{Lip(M \cup N)}$ tale che $0 \leq \psi \leq 1$ e
$$\psi \equiv \begin{cases} 1 & \text{su un intorno di } \overline{N \setminus M} \\ 0 & \text{su un intorno di } \overline{M \setminus N}. \end{cases}$$

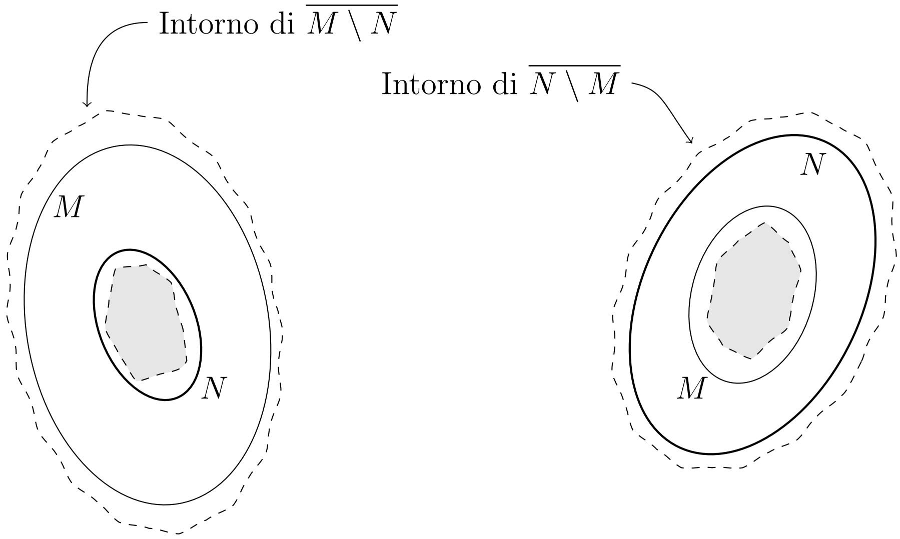

Figura 5.1: M e N nel caso esemplificativo in cui abbaino due componenti connesse, e gli intorni di $\overline{M \setminus N}$ e $\overline{N \setminus M}$.

Definiamo
$$C_1 = \{\psi < 1\} \cap (M \cup N), \quad C_2 = \{\psi > 0\} \cap (M \cup N), \quad H = C_1 \cap C_2 \Subset M \cap N;$$
la parte, in figura 5.1, evidenziata con corrisponde a $C_1 \cap C_2$.

Fissato un numero reale, $\varepsilon > 0$, possiamo sempre trovare un $k \in \mathbb{N}$ tale che
$$\int_H (\operatorname{lip} u + \operatorname{lip} v) \, d\mu \leq k\varepsilon.$$

Sia $\eta = d(\partial N, \partial M) > 0$ e definiamo

$$H_i = \left\{ x \in H \,:\, \frac{k+i-1}{3k}\eta < d(x, \partial N) < \frac{k+i}{3k}\eta \right\}, \qquad i = 1, \dots, k.$$

Possiamo trovare una funzione $\varphi_i \in \mathrm{Lip}(M \cup N)$ tale che $0 \leq \varphi_i \leq 1$, $\|\mathrm{lip}\,\varphi_i\|_\infty \leq \frac{4k}{\eta}$ e (vedi la figura 5.2)

$$\varphi_i(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \overline{M \setminus N} \\ 1 & \text{se } d(x, \partial N) \leq \frac{k+i-1}{3k}\eta \,\mathrm{e}\, x \in (N \setminus \overline{M})^c \\ 0 & \text{se } d(x, \partial N) \geq \frac{k+i}{3k}\eta \,\mathrm{e}\, x \in (M \setminus \overline{N})^c. \\ 0 & \text{se } x \in \overline{N \setminus M}. \end{cases}$$

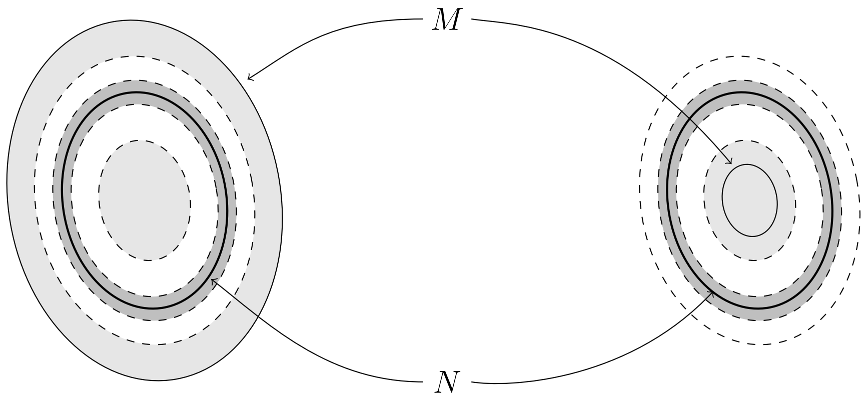

Figura 5.2: M e N; in l'intorno tubolare, di raggio $\frac{k+i-1}{3k}\eta$, di ∂N e in il complementare (in $M \cup N$) dell'intorno tubolare, di raggio $\frac{k+i}{3k}\eta$, di ∂N.

Definiamo allora $w_i := \varphi_i u + (1 - \varphi_i)v$, da cui vale banalmente la (5.4), e otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{M \cup N} \mathrm{lip}\, w_i \, d\mu \leq & \int_{(M \setminus N) \cup (\{d(x, \partial N) \leq \frac{k+i}{3k}\eta\} \cap M)} \mathrm{lip}\, u \, d\mu \\ & + \int_{(N \setminus M) \cup (\{d(x, \partial N) \geq \frac{k+i-1}{3k}\eta\} \cap N)} \mathrm{lip}\, v \, d\mu + \int_{H_i} \mathrm{lip}\, \left(\varphi_i u + (1 - \varphi_i)v\right) \, d\mu \\ & \leq \int_M \mathrm{lip}\, u \, d\mu + \int_N \mathrm{lip}\, v \, d\mu + \int_{H_i} (\mathrm{lip}\, u + \mathrm{lip}\, v) \, d\mu + \frac{4k}{\eta} \int_{H_i} |u - v| \, d\mu. \end{aligned}$$

Ma allora sommando sugli indici $i = 1, \dots, k$ e dividendo per k otteniamo

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \int_{M \cup N} \mathrm{lip}\, w_i \, d\mu \leq \int_M \mathrm{lip}\, u \, d\mu + \int_N \mathrm{lip}\, v \, d\mu + \varepsilon + \frac{4}{\eta} \int_H |u - v| \, d\mu,$$

quindi esiste un indice $i_0 \in \{1,\dots,k\}$ tale che vale (5.3) con $w = w_{i_0}$. Proviamo (5.5); se $K \subset M \cup N$ è un insieme compatto, allora

$$\begin{aligned}
\int_K |w_{i_0} - \sigma|\, d\mu &\leq \int_{K\cap(M\setminus N)} |u-\sigma|\, d\mu + \int_{K\cap(N\setminus M)} |v-\sigma|\, d\mu \\
&\quad + \int_{K\cap M\cap N} (\varphi_{i_0}|u-\sigma| + (1-\varphi_{i_0})|v-\sigma|)\, d\mu \\
&\leq \int_{K\cap M\cap C_1} |u-\sigma|\, d\mu + \int_{K\cap N\cap C_2} |v-\sigma|\, d\mu.
\end{aligned}$$

2. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e data la costante positiva $\eta = d(M', \partial M)$, definiamo

$$H = N' \cap \left\{ x \in M \,:\, \frac{\eta}{3} < d(x, M') < \frac{2\eta}{3} \right\} \Subset M \cap N.$$

Possiamo trovare un numero $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int_H (\operatorname{lip} u + \operatorname{lip} v)\, d\mu \leq k\varepsilon. \tag{5.7}$$

Definiamo

$$H_i = \left\{ x \in X \,:\, \frac{k+i-1}{3k}\eta < d(x, M') \leq \frac{k+i}{3k}\eta \right\}, \qquad i = 1,\dots,k.$$

Esiste una funzione $\varphi_i \in \operatorname{Lip}(M \cup N)$ tale che $\|\operatorname{lip} \varphi_i\|_\infty < \frac{4k}{\eta}$ e

$$\varphi_i(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } d(x, M') \leq \frac{k+i-1}{3k}\eta \\ 0 & \text{se } d(x, M') \geq \frac{k+i}{3k}\eta. \end{cases}$$

Definiamo $w_i = \varphi_i u + (1-\varphi_i)v$ e procedendo come nel punto 1. è possibile trovare un indice $i_0 \in \{1,\dots,k\}$ tale che la (5.6) vale con $w = w_{i_0}$. □

Teorema 5.1.8. *Sia $u \in L^1_{loc}(X, \mu)$. Allora la variazione totale di u, $\|Du\|$, è la restrizione ai sottoinsiemi aperti di X di una misura su X.*

Dimostrazione. Grazie ad un risultato di De Giorgi-Letta (Teorema 5.1 di [10]), è sufficiente provare che la funzione $\|Du\|$ definita sulla classe degli aperti di X soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\|Du\|(B) \leq \|Du\|(A)$ se $B \subset A$;

2. $\|Du\|(A \cup B) \geq \|Du\|(A) + \|Du\|(B)$ se $A \cap B = \emptyset$;

3. $\|Du\|(A) = \sup\{\|Du\|(B) \,:\, B \Subset A\}$;

4. $\|Du\|(A \cup B) \leq \|Du\|(A) + \|Du\|(B)$ per ogni A e B.

Le prime due proprietà sono facili conseguenze della definizione e delle proprietà del limite inferiore. Proviamo il punto 3.: in virtù di 1., basta provare la disuguaglianza $\leq$. Non è pertanto restrittivo supporre che $\sup\{\|Du\|(B) : B \Subset A\} < \infty$.

Fissiamo A un aperto di X, e x_0 un punto di X. Definiamo ora gli insiemi

$$A_j = \left\{ x \in A : d(x, \partial A) > \frac{1}{j} \right\} \cap B(x_0, j)$$

e la successione di aperti a chiusura compatta dati da

$$\begin{cases} C_1 = A_2 \\ C_k = A_{2k} \setminus \overline{A}_{2k-3} \quad \forall k \geq 2. \end{cases}$$

Senza perdere di generalità possiamo supporre

$$\sup_{B \Subset A} \|Du\|(B) < +\infty;$$

allora, poiché le due famiglie (C_{2k}) e (C_{2k+1}) sono ben separate, per ogni ε positivo esiste un $\overline{k} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{k \geq \overline{k}} \|Du\|(C_k) \leq \frac{\varepsilon}{6}. \tag{5.8}$$

Poniamo $B = A_{2\overline{k}-2}$. Proviamo il seguente lemma.

Lemma 5.1.9. *Esiste un insieme aperto $B' \Subset B$ e una successione $(u_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{Lip}(A \setminus \overline{B'})$ tale che $u_h \to u$ in $L^1_{loc}(A \setminus \overline{B'})$ e*

$$\limsup_{h \to \infty} \int_{A \setminus \overline{B'}} \mathrm{lip}\, u_h \, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.9}$$

Dimostrazione. Poniamo $B' = A_{2\overline{k}-3}$ e rinominiamo $D_h = C_{\overline{k}+h-1}$; possiamo considerare una successione $\psi_{m,h} \in \mathrm{Lip}(D_h)$ tale che $\psi_{m,h} \to u$ in $L^1_{loc}(D_h)$ quando $m \to \infty$ e

$$\int_{D_h} \mathrm{lip}\, \psi_{m,h} \, d\mu \leq \|Du\|(D_h) + \frac{1}{m\, 2^h}.$$

Definiremo induttivamente una successione $u_{m,h} \in \mathrm{Lip}(\cup_{i=1}^h D_i)$; poniamo $u_{m,1} = \psi_{m,1}$, e per ogni $h > 1$ usiamo il lemma 5.1.7 con $M = D_{h+1}$,

$N = \cup_{i=1}^{h} D_i$, $u = \psi_{m,h+1}$, $v = u_{m,h}$ e $\varepsilon_h = \frac{\varepsilon}{12 \cdot 2^h}$. Senza perdere di generalità, possiamo supporre che

$$c_h \int_{H_h} |\psi_{m,h+1} - \psi_{m,h}| \, d\mu \leq \frac{\varepsilon}{12 \cdot 2^h},$$

dove c_h e H_h sono dati dal lemma 5.1.7 e dipendono solo da h. Otteniamo che

$$\begin{aligned} \int_{\cup_{i=1}^{h+1} D_i} |\operatorname{lip} u_{m+1}| \, d\mu \leq & \int_{D_{h+1}} |\operatorname{lip} \psi_{m,h+1}| \, d\mu + \int_{\cup_{i=1}^{h} D_i} |\operatorname{lip} u_{m_h}| \, d\mu \\ & + c_h \int_{H_h} |\psi_{m,h+1} - u_{m,h}| \, d\mu + \frac{\varepsilon}{12 \cdot 2^h}. \end{aligned}$$

Inoltre abbiamo che

$$\begin{cases} u_{m,h+1} = \psi_{m,h+1} & \text{su } D_{h+1} \setminus D_h \\ u_{m,h+1} = \psi_{m,h} & \text{su } \cup_{i=1}^{h} D_i \setminus D_{h+1}. \end{cases}$$

e allora per induzione otteniamo che

$$\begin{aligned} \int_{\cup_{i=1}^{h+1}} |\operatorname{lip} u_{m,h+1}| \, d\mu \leq & \sum_{j=1}^{h+1} \int_{D_j} |\operatorname{lip} \psi_{m,j}| \, d\mu \\ & + \sum_{j=1}^{h} c_j \int_{H_j} |\psi_{m,j+1} - \psi_{m,j}| \, d\mu + \sum_{j=1}^{h} \frac{\varepsilon}{12 \cdot 2^j}. \end{aligned}$$

Definiamo allora la successione

$$u_m(x) = u_{m,h}(x), \qquad \forall x \in \cup_{i=1}^{h-1} D_i;$$

così grazie a (5.8) otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{A \setminus \overline{B'}} \operatorname{lip} u_h \, d\mu & \leq \lim_{h \to \infty} \int_{\cup_{i=1}^{h-1} D_i} |\operatorname{lip} u_{m,h}| \, d\mu \\ & \leq \lim_{h \to \infty} \int_{\cup_{i=1}^{h} D_i} |\operatorname{lip} u_{m,h}| \, d\mu \\ & \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{D_j} |\operatorname{lip} \psi_{m,j}| \, d\mu + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{6 \cdot 2^j} \\ & \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|Du\|(D_j) + \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{6} \leq \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

La condizione (5.9) è soddisfatta; proviamo la convergenza ad u in $L^1_{loc}(A\setminus\overline{B'})$. Cominciamo provando per induzione su h, che per ogni $h \in \mathbb{N}$ vale

$$\lim_{m\to\infty} \|u_{m,h} - u\|_{L^1(\cup_{i=1}^{h+1} D_i)} = 0. \tag{5.10}$$

Per $h = 1$ abbiamo che $u_{m,1} = \psi_{m,1}$ e allora (5.10) segue per definizione di $(\psi_{m,h})$. Supponiamo la tesi valida per h e proviamola per $h + 1$: dal lemma 5.1.7, se $K \Subset \cup_{i=1}^{h+1} D_i$, esistono $K_1 \Subset D_{h+1}$ e $K_2 \Subset \cup_{i=1}^{h} D_i$ dipendenti solo da h, tali che

$$\int_K |u_{m,h+1} - u| \, d\mu \leq \int_{K_1} |\psi_{m,h+1} - u| \, d\mu + \int_{K_2} |u_{m,h} - u| \, d\mu,$$

allora dalla scelta delle $\psi_{m,h}$ e per l'ipotesi induttiva su h otteniamo (5.10). Ora proviamo che $u_m \to u$ in $L^1_{loc}(A\setminus\overline{B'})$. Prendiamo $K \Subset A\setminus\overline{B'}$; allora esiste un $h \in \mathbb{N}$ tale che $K \Subset \cup_{i=1}^{h} D_i$. Per costruzione abbiamo che $u_m(x) = u_{m,h+1}(x)$ per ogni $x \in K$, quindi

$$\int_K |u_m - u| \, d\mu = \int_K |u_{m,h+1} - u| \, d\mu \to 0 \qquad \text{se } m \to \infty.$$

$\square$

Ora consideriamo una successione $v_h \in \mathrm{Lip}(B)$, convergente a u in $L^1_{loc}(B)$ e tale che

$$\int_B \mathrm{lip}\, v_h \, d\mu \to \|Du\|(B).$$

Applicando il lemma 5.1.7, possiamo incollare questa successione con la successione del lemma 5.1.9 in una nuova successione w_i, su un aperto $H \Subset B \cap (A \setminus \overline{B'})$ non dipendente da h otteniamo

$$\int_A \mathrm{lip}\, w_h \, d\mu \leq \int_{A\setminus\overline{B'}} \mathrm{lip}\, u_h \, d\mu + \int_B \mathrm{lip}\, v_h \, d\mu + c(B,B') \int_H \|u_h - v_h\| \, d\mu + \frac{\varepsilon}{3};$$

allora passando al limite per $h \to \infty$ abbiamo

$$\|Du\|(A) \leq \|Du\|(B) + \varepsilon.$$

Rimane da provare 4.; proviamo una debole sub-additività: se A, B sono aperti di X, proviamo che per ogni $A' \Subset A$ e $B' \Subset B$ abbiamo

$$\|Du\|(A' \cup B') \leq \|Du\|(A) + \|Du\|(B); \tag{5.11}$$

la subadditività discende dal punto 3. passando all'estremo superiore sul primo membro. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e prendiamo due funzioni $u_\varepsilon \in \mathrm{Lip}(A)$ e $v_\varepsilon \in \mathrm{Lip}(B)$ tali che

$$\int_A \operatorname{lip} u_\varepsilon \, d\mu \leq \|Du\|(A) + \varepsilon, \qquad \int_B \operatorname{lip} v_\varepsilon \, d\mu \leq \|Du\|(B) + \varepsilon.$$

Grazie al lemma 5.1.7 esistono una funzione $w_\varepsilon \in \mathrm{Lip}(A \cup B)$, una costante positiva c_ε e un aperto $H_\varepsilon \Subset A \cap B$ dipendente solo da ε tale che

$$\int_{A\cup B} \operatorname{lip} w_\varepsilon \, d\mu \leq \int_A \operatorname{lip} u_\varepsilon \, d\mu + \int_B \operatorname{lip} v_\varepsilon \, d\mu + c_\varepsilon \int_{H_\varepsilon} \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\| \, d\mu + \varepsilon.$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ otteniamo la (5.11), e quindi la tesi. □

Anche nel caso metrico rimane valida la proprietà di semicontinuità della variazione totale.

Teorema 5.1.10 (Semicontinuità). *Sia $\Omega \subset X$ un aperto e sia $(u_h)_h \subset BV_{loc}(\Omega, \mu)$ tale che $u_h \to u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$; allora*

$$\|Du\|(A) \leq \liminf_{h\to\infty} \|Du_h\|(A) \tag{5.12}$$

per ogni aperto $A \Subset \Omega$. In particolare, se $\sup_h \|Du_h\|(A) < \infty$ per ogni $A \Subset \Omega$, il limite u appartiene a $BV_{loc}(\Omega)$.

Dimostrazione. Fissiamo un aperto $A \Subset \Omega$. Per l'osservazione 5.1.5 per ogni $u_h \in BV(A)$ esiste una successione $(u_{h,i})_i \subset Lip(A)$ tale che $u_{h,i} \to u_h$ in $L^1(A)$ e $\|Du_h\|(A) = \lim_{i\to\infty} \int_A \operatorname{lip} u_{h,i} \, dx$. Ora per definizione di limite per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste un indice i_h per cui

$$\|u_{h,i_h} - u\|_{L^1(A)} < \frac{1}{h} \qquad \text{e} \qquad \int_A \operatorname{lip} u_{h,i_h} \, dx \leq \|Du_h\|(A) + \frac{1}{h}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \|Du\|(A) &\leq \liminf_{h\to\infty} \int_A \operatorname{lip} u_{h,i_h} \, dx \\ &\leq \liminf_{h\to\infty} \left(\|Du_h\|(A) + \frac{1}{h} \right) = \liminf_{h\to\infty} \|Du_h\|(A). \end{aligned}$$

□

5.2 Una caratterizzazione puntuale

Ci proponiamo di provare una stima puntuale, dovuta a Lahti e Touminem (2013) [27]. Introduciamo i vari ingradienti che ci porteranno al risultato finale.

Cominciamo mostrando, con un argomento di densità, che per ogni funzione a variazione limitata vale una disuguaglianza di tipo Poincaré:

Teorema 5.2.1. *Siano* (X, d, μ) *uno spazio metrico completo, misurato con* μ *una misura doubling che supporta una disuguaglianza debole* $(1,1)$*-Poincaré. Allora per ogni* $u \in BV(X)$ *vale:*

$$\int_B |u - u_B| \, d\mu \leq C \, r \, \|Du\|(\lambda B) \tag{5.13}$$

per ogni B *palla di raggio* r*, ove* C *e* λ *sono le costanti della disuguaglianza debole* $(1,1)$*-Poincaré.*

Dimostrazione. Per le ipotesi fatte sullo spazio, per ogni coppia di funzioni v, h, con v Lipschitziana e h suo gradiente superiore, e per ogni palla B di raggio r abbiamo

$$\int_B |v - v_B| \, d\mu \leq C \, r \int_{\lambda B} h \, d\mu.$$

Sia $(u_n)_n \subset Lip_{loc}(X)$ tale che

$$u_n \to u \quad \text{in} \quad L^1_{loc}(X) \qquad\qquad \|Du\|(\lambda B) = \lim_{n\to\infty} \int_{\lambda B} \operatorname{lip} u_n \, d\mu.$$

Osserviamo che $u_n - u_{nB} \to u - u_B$ in $L^1(B)$: infatti

$$\begin{aligned} \int_B |(u_n - u_{nB}) - (u - u_B)| \, d\mu &\leq \int_B |u - u_n| \, d\mu + \int_B |u_B - u_{nB}| \, d\mu \\ &\leq 2 \int_B |u - u_n| \, d\mu. \end{aligned}$$

Inoltre per la disuguaglianza triangolare

$$\left| \int_B |u_n - u_{nB}| \, d\mu - \int_B |u - u_B| \, d\mu \right| \leq \int_B |(u_n - u_{nB}) - (u - u_B)| \, d\mu,$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_B |u - u_B| \, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_B |u_n - u_{nB}| \, d\mu \\ &\leq C \, r \lim_{n\to\infty} \int_B \operatorname{lip} u_n \, d\mu = C \, r \, \|Du\|(\lambda B). \end{aligned}$$

□

Ricalcando la dimostrazione del teorema 4.6.2 otteniamo una stima per le funzioni a variazione limitata:

Teorema 5.2.2. *Siano X uno spazio metrico completo, misurato con μ una misura doubling e sia u una funzione in $BV(X)$, allora*

$$|u(x) - u(y)| \leq C\, d(x,y)\big(M_{2\sigma d(x,y),\|Du\|}(x) + M_{2\sigma d(x,y),\|Du\|(y)}\big) \tag{5.14}$$

per quasi ogni $x, y \in X$.

Dimostrazione. Siano $x, y \in X$ punti di Lebesgue di u (per il teorema di Lebesgue 4.2.14 possiamo ripetere il ragionamento per q.o. punto in X). Poniamo $B_i(x) = B(x, r_i) = B(x, 2^{-i}d(x,y))$ con $i \in \mathbb{N}$. Allora per il teorema di Lebesgue $u_{B_i(x)} \to u(x)$ per $i \to \infty$. Utilizzando la disuguaglianza triangolare, la proprietà doubling di μ e il teorema 5.2.1 otteniamo

$$\begin{aligned}
|u(x) - u_{B_0(x)}| &\leq C_d \sum_{i=0}^{\infty} \fint_{B_i(x)} |u(x) - u_{B_i(x)}|\, d\mu \\
&\leq C \sum_{i=0}^{\infty} r_i \frac{\|Du\|(\tau B_i(x))}{\mu(B_i(x))} \\
&\leq C \sum_{i=0}^{\infty} r_i M_{\tau\, d(x,y),\|Du\|}(x) \\
&= C\, d(x,y)\, M_{\tau\, d(x,y),\|Du\|}(x).
\end{aligned}$$

Similmente

$$|u(y) - u_{B_0(y)}| \leq C\, d(x,y)\, M_{\tau\, d(x,y),\|Du\|}(y).$$

Inoltre per il teorema 4.16

$$\begin{aligned}
|u_{B_0(x)} - u_{B_0(y)}| &\leq C\, d(x,y) \frac{\|Du\|(2\tau B_0(x))}{\mu(2B_0(x))} \\
&\leq C\, d(x,y)\, \big(M_{2\tau\, d(x,y),\|Du\|}(x).
\end{aligned}$$

Ricordando che l'operatore massimale ristretto è crescente al crescere del raggio, dalle tre disuguaglianze concludiamo. $\square$

Proviamo una caratterizzazione per funzioni BV dovuta a Miranda [30]:

Teorema 5.2.3. *Sia (X, d, μ) uno spazio completo, misurato con μ una misura doubling che supporta una disuguaglianza debole $(1,1)$-Poincaré, e sia $u \in L^1(X, \mu)$; allora le due condizioni sono equivalenti:*

1. *$u \in BV(X)$;*

2. *esiste una misura positiva ν, finita su X, tale che per ogni palla $B = B(x,r)$ vale*
$$\int_B |u - u_B|\, d\mu \leq r\, \nu(\lambda B).$$
Inoltre esiste una costante $c = c(C_d)$ tale che $\|Du\| \leq c\,\nu$.

Dimostrazione. La prima implicazione è già stata provata nel teorema 5.2.1. Per provare il viceversa costruiremo una successione in $Lip_{loc}(X)$ convergente ad u in $L^1_{loc}(X)$ con variazione totale equilimitata.
Consideriamo un insieme $A_{1/h}$ e una partizione dell'unità come nella proposizione 5.1.1. Definiamo la successione
$$u_h(x) = \sum_{a \in A_{1/h}} u_{B_a} \varphi_a^{(1/h)}(x), \tag{5.15}$$
contenuta in $Lip_{loc}(X)$ in quanto ogni u_h è somma localmente finita di funzioni Lipschitziane. Proviamo che $u_h \to u$ in L^1_{loc}: si ha
$$u(x) - u_h(x) = \sum_{a \in A_{1/h}} (u(x) - u_{B_a}) \varphi_a^{1/h}(x),$$
e usando il fatto che $0 \leq \varphi_a^{1/h} \leq \chi_{2B_a}$, otteniamo
$$\begin{aligned}\int_X |u - u_h|\, d\mu &\leq \sum_{a \in A_{1/h}} \int_{2B_a} |u - u_{B_a}|\, d\mu \\ &\leq \sum_{a \in A_{1/h}} \left(\int_{2B_a} |u - u_{2B_a}|\, d\mu + |u_{2B_a} - u_{B_a}|\, \mu(2B_a) \right).\end{aligned}$$
Ma
$$\begin{aligned}|u_{2B_a} - u_{B_a}| &\leq \frac{1}{\mu(B_a)} \int_{B_a} |u - u_{2B_a}|\, d\mu \leq \frac{1}{\mu(B_a)} \int_{2B_a} |u - u_{2B_a}|\, d\mu \\ &\leq \frac{2}{h} \frac{\nu(2\lambda B_a)}{\mu(B_a)},\end{aligned} \tag{5.16}$$
allora
$$\begin{aligned}\int_X |u - u_h|\, d\mu &\leq \sum_{a \in A_{1/h}} \left(\frac{2}{h}\, \nu(2\lambda B_a) + \frac{2}{h} \frac{\nu(2\lambda B_a)\mu(2B_a)}{\mu(B_a)} \right) \\ &= \frac{2(1 + C_d)}{h} \sum_{a \in A_{1/h}} \nu(2\lambda B_a) \leq \frac{2(1 + C_d)}{h} \beta(2) \nu(X).\end{aligned}$$

Proviamo adesso l'equilimitatezza della variazione totale. Indichiamo con il simbolo $b \sim a$ i punti $b \in A_{1/h}$ per cui $2B_b \cap B_a \neq \emptyset$, allora per ogni B_a, ricordando la motazione della proposizione 5.1.1, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{B_a} \operatorname{lip} u_h \, d\mu &= \int_{B_a} \operatorname{lip}(u_h - u_{B_a}) \, d\mu \leq \int_{B_a} \sum_{b \sim a} |u_{B_b} - u_{B_a}| \operatorname{lip} \varphi_b^{1/h} \, d\mu \\ &\leq \sum_{b \sim a} |u_{B_b} - u_{B_a}| \int_{2B_b} \operatorname{lip} \varphi_b^{1/h} \, d\mu \leq \sum_{b \sim a} |u_{B_b} - u_{B_a}| \, \Lambda h \mu(2B_b).\end{aligned}$$

Ora stimiamo $|u_{B_b} - u_{B_a}|$; dalla disuguaglianza triangolare abbiamo

$$|u_{B_b} - u_{B_a}| \leq |u_{B_b} - u_{4B_a}| + |u_{4B_a} - u_{B_a}|,$$

ma per la (5.16) $|u_{4B_a} - u_{B_a}| \leq \frac{4}{h} \frac{\nu(4\lambda \, B_a)}{\mu(B_a)}$, mentre osservando che se $b \sim a$ allora $B_b \subset 4\, B_a$ troviamo

$$\begin{aligned}|u_{B_b} - u_{4B_a}| &\leq \left| \frac{1}{\mu(B_b)} \int_{B_b} (u - u_{4B_a}) \, d\mu \right| \\ &\leq \frac{1}{\mu(B_b)} \int_{4B_a} |u - u_{4B_a}| \, d\mu \leq \frac{4}{h} \frac{\nu(4\lambda B_a)}{\mu(B_b)}.\end{aligned}$$

Allora

$$\int_{B_a} \operatorname{lip} u_h \, d\mu \leq \sum_{b \sim a} \Lambda h \mu(2B_b) \frac{C'}{h} \frac{\nu(4\lambda B_a)}{\mu(B_b)} \leq C \nu(4\lambda B_a)$$

da cui

$$\int_X \operatorname{lip} u_h \, d\mu \leq \sum_{a \in A_{1/h}} \int_{B_a} \operatorname{lip} u_h \, d\mu \leq \beta(4) \, C \, \nu(X).$$

Quindi per semicontinuità $\|Du\|(X) \leq \beta(4) \, C \, \nu(X) < \infty$. □

Adesso introduciamo la definizione di spazio quasi convesso e proviamo una condizione sufficiente per la quasi convessità.

Definizione 5.2.4. Sia (X, d) uno spazio metrico. Se esiste una costante $C > 0$ e per ogni due punti $x, y \in X$ vi è una curva γ che li congiunge con $l(\gamma) \leq C \, d(x, y)$, lo spazio X è detto *quasi convesso*.

Teorema 5.2.5. *Sia (X, d, μ) uno spazio metrico completo, misurato con μ una misura doubling, connesso per archi che supporta una disuguaglianza debole $(1, p)$-Poincaré. Allora (X, d, μ) è quasi convesso, con la costante C dipendente dalla costante doubling e dalla costante della disuguaglianza di Poincaré.*

Dimostrazione. Fissiamo $k \in \mathbb{N}$. Sia $\gamma : [0,1] \to X$ una curva continua. Per ogni partizione $\pi : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ consideriamo la somma

$$s_\pi(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \min(l(\gamma_{|[t_i,t_{i+1}]}), kd(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))),$$

e definiamo

$$l_k(\gamma) = \inf_\pi s_\pi(\gamma),$$

dove l'estremo inferiore è fatto su tutte le possibili partizioni di $[0,1]$. Non viene chiesta γ rettificabile; infatti se nessuna parte di γ è rettificabile, allora $l_k(\gamma) = kd(\gamma(0), \gamma(1))$. Fissiamo $x_0 \in X$ e definiamo

$$u_k(x) = \inf_\gamma l_k(\gamma),$$

al variare di tutte le curve che collegano x e x_0. La funzione u_k è k-Lipschitziana e la funzione $g \equiv 1$ è un gradiente superiore di u_k. Infatti consideriamo la funzione $u_k(x,y) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} l_k(\gamma)$, dove $\Gamma_{x,y}$ è l'insieme delle curve che congiunge x e y (notiamo che $u_k(x) = u_k(x, x_0)$). La funzione u_k soddisfa la disuguaglianza triangolare; per ogni $x, y, z \in X$

$$u_k(x,y) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} l_k(\gamma) \le \inf_{\gamma \in \Gamma_{x,z}} l_k(\gamma) + \inf_{\gamma \in \Gamma_{z,y}} l_k(\gamma) = u_k(x,z) + u_k(z,y).$$

Rovesciando la disuguaglianza triangolare e considerando, nell'ultima disuguaglianza, la partizione $\pi : 0 = t_0 < t_1 = 1$ troviamo

$$|u_k(x) - u_k(y)| \le u_k(x,y) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} l_k(\gamma) \le kd(x,y),$$

da cui la k-Lipschitzianità di u_k. Allo stesso modo per ogni curva rettificabile δ (considerando la partizione vista prima)

$$|u_k(x) - u_k(y)| \le u_k(x,y) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{x,y}} l_k(\gamma) \le l(\delta) = \int_\gamma g.$$

Allora la coppia (u_k, g) soddisfa la disuguaglianza debole $(1,p)$-Poincaré, e per il teorema 4.6.2 vale

$$|u_k(x) - u_k(y)| \le C'\, d(x,y)\Big(\big(M_{2\sigma d(x,y)} g^p(x)\big)^{\frac{1}{p}} + \big(M_{2\sigma d(x,y)} g^p(y)\big)^{\frac{1}{p}}\Big) = 2C' d(x,y).$$

In particolare, per $y = x_0$, troviamo

$$|u(x) - u(y)| \le Cd(x, x_0).$$

Sia γ_k una curva che collega x e x_0 per cui $l_k(\gamma_k) \leq 2u_k(x)$. Allora sia π_k una partizione di $[0,1]$ tale che $s_{\pi_k}(\gamma_k) \leq 3u_k(x)$. Facciamo questo per ogni $k \geq 1$. Vogliamo esibire una sottosuccessione (γ_{k_i}) convergente, in qualche senso, ad una curva rettificabile γ in Γ_{x,x_0} e tale che

$$l(\gamma) \leq \liminf_{i\to\infty} l_{k_i} \leq Cd(x, x_0),$$

e questo concluderebbe la dimostrazione.

Richiamiamo il seguente classico argomento. Sia $(\delta_k)_{k=1}^{\infty}$ una successione di curve rettificabili in uno spazio metrico proprio Y. Assumiamo che tutte le curve δ_k appartengano a $\Gamma_{x,y}$ con $x, y \in Y$, e $\sup_k l(\delta_k) > \infty$. Paramatrizziamo ogni curva per lunghezza d'arco; scaliamo le parametrizzazioni e otteniamo una successione di curve definite nell'intervallo $[0,1]$. Come nella dimostrazione del teorema 4.1.13, proviamo l'equicontinuità della famiglia (δ_k). Con un procedimento diagonale si estrae una sottosuccessione che converge su un sottoinsieme denso di $[0,1]$. Dall'equicontinuità abbiamo la convergenza uniforme sull'intero intervallo ad una curva δ, e dunque per la semicontinuità della variazione totale avremmo $l(\gamma) \leq \liminf_{i\to\infty} l(\delta_{k_i})$.

Sfortunatamente questo argomento non può essere applicato al nostro caso perché $l_k(\gamma_k)$ non è la lunghezza di γ_k, e poi non sappiamo se le curve γ_k siano rettificabili.

Utilizziamo un trucco per ricondurci a questo argomento: modifichiamo lo spazio metrico aggiungendo infiniti segmenti e modifichiamo la famiglia di curve. Costruiamo un nuovo spazio metrico $\widehat{X}$ attaccando allo spazio X infiniti segmenti Euclidei così come segue. Sia $\pi_k : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ la partizione associata a γ_k scelta in precedenza. Se

$$l(\gamma_{k|[t_i,t_{i+1}]}) \geq kd(\gamma_k(t_i), \gamma(t_{i+1})), \tag{5.17}$$

allora incolliamo allo spazio X un segmento Euclideo $I_{k,i}$ di lunghezza $d(\gamma_k(t_i), \gamma(t_{i+1}))$ (cioè il segmento $I_{k,i}$ è isometrico a $[0, d(\gamma_k(t_i), \gamma_k(t_{i+1}))]$) in modo che gli estremi di $I_{k,i}$ siano attaccati allo spazio nei punti $\gamma(t_i)$ e $\gamma(t_{i+1})$. Ripetiamo il procedimento per ogni k e per ogni i per cui vale la (5.17).

Lo spazio $\widehat{X}$ è equipaggiato con la metrica indotta dalla metrica Euclidea su ogni $I_{k,i}$ e la metrica d in X. Denotiamo la metrica in $\widehat{X}$ con $\widehat{d}$.

Ora denotiamo con $\widehat{\gamma_k}$ la nuova curva che è ottenuta da γ_k nel seguente modo: sia $0 \leq i \leq n-1$. Se (5.17) non vale allora

$$\widehat{\gamma}_{k|[t_i,t_{i+1}]} = c_{k|[t_i,t_{i+1}]};$$

se invece la (5.17) è soddisfatta $\widehat{\gamma}_{k|[t_i,t_{i+1}]}$ è la funzione lineare con valori sul segmento I_{k_i}. Osservando che $\sup_k s_{\pi_k} \leq Cd(x, x_0)$ concludiamo che

$l(I_{k,i}) < \frac{Cd(x,x_0)}{k}$. Così, nel peggiore dei casi attacchiamo allo spazio X infiniti segmenti $I_{k,i}$ di lunghezza convergente a zero. Allora lo spazio $\widehat{X}$ è proprio [1]. Ora $\widehat{l}(\widehat{\gamma}_k) \leq s_{\pi_k} \leq Cd(x,x_0)$, dove $\widehat{l}$ indica la distanza in $\widehat{X}$.

In questa nuova situazione possiamo applicare il precedente argomento classico. Scegliamo una buona parametrizzazione di $\widehat{\gamma}_k$ ed estraiamo una sottosuccessione $\widehat{\gamma}_k$ che converge uniformente ad una curva γ tale che

$$\widehat{l}(\gamma) \leq \liminf_{i\to\infty} \widehat{l}(\gamma_{k_i}) \leq Cd(x,x_0).$$

Poiché le lunghezze di $I_{k,i}$ convergono a zero per $k \to \infty$ possiamo concludere che le immagini di γ appartengono a X e che $\widehat{l}(\gamma) = l(\gamma)$. $\square$

Adesso diamo la definizione di spazio geodetico e dopo la prova di un lemma proviamo l'ultimo passo della nostra caratterizzazione.

Definizione 5.2.6. Uno spazio metrico (x,d) è detto geodetico se per ogni due punti $x, y \in X$ esiste una curva che li collega di lunghezza $d(x,y)$.

Lemma 5.2.7. *Sia (X,d) uno spazio metrico geodetico. Siano $B(x_0,R)$ una palla , $x \in B(x_0,R)$ e r tale che $0 < r < 2R$, allora esiste una palla di raggio $\frac{r}{2}$ in $B(x,r) \cap B(x_0,R)$.*

Dimostrazione. Se $d(x,x_0) \geq \frac{r}{2}$ allora, essendo X geodetico, esiste z (nell'immagine della geodetica che collega x e x_0) tale che $d(z,x) = \frac{r}{2}$ e $d(z,x_0) = d(x,x_0) - \frac{r}{2}$. Allora $B(z,\frac{r}{2}) \subset B(x,r) \cap B(x_0,R)$.
Se invece $d(x,x_0) < \frac{r}{2}$ abbiamo $B(x_0,\frac{r}{2}) \subset B(x,r) \cap B(x_0,R)$. $\square$

Teorema 5.2.8. *Sia X uno spazio metrico completo, connesso per archi, misurato con una misura doubling, μ, che supporta una disuguaglianza debole $(1,1)$-Poincaré. Siano $u \in L^1_{loc}(X)$ e ν una misura positiva, finita su X. Se esistono due costanti $\sigma \geq 1$ e $C_0 > 0$ tale che la disuguaglianza*

$$|u(x) - u(y)| \leq C_0\, d(x,y)\, \left[M_{\sigma\, d(x,y),\nu}(x) + M_{\sigma\, d(x,y),\nu}(x)\right] \tag{5.18}$$

[1] Dati $\widehat{K}$ un chiuso e limitato di $(\widehat{X},\widehat{d})$ e un suo generico ricoprimento aperto $\widehat{\mathcal{A}} = \{\widehat{A}_i\}_{i\in I}$, ne estraiamo un sottoricoprimento finito. Ora $\mathcal{A} = \{\widehat{A}_i \cap X\}_{i\in I}$ è un ricoprimento aperto di $K = \widehat{K} \cap X$, e per compattezza di K in X (compatto perché chiuso e limitato in X) possiamo estrarne un sottoricoprimento finito $\{A_{i_1},\ldots,A_{i_N}\}$. Dunque K è compatto anche in $\widehat{X}$ e $\widehat{d}\left(K,\partial\left(\cup_{j=1}^N \widehat{A}_{i_j}\right)\right) = \varepsilon > 0$. Allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{k} < \varepsilon$ abbiamo $I_{k,i} \subset \cup_{j=1}^N \widehat{A}_{i_j} =: \widehat{A}_{(K)}$. I segmenti non contenuti in $\widehat{A}_{(K)}$ sono dunque in numero finito e essendo compatti, come fatto per K, per ognuno di essi e possibile estrarre un sottoricoprimento finito da $\widehat{\mathcal{A}}$. Allora otteniamo così un sottoricoprimento finito per $\widehat{K}$ che dunque è compatto.

vale per μ-q.o. $x, y \in X$, allora

$$\int_B |u - u_B|\, d\mu \le C\, r\, \nu(\lambda\, B) \tag{5.19}$$

per ogni palla $B = B(x, r)$. Le costanti C e λ dipendono solo da C_0, σ, C_d e la costante della disuguaglianza debole $(1,1)$-Poincaré.

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza debole $(1,1)$-Poincaré, per il teorema 5.2.5 X è quasi convesso. Dotiamo X della metrica $\rho(x,y) = \inf l(\gamma)$, ove l'estremo inferiore è fatto su tutte le curve che congiungono x e y. Dalla quasi convessità e dal fatto più generale che $d(x,y) \le l(\gamma)$ con γ che congiunge x e y, d e ρ sono due metriche equivalenti e (X,d) e (x,ρ) sono bi-Lipschitz omeomorfi[2]. Dato che le proprietà doubling, la disuguaglianza debole $(1,1)$-Poincaré, la (5.18) e (5.19) sono invarianti per omeomorfismo bi-Lipschitziano possiamo rimpiazzare d con la nuova metrica ρ e lavorare sul nuovo spazio (X, ρ, μ); anche (X, ρ, μ) è proprio, dunque per il teorema 4.1.13 per ogni due punti $x, y \in X$ esiste una curva γ che li congiunge che realizza la distanza $\rho(x,y)$. Fissiamo $B = B(x_0, R)$ una palla. Poiché la (5.18) e la (5.19) rimangono inalterate se sommiamo ad u una costante, possiamo supporre $\inf_E |u| = 0$ su un insieme $E \subset B$ di misura positiva che sceglieremo in seguito. Definiamo $\tau = 3\sigma$ e misura $\lambda = \nu_{|\tau B}$. La stima puntuale (5.18) implica

$$|u(x) - u(y)| \le C_0 \rho(x,y) \left[M_\lambda(x) + M_\lambda(y)\right], \tag{5.20}$$

per q.o. $x, y \in B$. Infatti se $x, y \in B$ vale l'inclusione $B(x, 2\sigma\rho(x,y)) \subset \tau B$ e per (4.19) abbiamo $M_{\sigma\,\rho(x,y),\nu}(x) \le M_{\sigma\,R,\nu}(x) \le M_\lambda(x)$. Possiamo assumere che la (5.20) valga per ogni $x, y \in B$, perché la disuguaglianza (5.19) valida su $B \setminus F$ con F insieme di misura nulla implica la (5.19) su B. Possiamo inoltre assumere che $\lambda(\tau B) > 0$; in caso contrario per la (5.20) avremmo u costante su B da cui banalmente la (5.19). Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ definiamo

$$E_k = \{x \in B \mid M_\lambda \le 2^k\} \qquad \text{e} \qquad a_k = \sup_{E_k} |u(x)|.$$

Allora $E_{k-1} \subset E_k$ e $a_{k-1} \le a_k$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, e inoltre

$$\int_B |u - u_B|\, d\mu \le 2 \int_B |u|\, d\mu \le 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k\, \mu(E_k \setminus E_{k-1}). \tag{5.21}$$

Vogliamo ottenere una maggiorazione del lato destro di (5.21) stimando a_k. Da (5.20) abbiamo che la funzione u è $C_0\, 2^{k+1}$-Lipschitziana in E_k. Quindi per ogni $x \in E_k$ e $y \in E_{k-1}$ abbiamo

$$|u(x)| \le |u(x) - u(y)| + |u(y)| \le C_0\, 2^{k+1}\, \rho(x,y) + a_{k-1}. \tag{5.22}$$

[2] Un'applicazione f è detta bi-Lipschitz se f e f^{-1} sono Lipschitziane.

Il nostro scopo è quello di trovare per ogni $x \in E_k$ un $y \in E_{k-1}$ tale che $\rho(x,y)$ sia sufficientemente piccola. Fissiamo $x \in E_k$. Per il lemma 5.2.7 se $0 < r < 2R$ l'intersezione $B \cap B(x,r)$ contiene una palla $\tilde{B}$ di raggio $\frac{r}{2}$, allora per la proprietà doubling di μ

$$\mu(B(r,x) \cap B) \geq \mu(\tilde{B}) \geq \mu(B) C_d^{-2} \left(\frac{r}{2R}\right)^s, \tag{5.23}$$

dove $s = \log_2 C_d$. Senza perdita di generalità possiamo supporre $C_d > 2$ e di conseguenza $s > 1$; allora dal teorema 4.2.11 abbiamo

$$\mu(B \setminus E_{k-1}) = \mu(\{x \in B \mid M_\lambda(x) > 2^{k-1}\}) < \frac{C}{2^{k-1}} \lambda(\tau B). \tag{5.24}$$

Quindi per ottenere $\mu(B \cap B(x,r)) > \mu(B \setminus E_{k-1})$ è sufficiente chiedere che

$$\mu(B) C_d^{-2} \left(\frac{r}{2R}\right)^s \geq \frac{C}{2^{k-1}} \lambda(\tau B),$$

cioè

$$r \geq 2R \left(\frac{C\,\lambda(\tau B)}{2^{k-1}\mu(B)}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Definiamo per ogni $k \in \mathbb{Z}$ il raggio $r_k := 2R\left(\frac{C\,\lambda(\tau B)}{2^{k-1}\mu(B)}\right)^{\frac{1}{s}}$. Ora, poiché $\mu(B \cap B(x,r)) > \mu(B \setminus E_{k-1})$, segue che esiste un $y \in B(x,r) \cap E_{k-1}$; per definizione di r_k e da (5.22) abbiamo

$$a_k \leq a_{k-1} + C_0 2^{k+1} r_k = a_{k-1} + C_0 2^{k+2} R \left(\frac{C\,\lambda(\tau B)}{2^{k-1}\mu(B)}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Iterando la stima e partendo da un $k_0 \in \mathbb{Z}$ fissato otteniamo

$$\begin{aligned} a_k &\leq a_{k-1} + \sum_{i=k_0}^{k-1} K 2^{i(1-\frac{1}{s})} R \left(\frac{\lambda(\tau B)}{\mu(B)}\right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq a_{k_0} + K\,R \left(\frac{\lambda(\tau B)}{\mu(B)}\right)^{\frac{1}{s}} \sum_{i=k_0}^{k-1} 2^{i(1-\frac{1}{s})} \\ &\leq a_{k_0} + K\,R \left(\frac{\lambda(\tau B)}{\mu(B)}\right)^{\frac{1}{s}} 2^{k(1-\frac{1}{s})} \qquad \forall\, k > k_0. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Notiamo che per ogni $k \leq k_0$ vale $a_k \leq a_{k_0}$. Ora come richiesto nel lemma 5.2.7 usato prima della (5.23) chiediamo $r_{k_0+1} \leq 2R$, ossia

$$r_{k_0+1} = 2R \left(\frac{C\,\lambda(\tau B)}{2^{k_0}\mu(B)}\right)^{\frac{1}{s}} \leq 2R \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{C\,\lambda(\tau B)}{2^{k_0}} \leq \mu(B).$$

Sia k_0 il più piccolo intero per cui vale la disuguaglianza. Allora

$$2^{k_0} \geq C\frac{\lambda(\tau B)}{\mu(B)} \qquad \text{e} \qquad 2^{k_0-1} < C\frac{\lambda(\tau B)}{\mu(B)}.$$

Allora per (4.16) esiste una costante C tale che

$$\frac{1}{C}\frac{\lambda(\tau B)}{\mu(\tau B)} \leq 2^{k_0} \leq C\frac{\lambda(\tau B)}{\mu(\tau B)}. \tag{5.26}$$

Adesso definiamo $E := E_{k_0}$ l'insieme introdotto ad inizio dimostrazione, e verichiamo che effettivamente $\mu(E) > 0$ in quanto $\mu(B(x, r_{k_0+1})) \cap B > \mu(B \setminus E_{k_0})$, per ogni $x \in B$. All'inizio della dimostrazione avevamo posto $\inf_E |u| = 0$; allora ricordando la $C_0\, 2^{k_0+1}$-Lipschitzianità di u su E grazie a (5.26) abbiamo la seguente stima per a_{k_0}:

$$a_{k_0} = \sup_E |u| \leq C_0\, 2^{k_0+2}\, R \leq C'\, R\frac{\lambda(\tau B)}{\mu(\tau B)}. \tag{5.27}$$

Scrivendo $A_k = E_k \setminus E_{k-1}$ e usando (5.21) e (5.25), abbiamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_B |u - u_B|\, d\mu &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \mu(A_k) \qquad\qquad (5.28)\\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{k_0} a_{k_0}\mu(A_k) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\left(a_{k_0} + K\, R\left(\frac{\lambda(\tau B)}{\mu(B)}\right)^{\frac{1}{s}} 2^{k(1-\frac{1}{s})}\right)\mu(A_k)\\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k_0}\mu(A_k) + K\, R\left(\frac{\lambda(\tau B)}{\mu(B)}\right)^{\frac{1}{s}} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{k(1-\frac{1}{s})}\mu(B \setminus E_{k-1}).
\end{aligned}$$

Ora per (5.27)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k_0}\mu(A_k) \leq C'\, R\frac{\lambda(\tau B)}{\mu(\tau B)}\mu(B) \leq C'\, R\, \lambda(\tau B);$$

mentre per (5.24) e (5.26) abbiamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{k(1-\frac{1}{s})}\, \mu(B \setminus E_{k-1}) &\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{k(1-\frac{1}{s})}\, C\frac{\lambda(\tau B)}{2^{k-1}} \leq C\lambda(\tau B) \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{s}}\\
&\leq C\lambda(\tau B) 2^{-\frac{k_0}{s}} \leq C\lambda(\tau B)\left(\frac{\mu(\tau B)}{\lambda(\tau B)}\right)^{\frac{1}{s}}.
\end{aligned}$$

Ora mettendo insieme le disuguaglianze otteniamo

$$\int_B |u - u_B|\, d\mu \leq C\, R\, \nu(\lambda\, B),$$

che è quanto volevamo.
Osserviamo che la tesi vale in (X, ρ, μ), ma a meno di cambiare opportunamente le costanti vale anche in (X, d, μ) e questo conclude il teorema. $\square$

Adesso mettendo insieme il teorema 5.2.2, il teorema 5.2.3 e il teorema 5.2.8 otteniamo la seguente stima per funzioni a variazione limitata:

Teorema 5.2.9. *Sia X uno spazio metrico completo, connesso per archi, misurato con una misura doubling, μ, che supporta una disuguaglianza debole $(1,1)$-Poincaré. Siano $u \in L^1_{loc}(X)$ e ν una misura positiva, finita su X. Allora $u \in BV(X)$ e solo se esistono due costanti $\sigma \geq 1$ e $C_0 > 0$ tale che la disuguaglianza*

$$|u(x) - u(y)| \leq C_0\, d(x,y)\, \left[M_{\sigma\, d(x,y),\nu}(x) + M_{\sigma\, d(x,y),\nu}(x)\right]$$

vale per μ-q.o. $x, y \in X$.

Bibliografia

[1] L. Ambrosio (1997), *Corso introduttivo alla Teoria Geometrica della Misura ed alle Superfici Minime*, Scuola Normale Superiore Pisa. Pantograf s.n.c. Genova.

[2] L. Ambrosio (2002), *Fine properties of sets of finite perimeter in doubling metric measure spaces*, Set Valued Anal. 10(2–3), 111–128.

[3] L. Ambrosio, P. Tilli (2004), *Topics in Analysis in Metric Spaces*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, Oxford University Press, USA.

[4] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara (2000), *Functions of bounded variation and free discontinuity problems* Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.

[5] R. A. Adams, J. J. F. Fournier (2003), *Sobolev Spaces*, Pure and applied Mathematics series, Academic Press.

[6] H. Brezis (2010), *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York.

[7] N. L. Carothers (2004), *A Short Course on Banach Space Theory*, Cambridge University Press.

[8] D. L. Cohn (1993), *Measure theory*, Birkhäuser, Boston.

[9] E. De Giorgi (1954), *Su una teoria generale della misura* $(r-1)$*-dimensionale in uno spazio ad* r *dimensioni.*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 36 (1954), 191-213.

[10] E. De Giorgi, G. Letta (1977), *Une notion générale de convergence faible pour des fonctions croissantes d'ensemble*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 4, no 1. (1977), p. 61-99.

[11] N. J. Dunford, J. T. Schwartz (1958), *Linear operators. Part 1*, Interscience Publischers, Inc, New York.

[12] L. C. Evans, R. F. Grariepy (1992), *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Bocaraton (USA).

[13] H. Federer (1969), *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag.

[14] B. Fuglede (1957), *Extremal length and functional completion*, Acta Math. 98 (1957), 171–219.

[15] B. Franchi, P. Hajlasz, P. Koskela (1999), *Definitions of Soblev classes on metric spaces*, Annales de l'institut Fourier, tome 49, no. 6, pp. 1903-1924.

[16] M. Giaquinta, L. Martinazzi (2004) *An introduction to the regularity theory for elliptic systems, harmonic maps and minimal graphs*, Edizioni della Normale, Pisa.

[17] E. Giusti (1984), *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Birkhäuser. Boston.

[18] M. Gromov (1999), *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Birkhäuser, Boston, MA, 1999; based on the 1981 French original, MR 85e:53051, with appendices by M. Katz, P. Pansu, S. Semmes, translated from French by Sean Michael Bates.

[19] P. Hajlasz (1996), *Sobolev Spaces on an Arbitrary Metric Space*, Potential Analysis 5, pp. 403-415, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

[20] P. Hajlasz, *A new characterization of the Sobolev space*, (Dedicated to Professor Aleksander Pelczynski on the occasion of his 70th birthday.) Studia Math. 159 (2003), 263–275.

[21] P. Hajlasz (2003), *Sobolev spaces on metric-measure spaces.* (Heat kernels and analysis on manifolds, graphs, and metric spaces), 173-218, Contemp. Math. , 338, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[22] P. Hajlasz, P. Koskela (2000), *Sobolev met Poincaré.* Mem. Am. Math. Soc. 145(688).

[23] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[24] J. Heinonen, P. Koskela, *Quasiconformal maps on metric spaces with controlled geometry*, Acta Math. 181 (1998), 1–61.

[25] C. Jordan (1881), *Sur la série de Fourier*, C.R. Acad. Sci. Paris , 92 pp. 228–230.

[26] P. Koskela (2002), *Metric Sobolev Spaces*, Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications, Proceedings of the Spring School held in Prague, July 17-22, 2002, Vol. 7. Czech Academy of Sciences, Mathematical Institute, Praha, pp. 133-147.

[27] P. Lahti, H. Tuominem (2013), *A Pointwise Characterization of Functions of Bounded Variation on Metric Spaces*, Ricerche di Matematica Università degli Studi di Napoli Federico II.

[28] S. Lang (1993), *Real and Functional Analysis 3ed.*, Springer, New York.

[29] J. Luukkainen, E. Saksman (1998), *Every complete doubling metric space carries a doubling measure*, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 531–534.

[30] M. Jr. Miranda (2003), *Functions of bounded variation on "good" metric spaces*, J. Math. Pures Appl. (9) 82, no. 8, 975–1004.

[31] H.L. Royden (1969), *Real analysis*, Macmillan.

[32] A. Vitali (1905),*Sulle funzioni integrali*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 40 pp. 1021-1034.

[33] A. L. Volberg, S. V. Konyagin (1987), *On measures with the doubling condition*, Izv. Acad. Nauk SSSR 51 (1987), 666–675 (in Russian); English transl. Math. USSR Izv. 30 (1988), 629–638.