UNIVERSITÀ DI PISA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Serie lacunari e insiemi di Sidon

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Candidata: *Valeria De Mattei*

Relatore: *Prof. Paolo Acquistapace*

Anno Accademico 2010/2011

Indice

Capitolo 1

Introduzione

La storia delle serie lacunari ha inizio con Weierstrass e Hadamard, se non con Riemann. Secondo Weierstrass,[W], Riemann nel 1861 disse ai propri studenti che la funzione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2}$$

non è derivabile in alcun punto. Poiché Weierstass non riuscì a dimostrare questa affermazione (che a quanto pare ancora adesso non è stata nè provata nè confutata) fornì il suo celebre esempio di una funzione continua mai derivabile:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos \lambda^n x,$$

dove λ è un intero dispari strettamente maggiore di 1 e $a \in (0,1)$ tale che $a\lambda > 1 + \frac{3\pi}{2}$. Questo esempio fu poi generalizzato e perfezionato da Hardy [H]. La teoria delle serie trigonometriche lacunari ha poi abbandonato le tematiche delle origini sviluppandosi ampiamente in altre direzioni.([K],[M]).

La presente tesi si occupa delle serie trigonometriche lacunari e di una loro generalizzazione, che è basata sull'introduzione di particolari insiemi di interi, detti insiemi di Sidon. Le serie lacunari sono serie trigonometriche 'sparse', il cui spettro, vale a dire l'insiemi degli indici interi a cui corrisponde un coefficiente non nullo, è via via sempre più rado, nel senso che la distanza tra due indici successivi aumenta non meno rapidamente di una progressione geometrica di ragione maggiore di 1.

Dopo una prima parte in cui viene fissata la notazione e vengono enunciati i risultati classici necessari per la trattazione, si entra nel vivo dell'argomentazione, iniziando a discutere le proprietà delle serie lacunari. La caratteristica principale delle serie lacunari è costituita dalle loro buone proprietà di convergenza: dalla convergenza L^2 si deduce la convergenza quasi ovunque e, viceversa, dalla convergenza in un insieme di misura positiva si deduce la convergenza L^2. Dai teoremi emerge il principio che una serie lacunare che si 'comporta bene' in un insieme di misura positiva si 'comporta bene' ovunque: questo fatto è anche confermato da alcuni teoremi sulle serie di potenze che conducono ad un risultato classico, il teorema di Hadamard.

Nella seconda parte della tesi si cambia leggermente punto di vista, guardando le serie lacunari come serie di Fourier di funzioni periodiche con spettro contenuto in particolari insiemi di interi: a tale scopo si introducono gli insiemi di Sidon e si studiano le proprietà di convergenza delle serie di Fourier delle funzioni con spettro contenuto in tali insiemi. Quindi si passa alla costruzione di un esempio di insieme di Sidon e, attraverso diversi lemmi preliminari, si arriva a dimostrare che gli insiemi di Hadamard sono di Sidon: in questo modo si stabilisce il nesso fondamentale tra serie lacunari e insiemi di Sidon. Tuttavia gli insiemi di Hadamard (e anche le loro unioni finite) non esauriscono la ben più vasta gamma di insiemi di Sidon: nella parte finale della tesi, si fornisce un esempio di insieme di Sidon che non è di Hadamard.

Lo studio degli insiemi di Sidon e delle serie lacunari costituisce un campo di ricerca tuttora assai attivo, ricco di sviluppi e generalizzazioni da vari punti di vista. Vale la pena di citare, tra i tanti contributi all'argomento, l'articolo [LQR] dove si studiamo classi di insiemi collegati a quelli di Sidon, ma più generali. Naturalmente tutti questi interessanti aspetti della teoria richiederebbero troppo spazio e dunque esulano dagli scopi di una tesi triennale.

Capitolo 2

Preliminari

In questa prima parte fisseremo la notazione e enunceremo i teoremi classici sulle serie di Fourier che ci serviranno nel corso della trattazione.

2.1 Qualche definizione e notazione.

Chiamiamo *serie trigonometriche* le serie della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

dove a_n, b_n sono numeri reali o complessi.

Data una funzione 2π periodica e integrabile f indichiamo con $\widehat{f}(n)$ l' n-esimo coefficiente di Fourier di f definito nel seguente modo:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Fissato un sottoinsieme E di $\mathbb{Z}$, concentriamo la nostra attenzione sulle funzioni $2\pi-$periodiche che hanno spettro contenuto nell'insieme E, dando la seguente:

Definizione 2.1.1 Una funzione 2π periodica e integrabile f si dice *E-spettrale* se $\widehat{f}(n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z} \setminus E$.

Per ogni $p \geq 1$, indichiamo con $L^p(-\pi, \pi)$ lo spazio delle funzioni per cui

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx < \infty,$$

dotato delle norma

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

e con $L_E^p(-\pi, \pi)$ lo spazio delle funzioni E - spettrali che sono in $L^p(-\pi, \pi)$. Per brevità indicheremo questi spazi con L^p e L_E^p.

Indichiamo con C lo spazio delle funzioni continue e con C_E lo spazio delle funzioni continue E- spettrali; con T lo spazio dei polinomi trigonometrici e con T_E lo spazio dei polinomi trigonometrici E- spettrali. Osserviamo che L_E^p è sottospazio chiuso di L^p, C_E è un sottospazio chiuso di C, T_E è un sottospazio chiuso di T. Mostriamo, per esempio, che L_E^p è sottospazio chiuso di L^p : sia $\{u_n\}$ una successione contenuta in L_E^p che converge a u in L^p. Allora $\widehat{u_n}(k) \to \widehat{u}(k)$ per $n \to \infty$ in quanto

$$|\widehat{u_n}(k) - \widehat{u}(k)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u_n(x) - u(x)| dx = \|u_n - u\|_1 \leq \|u_n - u\|_p \to 0$$

per $n \to \infty$. Quindi se $k \notin E$, allora $\widehat{u}(k)$ è limite di una successione di termini nulli e quindi $\widehat{u}(k) = 0$.

Infine per $1 \leq p \leq \infty$ denotiamo con $\ell^p(E)$ lo spazio delle successioni ϕ definite su E a valori complessi tali che siano finiti

$$\|\phi\|_p = \left(\sum_{n \in E} |\phi(n)|^p \right)^{1/p}$$

se $p < \infty$, e

$$\|\phi\|_\infty = \sup_{n \in E} |\phi(n)|$$

se $p = \infty$; indichiamo con $c_0(E)$ l'insieme delle $\phi \in \ell^\infty(E)$ tali che

$$\lim_{n \in E, |n| \to \infty} |\phi(n)| = 0.$$

Se S è un insieme di funzioni definite su $\mathbb{Z}$, indichiamo con $S|E$ l'insieme delle funzioni definite su E che sono restrizione a E di funzioni di S.

2.2 Risultati classici

Consideriamo l'applicazione

$$\mathfrak{F} : f \mapsto \left\{ \widehat{f}(n) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

che a una funzione $2\pi-$ periodica associa la successione data dai suoi coefficienti di Fourier.

Osserviamo che

$$\mathfrak{F}(L^1) \subseteq c_0(\mathbb{Z}),$$

in virtù del

Lemma 2.2.1 (**di Riemann – Lebesgue**) *Per ogni* $f \in L^1$

$$\lim_{|n| \to \infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

Inoltre

$$\mathfrak{F}(L^2) = \ell^2$$

in virtù dei due seguenti risultati:

Teorema 2.2.2 (**di Riesz – Fischer**) *Sia* $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ *una successione di numeri complessi tale che*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty;$$

allora esiste una funzione $f \in L^2$ *tale che* $\widehat{f}(n) = c_n$ *per ogni intero.*

Teorema 2.2.3 (**identità di Bessel**) *Per ogni funzione* f *appartenente a* $L^2(-\pi, \pi)$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Da 2.2.2 segue che $\ell^2 \subseteq \mathfrak{F}(L^2)$, da 2.2.3 $\mathfrak{F}(L^2) \subseteq \ell^2$, per cui abbiamo l'uguaglianza tra i due insiemi.

Nel corso della trattazione ci sarà utile il seguente teorema sulla convoluzione di funzioni:

Teorema 2.2.4 *Se $f \in L^1$ e $g \in L^p$ per $1 \leq p \leq \infty$, allora $f * g \in L^p$ e*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Faremo anche uso di questi fondamentali risultati di analisi funzionale:

Teorema 2.2.5 (della mappa aperta) *Siano X e Y due spazi di Banach, e sia $T : X \to Y$ un operatore lineare suriettivo e continuo. Allora T è un'applicazione aperta.*

Teorema 2.2.6 *Sia K un compatto e sia $\mathcal{T}$ un funzionale lineare, continuo e positivo definito su $C(K)$. Allora esiste una misura μ finita definita sui boreliani di K tale che per ogni $f \in C(K)$*

$$\mathcal{T}(f) = \int_K f(x) d\mu.$$

2.3 Lo spazio delle misure con segno

Possiamo generalizzare il concetto di misura prendendo in considerazione misure che assumono anche valori negativi.

Definizione 2.3.1 Dato uno spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$ si defnisce *misura con segno* un'applicazione

$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

tale che $\mu(\varnothing) = 0$ e per ogni successione $\{E_n\}$di elementi disgiunti di $\mathcal{A}$ vale che

$$\mu\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n)$$

purché $\sum |\mu(E_n)| < \infty$.

Il seguente risultato ci autorizza a esprimere le misure con segno come differenza di misure positive.

Teorema 2.3.2 (decomposizione di Hahn) *Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile e sia μ una misura con segno su tale spazio. Allora esistono due insiemi misurabili E e F tali che*

1. *$E \cup F = X$ e $E \cap F = \varnothing$;*

2. *$\mu(A) \geq 0$ per ogni misurabile $A \subseteq E$;*

3. *$\mu(B) \leq 0$ per ogni misurabile $B \subseteq F$.*

Inoltre la decomposizione è unica a meno di insiemi di misura nulla.

A questo punto, per ogni $A \in \mathcal{A}$, possiamo considerare le due misure positive

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap E)$$

$$\mu^-(A) = -\mu(A \cap F)$$

e quindi decomporre μ come

$$\mu = \mu^+ - \mu^-.$$

Definiamo *variazione* di μ la misura $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ e *variazione totale* di μ il valore $\|\mu\| \doteqdot |\mu|(X) = \mu^+(X) + \mu^-(X)$.

Possiamo a questo punto definire gli integrali di misure con segno nel seguente modo:

Definizione 2.3.3 Sia μ una misura con segno su X e siano μ^+ e μ^- misure positive tali che $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Sia f una funzione misurabile rispetto alle misure μ^+e μ^-: diciamo che f è μ-sommabile se è μ^+-sommabile e μ^--sommabile. In tale caso definiamo l'integrale di f rispetto a μ come

$$\int_X f(s) d\mu(s) = \int_X f(s) d\mu^+(s) - \int_X f(s) d\mu^-(s).$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\left| \int_X f(s) d\mu(s) \right| &= \left| \int_X f(s) d\mu^+(s) - \int_X f(s) d\mu^-(s) \right| \\
&\leq \int_X |f(s)| d\mu^+(s) + \int_X |f(s)| d\mu^-(s) \\
&= \int_X |f(s)| d|\mu|(s).
\end{aligned}$$

Sia $M(X)$ lo spazio delle misure con misure con segno su X a variazione totale finita: resta perciò ben definita una somma tra misure e una moltiplicazione per numeri reali; in particolare lo spazio $M(X)$ dotato di queste operazioni risulta una spazio vettoriale reale. Inoltre la variazione totale definisce sullo spazio $M(X)$ una norma con cui questo diventa uno spazio di Banach.

Avremo bisogno delle seguenti definizioni:

Definizione 2.3.4 Sia (μ_n) una successione di misure in $M(X)$. Diciamo che (μ_n) è limitata se

$$\sup_n \|\mu_n\| < \infty.$$

Definizione 2.3.5 Siano (μ_n) e μ contenute in $M(X)$. Si dice che μ_n converge a μ debolmente se per ogni $u \in C$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \int_X u d\mu_n = \int_X u d\mu.$$

Date queste due definizioni, possiamo enunciare il seguente risultato, analogo al teorema di Bolzano-Weierstrass per successioni limitate:

Proposizione 2.3.6 Sia (μ_n) una successione di misure limitata. Allora esiste una sottosuccessione (μ_{n_k}) di (μ_n) che converge debolmente a una misura di $M(X)$.

Applichiamo queste definizioni e questi risultati al caso $X = [-\pi, \pi]$.

Denotiamo semplicemente con M lo spazio delle misure con segno su $[-\pi, \pi]$ con variazione totale finita; dotiamo questo spazio della norma

$$\|\mu\|_M = \frac{\|\mu\|}{2\pi}.$$

Per ogni funzione f $\mu-$integrabile definiamo

$$\mu(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\mu(x).$$

Per ogni misura μ definiamo le misure $\check{\mu}$ e μ^* come le misure per cui

$$\check{\mu}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-x) d\mu,$$

$$\mu^*(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(-x)} d\mu.$$

Per ogni $\mu \in M$ definiamo

$$\widehat{\mu}(n) = \mu\left(e^{-inx}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}d\mu(x).$$

Indichiamo con M_E lo spazio delle misure E- spettrali, cioè le misure per cui $\widehat{\mu}(n) = 0$ per ogni n non appartenente a E.

Osserviamo che se μ_n converge debolmente a μ per $n \to \infty$, allora per ogni k $\widehat{\mu}_n(k) \to \widehat{\mu}(k)$ per $n \to \infty$; infatti

$$\widehat{\mu}_n(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}d\mu_n \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}d\mu = \widehat{\mu}(n),$$

essendo e^{-inx} una funzione continua.

In modo analogo al prodotto di convoluzione tra funzioni integrabili possiamo definire la convoluzione tra misure e funzioni nel seguente modo:

Definizione2.3.7 Sia $f \in L^p$ e sia $\mu \in M$. Diciamo prodotto di convoluzione tra f e μ

$$f * \mu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)d\mu(s).$$

La convoluzione tra misure e funzioni gode di analoghe proprietà a quelle della convoluzione tra funzioni, come si evince dai seguenti risultati.

Proposizione 2.3.8 *Sia* $f \in L^1$ *e sia* $\mu \in M$. *Allora* $f * \mu \in L^1$ *e*

$$\|f * \mu\|_1 \leq \|f\|_1 \|\mu\|_M.$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}\|f * \mu\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f * \mu| dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-s)| d\mu(s) dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-s)| dx}_{\|f\|_1} d\mu(s) = \|f\|_1 \|\mu\|_M\end{aligned}$$

□

Proposizione 2.3.9 *Sia* $f \in L^\infty$ *e sia* $\mu \in M$. *Allora* $f * \mu \in L^\infty$ *e*

$$\|f * \mu\|_\infty \leq \|\mu\|_M \|f\|_\infty.$$

Dimostrazione

$$|f * \mu| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) d\mu(s) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-s)| d|\mu|(s) \leq \|f\|_\infty \|\mu\|_M.$$

□

Proposizione 2.3.10 *Sia* $f \in L^1$ *e sia* $\mu \in M$. *Allora per ogni* $n \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{f * \mu}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{\mu}(n).$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}\widehat{f * \mu}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * \mu)(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) d\mu(s) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) e^{-in(x-s)} dx}_{\widehat{f}(n)} e^{-ins} d\mu(s) = \widehat{f}(n)\widehat{\mu}(n).\end{aligned}$$

□

Possiamo generalizzare il teorema 2.2.6 con il seguente:

Teorema 2.3.11 *Sia* K *un compatto e sia* $\mathcal{T}$ *un funzionale lineare e continuo definito su* $C(K)$. *Allora esiste una misura* μ *(con segno) finita definita sui boreliani di* K *tale che per ogni* $f \in C(K)$

$$\mathcal{T}(f) = \int_K f(x) d\mu.$$

2.4 Punti di Lebesgue

In questo paragrafo di occupiamo della nozione di punto di Lebesgue e di un importante risultato ad essa correlato, che ci servirà nello studio delle proprietà di convergenza delle serie lacunari. Iniziamo con la seguente

Definizione 2.4.1 Sia f una funzione 2π periodica e sommabile. Un punto $x_0 \in [0, 2\pi]$ si dice *punto di Lebesgue* per f se $f(x_0) \in \mathbb{R}$ ed esiste

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{x_0 - h}^{x_0 + h} |f(t) - f(x_0)| \, dt = 0.$$

Vale la seguente fondamentale proprietà:

Teorema 2.4.2 (di Lebesgue) *Se f è 2π periodica e sommabile, allora quasi ogni $x \in [0, 2\pi]$ è punto di Lebesgue.*

Capitolo 3

Serie trigonometriche lacunari

In questa sezione parliamo di un particolare tipo di serie, dette lacunari, che godono di particolari e importanti proprietà di convergenza. A questo scopo, diamo la seguente:

Definizione 3.1 Si dice *lacunare* una serie trigonometrica della forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{n_k}(x),$$

per cui esiste un reale q tale che $n_{k+1}/n_k > q > 1$ per ogni k.

Data una serie lacunare come sopra possiamo considerare

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right).$$

Prima di procedere con la discussione sui teoremi di convergenza, abbiamo bisogno di qualche considerazione sui metodi di somma, strumento fondamentale nello studio delle serie lacunari.

3.1 Convergenza (C, k) e altri metodi di somma

Consideriamo una generica serie $\sum u_n$. Diciamo che essa possiede un gap (p, q) se $u_i = 0$ per $p < i \leq q$. Consideriamo ora la successione delle somme parziali $n-$esime $s_0, s_1, ...$ e notiamo che la serie ha un gap (p, q) se e solo se $s_p = s_{p+1} = ... = s_q$. Definiamo

$$S_n^0 = s_n, \ \ S_n^k = S_0^{k-1} + ... + S_n^{k-1};$$

$$A_n^0 = 1, \;\; A_n^k = A_0^{k-1} + ... + A_n^{k-1}.$$

Diciamo che $\sum u_n$ è sommabile (C, k) con somma s se

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{S_n^k}{A_n^k} = s.$$

Osserviamo che la sommabilità $(C, 0)$ è la convergenza ordinaria. Guardiamo il caso $k = 1$:

$$S_n^1 = S_0^0 + ... + S_n^0 = s_0 + ... + s_n;$$

$$A_n^1 = A_0^0 + ... + A_n^0 = n + 1.$$

Definiamo

$$\sigma_n = \frac{s_0 + ... + s_n}{n+1}.$$

Quindi la serie è sommabile $(C, 1)$ se esiste finito

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + ... + s_n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sigma_n.$$

Possiamo enunciare ora il seguente:

Teorema 3.1.1 *Sia $\sum u_n$ una serie con infnite gap (m_k, m'_k) tali che $m'_k/m_k > q > 1, m_k \to \infty$ per $k \to \infty$. Supponiamo inoltre che la serie sia sommabile $(C, 1)$ con somma s. Allora $s_{m_k} \to s$.*

Dimostrazione Possiamo supporre $s = 0$. Poiché $s_{m_k} = s_{m_k+1} = ... = s_{m'_k-1}$

$$(m'_k - m_k)\, s_{m_k} = s_{m_k} + s_{m_k+1} + ... + s_{m'_k-1};$$

inoltre, poiché $s_0 + ... + s_n = (n+1)\,\sigma_n$,

$$(m'_k - m_k)\, s_{m_k} = m'_k \sigma_{m'_k-1} - m_k \sigma_{m_k-1}.$$

Poiché per ipotesi σ_m converge a $s = 0$, $m'_k \sigma_{m'_k-1} = o\,(m'_k)$ e $m_k \sigma_{m_k-1} = o\,(m_k)$ per $k \to \infty$; in particolare

$$(m'_k - m_k)\, s_{m_k} = o\,(m'_k) + o\,(m_k) = o\,(m'_k) = o\,(m'_k - m_k)\,.$$

Da ciò segue che s_{m_k} tende a $s = 0$ per $k \to \infty$.

$\square$

Consideriamo una matrice di entrambe le dimensioni infinite, cioè del tipo

$$M = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Data la matrice M, ad ogni successione $\{s_0, s_1, ...\}$ possiamo associare la successione $\{\sigma_0, \sigma_1, ...\}$ dove per ogni n

$$\sigma_n = a_{n0}s_0 + a_{n1}s_1 + ... + a_{nm}s_m + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}s_k,$$

supponendo che la serie che definisce σ_n converga per ogni n. Chiamiamo σ_n *media lineare* di s_n.

Definizione 3.1.2 Una serie $\sum u_n$ con somme parziali s_n si dice M *sommabile con somma* s se la successione $\{\sigma_n\}$ definita come sopra tende a s per $n \to \infty$.

Supponiamo che esistano finiti i seguenti numeri:

$$N_n = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}| \ , \ A_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \ .$$

In questa situazione possiamo dare la seguente:

Definizione 3.1.3 Si dice che la matrice M è *regolare* se:

1. $\lim_{n \to +\infty} a_{nm} = 0$ per ogni m;
2. (N_n) è una successione limitata;
3. $\lim_{n \to +\infty} A_n = 1$.

Osserviamo che la sommabilità $(C, 1)$ definita sopra è un caso particolare di $M-$sommabilità. Consideriamo infatti la matrice $M = (a_{ij})$, di dimensioni infinite, tale che

$$a_{nk} = \begin{cases} 1/n + 1 & se \quad k \leq n \\ 0 & se \quad k > n \end{cases} .$$

Allora la media lineare di s_n è data da

$$\sigma_n = a_{n0}s_0 + a_{n1}s_1 + ... + a_{nm}s_m + ... = \frac{s_0 + ... + s_n}{n+1}$$

e quindi la serie di somme parziali s_n è M sommabile se esiste finito

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + ... + s_n}{n+1},$$

cioè se la serie è sommabile $(C, 1)$.

Un altro esempio di metodo di somma è il metodo di Abel:

Definizione 3.1.4 Una serie $\sum u_n$ è *sommabile con metodo di Abel con somma* s se

1. la serie $\sum u_n x^n$ è convergente per $|x| < 1$;
2. $\lim_{\epsilon\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(1-\epsilon)^n = s$.

Prima di passare alla discussione sulle serie lacunari concludiamo questo paragrafo con un importante teorema sulla convergenza quasi ovunque delle successioni $(\sigma_m(x))$.

Teorema 3.1.5 (di Lebesgue) *Sia f sommabile e sia x punto di Lebesgue per f. Allora $\sigma_m(x)$ converge a $f(x)$ per $m \to \infty$.*

Dimostrazione Consideriamo, per $t \in (0, \pi]$, il nucleo di Fejér

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(t) = \frac{1}{N+1}\frac{\sin^2\left(\dfrac{N+1}{2}t\right)}{\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)},$$

dove con D_n indichiamo il nucleo di Dirichlet

$$D_N(t) = 1 + \sum_{|k|=1}^{N} e^{ikt}.$$

Osserviamo che per $t \in (0, \pi]$, vale

$$D_N(t) = \frac{\sin\left(N + \dfrac{1}{2}\right)t}{\sin\dfrac{t}{2}};$$

inoltre poiché, per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, vale la diseguaglianza

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x,$$

e per ogni x vale $\sin x \leq x$, possiamo concludere che, per $t \in (0, \pi]$,

$$D_\nu(t) \leq \frac{(\nu + 1/2)\, t}{t/\pi} = \pi \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \leq \pi\,(N+1)$$

per ogni $\nu \leq N$. Da ciò segue che

$$F_N(t) \leq \frac{\pi(N+1)^2}{N+1} = \pi\,(N+1)\,.$$

Ci sarà utile anche la seguente stima:

$$F_N(t) \leq \frac{1}{(N+1)\cdot \sin^2 t/2} \leq \frac{\pi^2}{(N+1)t^2}.$$

Mostriamo che

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) F_N(x-y)dy.$$

Per le somme parziali n-esime vale la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} s_N(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{|k|=1}^{N} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(1 + \sum_{|k|=1}^{N} e^{ik(x-t)}\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t)dt, \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}
\sigma_m(x) &= \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} s_k(x) \\
&= \frac{1}{(N+1)}\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_k(x-t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)F_N(x-t)dt.
\end{aligned}$$

Poiché inoltre

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(s)ds = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} D_n(s)ds}_{2\pi} = 1,$$

possiamo dedurre che

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[f\left(x-t\right) - f\left(x\right)\right] F_n(t)dt.$$

Poniamo

$$\phi_x(t) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t) - 2f(x));$$

allora, con un cambiamento di variabile nel primo integrale,

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \left[f\left(x-t\right) - f\left(x\right)\right] F_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left[f\left(x-t\right) - f\left(x\right)\right] F_n(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left[f\left(x+t\right) - f\left(x\right)\right] F_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left[f\left(x-t\right) - f\left(x\right)\right] F_n(t)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \phi_x(t)F_n(t)dt.
\end{aligned}$$

Utilizzando le due diseguaglianze sopra dimostrate per il nucleo di Fejér, possiamo allora stimare $|\sigma_n(x) - f(x)|$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} |\phi_x(t)|\, F_n(t)dt \\
&\leq \underbrace{(n+1)\int_{0}^{1/n} |\phi_x(t)|\, dt}_{P} + \underbrace{\frac{\pi}{n+1}\int_{1/n}^{\pi} \frac{|\phi_x(t)|}{t^2}dt}_{Q}.
\end{aligned}$$

Poniamo

$$\Phi(t) = \int_0^t |\phi_x(s)|\, ds$$

e stimiamo ora i valori di P e Q. Per quanto riguarda P

$$P \leq (n+1)\,\Phi(1/n) \leq 2n\Phi(1/n)\,;$$

inoltre

$$\begin{aligned}
2n\Phi\left(\frac{1}{n}\right) &= n\int_0^{1/n} |f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\, dt \\
&\leq n\int_0^{1/n} |f(x+t)-f(x)|dt + n\int_0^{1/n} |f(x-t)-f(x)|dt \\
&= n\int_0^{1/n} |f(x+t)-f(x)|dt + n\int_{-1/n}^{0} |f(x+t)-f(x)|dt \\
&= n\int_{-1/n}^{1/n} |f(x+t)-f(x)|dt \\
&= n\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} |f(s)-f(x)|ds \to 0,
\end{aligned}$$

essendo x punto di Lebesgue.

Consideriamo ora Q : integrando per parti, otteniamo che

$$Q = \frac{\pi}{n+1}\left[\Phi(t)\frac{1}{t^2}\right]_{1/n}^{\pi} + \frac{2\pi}{n+1}\int_{1/n}^{\pi} \frac{\Phi(t)}{t^3}dt.$$

Poiché $\Phi(t)t^{-2} \geq 0$ per ogni t, possiamo dire che

$$\frac{\pi}{n+1}\left[\Phi(t)\frac{1}{t^2}\right]_{1/n}^{\pi} \leq \frac{1}{(n+1)\pi}\Phi(\pi);$$

per quanto riguarda il secondo addendo iniziamo a dimostrare che $\Phi(t)t^{-3} = o\left(1/t^2\right)$ per $t \to 0$: con calcoli analoghi a quelli fatti per $2n\Phi(1/n)$, possiamo concludere che

$$\frac{\Phi(t)}{t} \leq \frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} |f(s)-f(x)|ds,$$

e quindi

$$\lim_{t\to 0} t^2 \frac{\Phi(t)}{t^3} \leq \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |f(s) - f(x)| ds = 0,$$

poiché x è punto di Lebesgue.

Osserviamo che allora

$$\int_0^{\pi} \frac{\Phi(t)}{t^3} dt < \infty.$$

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $\left| t^2 \frac{\Phi(t)}{t^3} \right| < \varepsilon$ per $|t| < \delta$. Sia n tale che $1/n < \delta$: allora

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{\Phi(t)}{t^3} \right| dt = \int_0^{1/n} \left| \frac{\Phi(t)}{t^3} \right| dt + \int_{1/n}^{\pi} \left| \frac{\Phi(t)}{t^3} \right| dt \leq \int_0^{1/n} \frac{\varepsilon}{t^2} dt + \int_{1/n}^{\pi} \left| \frac{\Phi(t)}{t^3} \right| dt < \infty.$$

Allora

$$\frac{2\pi}{n+1} \int_{1/n}^{\pi} \frac{\Phi(t)}{t^3} dt \leq \frac{2\pi}{n+1} \int_0^{\pi} \frac{\Phi(t)}{t^3} dt \to 0$$

per $n \to \infty$. Quindi

$$P \to 0 \text{ e } \ Q \to 0$$

per $n \to \infty$, cioè σ_n converge a f in tutti i punti di Lebesgue.

□

Corollario 3.1.6 *Se f è sommabile, allora σ_n converge a f quasi ovunque.*

Dimostrazione Poiché quasi ogni punto è di Lebesgue, ottengo la convergenza quasi ovunque di σ_n.

□

3.2 Proprietà di convergenza delle serie lacunari

Passiamo adesso allo studio delle serie lacunari. La prima fondamentale proprietà di convergenza è espressa dal seguente:

Teorema 3.2.1 *Se la serie $\sum \rho_k^2$ è convergente, allora $\sum A_{n_k}(x)$ converge quasi ovunque.*

Dimostrazione Consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \cos nx + \tilde{b}_n \sin nx,$$

dove $\tilde{a}_n = a_k$ se $n = n_k$, $\tilde{a}_n = 0$ altrimenti (e in modo analogo per b).

Sia $s_m(x)$ la somma parziale n-esima della serie e sia

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} s_k(x).$$

Per il corollario 3.1.6 σ_m converge quasi ovunque, quindi ci basta dimostrare che $\sigma_m(x) - s_m(x) \to 0$ per ogni x. Notiamo che ci troviamo esattamente nelle ipotesi del teorema 3.1.1: possiamo perciò concludere che $\sigma_m(x) - s_m(x) \to 0$ e quindi che la serie $\sum A_{n_k}(x)$ converge quasi ovunque.

□

Possiamo dimostrare che vale anche il viceversa, cioè se $\sum A_{n_k}(x)$ converge in un insieme di misura positiva, allora $\sum \rho_k^2$ converge: per farlo, abbiamo bisogno del seguente

Lemma 3.2.2 *Sia $\mathcal{E} \subset (0, 2\pi)$ un insieme di misura positiva, e siano λ e q due reali maggiori di 1. Allora esiste un intero $h_0 = h_0(\mathcal{E}, \lambda, q)$ tale che per ogni polinomio trigonometrico $P(x) = \sum (a_j \cos n_j x + b_j \sin n_j x)$ con $n_{j+1}/n_j > q > 1$ e $n_1 \geq h_0$ abbiamo che*

$$\frac{1}{\lambda} |\mathcal{E}| \frac{1}{2} \sum \left(a_j^2 + b_j^2\right) \leq \int_{\mathcal{E}} P^2(x) dx \leq \lambda |\mathcal{E}| \frac{1}{2} \sum \left(a_j^2 + b_j^2\right).$$

Le diseguaglianze valgono anche se P è una serie infinita con $\sum \left(a_j^2 + b_j^2\right) < \infty$.

Dimostrazione Scriviamo P in notazione complessa come

$$P(x) = \sum c_\nu e^{i n_\nu x},$$

dove $n_{-\nu} = -n_\nu$. Poiché, per ogni $k > 0$,

$$c_k^2 + c_{-k}^2 = \frac{a_k^2 + b_k^2}{2},$$

si ha

$$\sum_{\nu} |c_\nu|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k>0} \left(a_k^2 + b_k^2\right).$$

P è a valori reali, quindi coincide con il suo coniugato: possiamo dunque scrivere

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{E}} P^2(x)dx &= \int_{\mathcal{E}} \left(\sum c_\nu e^{in_\nu x}\right) \cdot \left(\sum \bar{c}_\nu e^{-in_\nu x}\right) dx \\ &= |\mathcal{E}| \sum |c_\nu|^2 + \sum_{\mu \neq \nu} c_\mu \bar{c}_\nu \int_{\mathcal{E}} e^{i(n_\mu - n_\nu)x} dx.\end{aligned}$$

Sia $f(x) = \chi_{\mathcal{E}}(x)$ la funzione caratteristica di $\mathcal{E}$ e siano γ_m i coefficienti di Fourier di f. Allora

$$\int_{\mathcal{E}} e^{i(n_\mu - n_\nu)x} dx = 2\pi \gamma_{n_\nu - n_\mu}.$$

Dalla diseguaglianza di Schwarz segue che

$$2\pi \sum_{\mu \neq \nu} c_\mu \bar{c}_\nu \gamma_{n_\nu - n_\mu} \leq 2\pi \left(\sum_{\mu,\nu} |c_\mu c_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{\mu \neq \nu} |\gamma_{n_\nu - n_\mu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Asseriamo che esiste un numero $\Delta = \Delta(q)$ tale che nessun intero N può essere rappresentato nella forma $n_\nu - n_\mu$ con $\mu \neq \nu$ in più di Δ modi diversi. Per dimostrarlo, possiamo assumere che $0 < \mu < \nu$ e che N sia della forma $n_\nu + n_\mu$ o $n_\nu - n_\mu$.

Iniziamo considerando il caso in cui $N = n_\nu + n_\mu$. Allora $\frac{1}{2}N < n_\nu < N$ essendo $n_\nu > n_\mu$; inoltre, poiché n_ν cresce almeno quanto q^ν, il numero degli n_ν per cui $\frac{1}{2}N < n_\nu < N$ non può superare $m+1$, dove $q^m = 2$: infatti

$$n_{\nu+m+1} \geq q^{m+1} n_\nu > 2 \cdot \frac{N}{2} = N.$$

Consideriamo ora il caso in cui $N = n_\nu - n_\mu$. Poiché $\mu < \nu$, $n_\mu < n_\nu/q$ e quindi $N > n_\nu - n_\nu/q$ e quindi $n_\nu < Nq/(q-1)$. In particolare avremo che

$$N < n_\nu < \frac{qN}{q-1},$$

e quindi il numero degli n_ν che soddisfano la relazione è limitato.

Possiamo concludere che in ogni caso esiste il numero Δ che cercavamo.

Consideriamo

$$\sum_{\mu \neq \nu} |\gamma_{n_\nu - n_\mu}|^2 = 2 \cdot \sum_{\mu < \nu} |\gamma_{n_\nu - n_\mu}|^2.$$

Sia h il più piccolo intero scrivibile nella forma $n_\nu - n_\mu$ con $\mu < \nu$: allora la somma che stiamo considerando parte da h e vale dunque la seguente maggiorazione:

$$\sum_{\mu \neq \nu} |\gamma_{n_\nu - n_\mu}|^2 \leq 2\Delta \sum_{k=h}^{\infty} |\gamma_k|^2.$$

Inoltre

$$n_\nu - n_\mu \geq n_\nu - n_{\nu-1} \geq n_\nu \left(1 - \frac{1}{q}\right) \geq n_1 \left(1 - \frac{1}{q}\right),$$

per cui

$$h \geq n_1 \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Dall'identità di Bessel segue che

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_\nu|^2 = \frac{|\mathcal{E}|}{2\pi} \leq 1.$$

Abbiamo ricavato che

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}} P^2(x)dx - |\mathcal{E}| \sum |c_\nu|^2 &= \sum_{\mu \neq \nu} c_\mu \bar{c}_\nu \int_{\mathcal{E}} e^{i(n_\mu - n_\nu)x} dx \\ &= 2\pi \sum_{\mu \neq \nu} c_\mu \bar{c}_\nu \gamma_{n_\nu - n_\mu}, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathcal{E}} P^2(x)dx - |\mathcal{E}|\sum|c_\nu|^2\right| &\leq 2\pi\left(\sum_{\mu,\nu}|c_\mu c_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{\mu\neq\nu}|\gamma_{n_\nu-n_\mu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 2\pi\left(\sum_\mu\sum_\nu|c_\mu|^2|c_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{\mu\neq\nu}|\gamma_{n_\nu-n_\mu}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 2\pi\left(\sum_\mu|c_\mu|^2\right)\cdot\left(\sum_{k=h}^{\infty}|\gamma_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Scelgo $h_0\,(E,\lambda,\mu)$ tale che per $n_1 > h_0$ sia

$$2\Delta\left(\sum_{k=h}^{\infty}|\gamma_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{|\mathcal{E}|}{2\pi}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right),$$

e troviamo

$$\left|\int_{\mathcal{E}} P^2(x)dx - |\mathcal{E}|\sum|c_\nu|^2\right| \leq |\mathcal{E}|\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\sum|c_\nu|^2.$$

Possiamo dunque concludere che

$$\begin{aligned}\frac{|\mathcal{E}|}{\lambda}\sum|c_\nu|^2 &= \left[1-\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right]|\mathcal{E}|\sum|c_\nu|^2\\ &\leq \int_{\mathcal{E}} P^2(x)dx \leq \left[1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right]|\mathcal{E}|\sum|c_\nu|^2\\ &= \left[1+\frac{\lambda-1}{\lambda}\right]|\mathcal{E}|\sum|c_\nu|^2 \leq \lambda|\mathcal{E}|\sum|c_\nu|^2,\end{aligned}$$

essendo $\lambda > 1$. Abbiamo così ottenuto la tesi nel caso di somma finita.

Se P è una serie infinita e $\sum\left(a_j^2+b_j^2\right) < \infty$, possiamo applicare il risultato già dimostrato per polinomi trigonometrici alle somme parziali P_n di P. Osserviamo che per il teorema di Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{E}} P_n^2(x)dx = \int_{\mathcal{E}} P^2(x)dx,$$

e quindi otteniamo la tesi anche per serie di questo tipo.

□

Passiamo finalmente a discutere la convergenza di $\sum \rho_k^2$ data la convergenza di $\sum A_{n_k}$ in un insieme di misura positiva, dimostrando un risultato un po' più generale.

Teorema 3.2.3 *Sia T un metodo di somma che soddisfa la prima e terza condizione di regolarità della definizione 3.1.3. Supponiamo che $\sum A_{n_k}(x)$ sia T sommabile in un insieme E di misura positiva. Allora $\sum \rho_k^2$ converge.*

Dimostrazione Denotiamo con β_{mn} gli elementi della matrice T. Per ipotesi per ogni $x \in E$ e per ogni m, la serie $\sum\limits_n \beta_{mn} s_n(x)$ converge con somma $\tau_m(x)$ e la successione $\tau_m(x)$ ammette limite finito per $m \to \infty$, che indichiamo con $\tau(x)$.

Iniziamo considerando il caso in cui la matrice T ha un numero finito di elementi non nulli su ogni riga. Poniamo $R_{mn} = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \beta_{mk}$. Allora

$$\begin{aligned}\tau_m(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{m,j} \sum_{i=1}^{j} A_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} \beta_{m,j} A_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i(x) R_{m,i} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{n_k}(x) R_{m,n_k}.\end{aligned}$$

Poiché ogni riga di T ha un numero finito di elementi non nulli, gli R_{mn} sono defnitivamente nulli in n e quindi la serie in esame ha un numero finito di termini non nulli.

Consideriamo gli insiemi del tipo

$$E_p = \left\{ x \in E : |\tau_m(x)| \leq p \, \forall m \right\};$$

poiché $\tau_m(x)$ ammette limite finito per ogni x, $E = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} E_n$. In particolare esiste un M tale che E_M ha misura positiva. Poniamo $\mathcal{E} = E_M$: allora $\mathcal{E}$ è un insieme di misura positiva tale che, per ogni m e per ogni x in $\mathcal{E}$, $|\tau_m(x)| \leq M$. Applichiamo il lemma 3.1.6 con $\lambda = 2$: allora esiste un intero h_0 tale che per ogni $n_1 > h_0$ vale la diseguaglianza del lemma. Osserviamo che possiamo assumere $n_1 > h_0$, poiché nello studio della convergenza della serie $\sum A_{n_k}(x)$ possiamo sempre buttare via i primi termini della somma. Otteniamo quindi le diseguaglianze:

$$\frac{1}{4}|\mathcal{E}| \sum_k \left(a_k^2 + b_k^2 \right) R_{m,n_k}^2 \leq \int_{\mathcal{E}} \tau^2(x) dx \leq M^2 |\mathcal{E}|,$$

da cui

$$\sum_k \left(a_k^2 + b_k^2\right) R_{m,n_k}^2 \leq 4M^2.$$

Sia K un intero positivo fissato; per la terza condizione di regolarità $R_{m,n_k} \to 1$ per $m \to \infty$. Quindi consideriamo

$$\sum_{k=1}^{K} \left(a_k^2 + b_k^2\right) R_{m,n_k}^2 \leq 4M^2,$$

e facciamo tendere m a infinito: otteniamo la diseguaglianza

$$\sum_{k=1}^{K} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \leq 4M^2,$$

da cui la tesi facendo tendere K a infinito.

Passiamo al caso generale in cui non ci sono limiti sulle righe di T. Sia

$$\tau_m^*(x) = \sum_{k=1}^{N(m)} A_{n_k}(x) R_{m,n_k},$$

dove $N(m)$ è abbastanza grande da soddisfare:

(a). $|\tau_m(x) - \tau_m^*(x)| < 1/m$ per ogni $x \in E \setminus E^m$, dove E^m è un sottoinsieme di E tale che $|E^m| < |E| \, 2^{-m-1}$.

(b). $\lim_{m\to\infty} (\beta_{m0} + \beta_{m1} + ... + \beta_{mN}) = 1.$

Dobbiamo verificare l'esistenza di tale $N(m)$. Per quanto riguarda il punto (a), l'esistenza di $N(m)$ è un'immediata conseguenza del seguente:

Teorema 3.2.4 (di Severini – Egorov). *Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurato con $\mu(X) < \infty$, e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili che converge q.o. in X ad una funzione f. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) < \varepsilon$, tale che $f_n \to f$ uniformemente in E^c per $n \to \infty$.*

Dimostrazione Per $m \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}^+$ poniamo

$$E_{k,m} = \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\};$$

allora si ha

$$\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\} \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} E_{k,m} \quad \forall k \in \mathbb{N}^+,$$

e quindi
$$\mu\left(\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} E_{k,m}\right)^c\right) = \mu\left(\bigcap_{m=0}^{\infty} E_{k,m}^c\right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$
Poiché $\mu(X) < \infty$ e gli insiemi $E_{k,m}^c$ sono decrescenti si ottiene

$$\lim_{m\to\infty} \mu(E_{k,m}^c) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Di conseguenza, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ possiamo scegliere $m_k \in \mathbb{N}$ tale che
$$\mu(E_{k,m_k}^c) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$
Dunque, posto $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{k,m_k}^c$, si ha

$$\mu(E) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{k,m_k}^c) < \varepsilon.$$

D'altra parte per ogni $x \in E^c$ si ha $x \in E_{k,m_k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, ossia

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \qquad \forall n \ge m_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

Ciò prova che per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ risulta

$$\sup_{x\in E^c} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{k} \qquad \forall n \ge m_k,$$

cioè la tesi.

□

Il punto (b) è invece garantito scegliendo $N(m)$ abbastanza grande in modo da soddisfare

$$\left|\sum_{k=N(m)+1}^{\infty} \beta_{mk}\right| < \frac{1}{m};$$

osserviamo che ciò è possibile poiché la serie $\sum_n \beta_{mn}$ è converge a un certo A_m per ogni m. Da questa condizione si ricava esattamente (b) poiché i resti $N(m)+1$-esimi tendono a zero e la successione degli A_m tende a 1.

Sia $E^* = \bigcup_n E^n$; allora

$$|E^*| \le \sum_n |E^n| < |E| \cdot \sum_n 2^{-n-1} = |E|,$$

quindi l'insieme $E \setminus E^*$ è di misura positiva. Inoltre per ogni $x \in E \setminus E^*$, $\tau_m^*(x)$ tende a un numero finito, grazie alla condizione 1. La condizione 2 invece assicura che possiamo considerare $\tau_m^*(x)$ come media lineare di s_n relativa a una matrice con un numero finito di termini non nulli su ogni riga. Quindi ci siamo ricondotti al caso precedentemente analizzato: il teorema è così completamente dimostrato.

□

Il teorema 3.2.3 mostra che una serie lacunare che si comporta bene in un insieme di misura positiva si comporta bene in $(0, 2\pi)$. Diamo un altro esempio di questo principio.

Teorema 3.2.5 *Supponiamo che $\sum A_{n_k}(x)$ converga in un insieme E di misura positiva a una funzione $f(x)$, che coincide con una funzione $g(x)$ definita in un intervallo $I = (\alpha, \beta)$ contenente E e analitica in I. Allora esiste un $\epsilon > 0$ tale che la serie*

$$\sum (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x) \rho^{n_k}$$

converge per $|z| < 1 + \epsilon$ con $z = \rho e^{ix}$.

Prima di procedere con la dimostrazione abbiamo bisogno di due risultati preliminari.

Lemma 3.2.6 *Sia $\{f_n\}$ una successione contenuta in L^r. Supponiamo che*

$$\left(\int_a^b |f_n(x) - f_m(x)|^r dx \right)^{1/r} \to 0$$

per $m, n \to \infty$. Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}$ di $\{f_n\}$ che converge per q.o. x in (a, b) .

Dimostrazione Per ogni i definiamo

$$\epsilon_i = \sup_{m,n \geq i} \left(\int_a^b |f_n(x) - f_m(x)|^r dx \right)^{1/r} .$$

Per ipotesi $\epsilon_i \to 0$, esiste una successione $\{n_i\}$ tale che $\sum \epsilon_{n_i}$ sia convergente. Applicando la diseguaglianza di Hölder, otteniamo che

$$\begin{aligned} \int_a^b |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| dx &\leq (b-a)^{1/r'} \left(\int_a^b |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|^r dx \right)^{1/r} \\ &\leq (b-a)^{1/r'} \epsilon_{n_k}. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}\int_a^b \sum_k |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| dx &= \sum_k \int_a^b |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| dx \\ &\leq (b-a)^{1/r'} \sum_k \epsilon_{n_k} < \infty;\end{aligned}$$

in particolare $\sum\limits_k \left| f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x) \right|$ converge per q.o. x in (a,b). Poichè la serie $\sum\limits_k \left[f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x) \right]$ converge assolutamente per q.o. x, esiste per q.o. x

$$f(x) = f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + ... = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}.$$

$\square$

Lemma 3.2.7 *Sia H un insieme misurabile contenuto in $(0, 2\pi)$. Allora esiste una successione $\{h_m\}$ tendente a zero per $m \to \infty$ tale che per q.o. x in H esiste un naturale $m_0(x)$ per cui per ogni $m > m_0(x)$ i punti $x \pm h_m$ sono contenuti in H.*

Dimostrazione Sia $f(x) = \chi_H(x)$ la funzione caratteristica di H. Sia $\{t_n\}$ una successione tendente a zero: poniamo

$$f_n(x) = \chi_H(x + t_n) - \chi_H(x).$$

In virtù della continuità delle traslazioni in L^r, siamo nelle ipotesi del lemma precedente e possiamo pertanto concludere che esiste $\{t_{n_k}\}$ tale che

$$\chi_H(x + t_{n_k}) - \chi_H(x) \to 0$$

per q.o. x in H. Poiché χ_H assume solo i valori 0,1 la successione è definitivamente nulla, cioè esiste un $m_0(x)$ tale che per ogni $m > m_0(x)$

$$\chi_H(x + t_{n_m}) = \chi_H(x),$$

cioè $x + t_{n_m} \in H$. Poniamo per semplicità di notazione $k_m = t_{n_m}$.

In modo analogo, possiamo considerare

$$\int_0^{2\pi} |\chi_H(x - k_n) - \chi_H(x)| dx$$

che tende a zero per $n \to \infty$. Riapplicando il lemma 3.2.6, esiste una sottosuccessione$\{k_{n_m}\}$ contenuta in $\{k_n\}$ tale che

$$\chi_H(x - k_{n_m}) - \chi_H(x) \to 0,$$

e quindi, definitivamente in m, $x - k_{n_m}$ appartiene a H. Ponendo $h_m = k_{n_m}$ per ogni m, otteniamo la nostra tesi.

$\square$

Torniamo al nostro teorema, dandone finalmente la dimostrazione:

Sia $p_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{p_0} < |E|$; per ogni $p \geq p_0$, in virtù del teorema di Severini-Egorov, esiste un sottoinsieme $E_p \subseteq E$, con $|E \setminus E_p| < \frac{1}{p}$, tale che la serie $\sum A_{n_k}(x)$ converge a $f(x)$ uniformemente in E_p. Sostituendo eventualmente E_p con $E_{p_0} \cup \cdots \cup E_p$, possiamo supporre che sia $E_p \subseteq E_{p+1}$.
Applichiamo il lemma 3.2.7 all'insieme E_p: esiste una successione infinitesima h_m tale che, per q.o. $x \in E_p$, si ha $x \pm h_m \in E_p$ definitivamente. Poiché f e g coincidono su E, fissato $x \in E_p$ esiste $m_0(x) \in \mathbb{N}$ tale che per $m \geq m_0(x)$ avremo la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned}
\frac{g(x+h_m) - g\,(x-h_m)}{2h_m} &= \frac{f(x+h_m) - f(x-h_m)}{2h_m} \\
&= \frac{1}{2h_m}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos n_k\,(x+h_m) + b_k \sin n_k\,(x+h_m))\right. \\
&\left. - \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos n_k\,(x-h_m) + b_k \sin n_k\,(x-h_m)).\right. \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} n_k\,[b_k \cos{(n_k x)} - a_k \sin{(n_k x)}]\,\frac{\sin{(n_k h_m)}}{n_k h_m}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|g'(x) - \sum_{k=1}^{N} n_k[b_k \cos n_k x - a_k \sin n_k x]\right| \leq \\
&\quad \leq \left|g'(x) - \frac{g(x+h_m) - g(x)}{2h_m}\right| + \\
&\quad + \left|\frac{f(x+h_m) - f(x)}{2h_m} - \sum_{k=1}^{N}[b_k \cos n_k x - a_k \sin n_k x]\frac{\sin h_m n_k}{h_m}\right| + \\
&\quad + \left|\sum_{k=1}^{N} n_k[b_k \cos n_k x - a_k \sin n_k x]\left[\frac{\sin h_m n_k}{h_m n_k} - 1\right]\right| = T_1 + T_2 + T_3.
\end{aligned}$$

Ora abbiamo

$$T_1 \to 0 \quad \text{per } m \to \infty,$$

mentre, fissato $\varepsilon > 0$, per convergenza uniforme risulta

$$T_2 = \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} [b_k \cos n_k x - a_k \sin n_k x] \frac{\sin h_m n_k}{h_m} \right| < \varepsilon \quad \forall N \geq \nu_\varepsilon, \ \forall m \geq m_0(x);$$

infine

$$T_3 \to 0 \quad \text{per } m \to \infty.$$

Si conclude allora che

$$\left| g'(x) - \sum_{k=1}^{N} n_k [b_k \cos n_k x - a_k \sin n_k x] \right| \leq \varepsilon \quad \forall N \geq \nu_\varepsilon,$$

il che prova la relazione

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} n_k [b_k \cos n_k x - a_k \sin n_k x] \quad \forall x \in E_p.$$

Questo ragionamento vale per ogni $p \geq p_0$, quindi la relazione precedente vale per ogni $x \in E' := \bigcup_{p \geq p_0} E_p$, ossia per q.o. $x \in E$.

Denotiamo rispettivamente con S, S', S''... la serie $\sum A_{n_k}$ e le sue derivate. Per il teorema 3.2.3, la serie $\sum n_k^2 \left(a_k^2 + b_k^2\right)$ è convergente; inoltre

$$S' = \sum_k n_k \left(-a_k \sin n_k x + b_k \cos n_k x\right).$$

Quindi per il teorema 3.2.1, esiste un sottoinsieme E_1 di E con $|E_1| = |E|$ tale che S' converge in E_1 con somma g'. In modo analogo, possiamo dimostrare l'esistenza di un sottoinsieme E_2 di E_1 con stessa misura tale che S''converge in E_2 con somma g'', e così via.

Sia $E^* = \bigcap_n E_n$: allora $|E^*| = |E|$ e $S^{(\nu)}$ converge in E^* per ogni ν con somma $g^{(\nu)}$. Applichiamo il lemma 3.2.2 con $\lambda = 2$, $P = S^{(\nu)}$ e $\mathcal{E} = E^*$. Possiamo supporre che n_1 sia abbastanza grande in modo che le ipotesi del lemma siano soddisfatte. Quindi, ponendo $\gamma_k^2 = a_k^2 + b_k^2$, otteniamo

$$\sum \gamma_k^2 n_k^{2\nu} \leq \frac{4}{|E^*|} \int_{E^*} |g^{(\nu)}(x)|^2 dx.$$

Dalla diseguaglianza di Cauchy per i coefficienti di una serie di potenze, otteniamo che esistono M e δ tali che

$$\left| g^{(\nu)}(x) \right| \leq M \nu! \delta^{-\nu}.$$

Quindi

$$\gamma_k^2 n_k^{2\nu} \leq \sum \gamma_k^2 n_k^{2\nu} \leq \left(2M\nu!\delta^{-\nu}\right)^2 \leq \left(2M\nu^\nu\delta^{-\nu}\right)^2,$$

da cui

$$\gamma_k^{1/n_k} \leq (2M)^{1/n_k} \cdot \left(\frac{\nu}{\delta n_k}\right)^{\nu/n_k}.$$

Scegliendo $\nu = \left[\frac{1}{2}\delta n_k\right]$, la parte intera di $\frac{1}{2}\delta n_k$, otteniamo

$$\left(\frac{\nu}{\delta n_k}\right)^{\frac{\nu}{n_k}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\delta}{2}},$$

da cui

$$\limsup_k \gamma_k^{1/n_k} \leq \limsup_k (2M)^{1/n_k} \cdot 2^{-\delta/2} = 2^{-\delta/2} < 1.$$

Poichè $|a_k| \leq \gamma_k$,

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}} \geq \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \gamma_k^{1/k}} > 1,$$

e in modo analogo si procede con b_k. Quindi il raggio di convergenza è maggiore di 1 e la tesi è dimostrata.

$\square$

Questo immediato corollario è un importante e classico risultato:

Teorema 3.2.8 (di Hadamard) *Consideriamo una serie di potenze*

$$\sum c_k z^{n_k},$$

con $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$; supponiamo che essa converga in $|z| < 1$ e che sia prolungabile in modo analitico su un arco di $|z| = 1$: allora il raggio di convergenza della serie è maggiore di 1.

Dimostrazione Consideriamo la serie $\sum c_k e^{in_k x}$. Essa è, per ipotesi, sommabile secondo Abel ad una funzione $g(x)$ analitica in un intervallo (α, β). Per il teorema 3.2.3 $\sum c_k^2$ è convergente, quindi, per il teorema 3.2.1, converge quasi ovunque in (α, β). Possiamo dunque applicare il teorema 3.2.5 e concludere che la serie ha raggio di convergenza maggiore di 1.

Capitolo 4

Insiemi di Sidon

4.1 Definizione e criteri fondamentali

Definizione 4.1.1 Un sottoinsieme E di $\mathbb{Z}$ si dice *insieme di Sidon* se esiste $B \geq 0$ dipendente da E tale che per ogni $f \in T_E$

$$\|\widehat{f}\|_1 = \sum_{n\in E} |\widehat{f}(n)| \leq B\|f\|_\infty.$$

Possiamo caratterizzare un insieme di Sidon E tramite le proprietà di convergenza delle serie di Fourier delle funzioni con spettro contenuto in tale insieme, come si evince dal seguente:

Teorema 4.1.2 *Se E è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$, sono equivalenti:*

(a) E *è un insieme di Sidon;*

(b) $\|\widehat{f}\|_1 < \infty$ *per ogni* $f \in L^\infty_E$;

(c) $\|\widehat{f}\|_1 < \infty$ *per ogni* $f \in C_E$;

(d) $\mathfrak{F}(M)|E = \ell^\infty(E)$;

(e) $\mathfrak{F}(L^1)|E = c_0(E)$.

Dimostrazione Mostriamo innanzittutto l'equivalenza di (a), (b) e (c). Supponiamo che sia verificata (a) e consideriamo una funzione $f \in L^\infty_E$. Definiamo

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} s_n(f, x)$$

dove $s_N(f,x) = \sum_{|n|\le N} \widehat{f}(n)e^{inx}$ è la somma parziale N-esima associata alla serie di Fourier relativa a f. Allora, tramite un cambiamento di variabili,

$$\begin{aligned}
\sigma_N f(x) &= \frac{1}{N+1}\sum_{k=-N}^{N}\sum_{n=|k|}^{N}\widehat{f}(k)e^{ikx} \\
&= \sum_{k=-N}^{N}\widehat{f}(k)e^{ikx}\frac{N-|k|+1}{N+1} \\
&= \sum_{k=-N}^{N}\widehat{f}(k)e^{ikx}\left(1-\frac{|k|}{N+1}\right),
\end{aligned}$$

da cui

$$\|\widehat{\sigma_N f}\|_1 = \sum_{|n|\le N}\left(1-\frac{|n|}{N+1}\right)|\widehat{f}(n)| \ge \frac{1}{2}\sum_{|n|\le N/2}|\widehat{f}(n)|.$$

Consideriamo il nucleo di Dirichlet

$$D_N(x) = 1 + \sum_{|k|=1}^{N} e^{ikx},$$

e il nucleo di Fejér

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(x).$$

Allora

$$\sigma_N f = F_N * f.$$

Infatti

$$\begin{aligned}
s_N(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{|k|=1}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right)e^{ikx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(1+\sum_{|k|=1}^{N} e^{ik(x-t)}\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)dt,
\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} F_N * f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)F_N(x-t)ds \\ &= \frac{1}{(N+1)}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_k(x-t)ds \\ &= \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} s_k(x) = \sigma_N f(x). \end{aligned}$$

Poiché per ipotesi E è un insieme di Sidon e $\sigma_N f \in T_E$,

$$\|\widehat{\sigma_N f}\|_1 \leq B\|\sigma_N f\|_\infty = B\|F_N * f\|_\infty \leq B\|f\|_\infty \|F_N\|_1 = B\|f\|_\infty$$

dove la penultima diseguaglianza segue da 2.2.4 e l'ultima uguaglianza segue dal fatto che

$$\|F_N\|_1 = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt}_{2\pi} = 1$$

Quindi

$$\sum_{|n|\leq N/2} |\widehat{f}(n)| \leq 2B\|f\|_\infty$$

da cui segue (b) passando al limite per $N \to \infty$.

Assumendo (b), il punto (c) segue immediatamente dall'inclusione $C \subset L^\infty$.

Mostriamo che da (c) segue (a). Consideriamo l'applicazione $\mathfrak{F} : f \mapsto \widehat{f}$ definita da C_E a valori in $\ell^1(E)$. L'operatore $\mathfrak{F}$ è chiaramente lineare (per linearità dell'integrale) ed iniettivo; inoltre $\mathfrak{F}$ è anche suriettiva: infatti considerata una arbitraria successione $\{z_n\}$ in $\ell^1(E)$, allora la serie $\sum z_n e^{inx}$ è totalmente convergente e la sua somma f è dunque una funzione continua i cui coefficienti di Fourier sono esattamente gli z_n. In particolare $\mathfrak{F}(f) = \{z_n\}$. Possiamo cioè concludere che $\mathfrak{F}^{-1}$ è un operatore lineare continuo e suriettivo tra due spazi di Banach: allora $\mathfrak{F}^{-1}$ è un' applicazione aperta per il teorema della mappa aperta.

In particolare la mappa $\mathfrak{F}$ è continua e quindi esiste una costante B tale che

$$\|\widehat{f}\|_1 \leq B\|f\|_\infty$$

per ogni $f \in T_E$, ossia E è un insieme di Sidon.

Mostriamo che dalle prime tre segue (d). Data $\phi \in \ell^\infty(E)$, consideriamo

$$\mathcal{T} : f \mapsto \sum_{n\in E} \widehat{f}(n)\phi(n)$$

che è un funzionale lineare e continuo definito su C_E, in quanto

$$|Tf| \leq \sum_{n\in E} |\widehat{f}(n)||\phi(n)| \leq \|\phi\|_\infty \|\widehat{f}\|_1 \leq B\|f\|_\infty \|\phi\|_\infty .$$

Dal teorema 2.3.11 segue che esiste una misura μ di M tale che

$$\mu(f) \doteq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\mu = \sum_{n\in E} \widehat{f}(n)\phi(n)$$

per ogni $f \in C_E$. Per ogni $n \in E$, scegliamo $f(x) = e^{inx}$, per cui

$$\phi(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} d\mu.$$

Indichiamo con $\check{\mu}$ la misura per cui

$$\check{\mu}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\check{\mu} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x) d\mu,$$

e poniamo $\lambda = \check{\mu}$. Allora per ogni $m \in E$

$$\widehat{\lambda}(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} d\mu = \phi(m),$$

per cui $\phi \in \mathfrak{F}(M)|E$, cioè $\ell^\infty(E) \subseteq \mathfrak{F}(M)$.

Viceversa, sia $\mu \in M$ e consideriamo $\{\widehat{\mu}(n)\} = \mathfrak{F}(\mu)$. Allora

$$|\widehat{\mu}(n)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |e^{-inx}| d\mu = \frac{\mu\left([-\pi,\pi]\right)}{2\pi} < \infty$$

e quindi $\mathfrak{F}(M) \subseteq \ell^\infty(E)$.

Prima di dimostrare che da (d) segue (e), consideriamo un lemma preliminare che verrà utilizzato nel corso della dimostrazione:

Lemma 4.1.3 *Per ogni sottoinsieme finito F di $\mathbb{Z}$ e $\epsilon > 0$, esiste un polinomio trigonometrico t tale che*

1. $0 \leq \widehat{t}(n) \leq 1$ *per ogni intero* n
2. $\widehat{t}(n) = 1$ *per ogni* $n \in F$
3. $\|t\|_1 \leq 1 + \epsilon$.

Dimostrazione Poiché F è finito, esiste un naturale r tale che $F \subseteq [-r, r]$. Sia

$$f(x) = \underbrace{\left[\frac{1}{2N+1}\sum_{|n|\leq N} e^{inx}\right]}_{u(x)}\underbrace{\left[\sum_{|k|\leq N+r} e^{ikx}\right]}_{v(x)} = \frac{1}{2N+1}\sum_{|n|\leq N}\sum_{|k|\leq N+r} e^{i(n+k)x}.$$

Verifichiamo che f soddisfa le tre condizioni richieste.

Fissato j numero intero, come vedremo tra poco i termini relativi a e^{ijx}, cioè quelli di indici n, k determinati da $n+k = j$, sono al più $2N+1$; da ciò segue che $\widehat{f}(n) \leq 1$ per ogni intero n. Inoltre è evidente che $\widehat{f}(n) \geq 0$, per cui f soddisfa la condizione (1).

Sia j un intero compreso tra -r e r: mostriamo che esistono esattamente $2N+1$ termini con somma j, cioè la cardinalità dell'insieme

$$\{(n, k) : |n| \leq N, |k| \leq N + r, n + k = j\}$$

è esattemente $2N + 1$. Ma ciò è evidente osservando che per ogni n tale che $|n| \leq N$, allora $|j - n| \leq N + r$, per cui scegliendo $k = j - n$ per ogni n la coppia (n, k) è un elemento dell'insieme: posso quindi concludere che per ogni j compreso tra $-r$ e r $\widehat{f}(j) = 1$ e in particolare vale la condizione (2). Se $|j| > r$, il numero dei termini con somma j è evidentemente inferiore.

Infine, osserviamo che dalla diseguaglianza di Cauchy-Schwarz segue che

$$\|f\|_1 = \langle u, \overline{v}\rangle_{L^2} \leq \|u\|_2\|v\|_2.$$

Dall' identità di Bessel segue che

$$\|u\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2 = \sum_{|n|\leq N}\frac{1}{(2N+1)^2} = \frac{1}{2N+1}$$

$$\|v\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2 = \sum_{|n|\leq N+r} 1 = 2(N+r)+1$$

da cui

$$\|f\|_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2N+1}}.\sqrt{2(N+r)+1} = \sqrt{1+\frac{r}{2N+1}} \to 1$$

per $N \to \infty$.

□

Procediamo alla dimostrazione che da (d) segue (e). Poichè per ipotesi $\mathfrak{F}(M)|E = \ell^\infty(E)$, per ogni $\phi \in \ell^\infty(E)$ esiste $\mu \in M$ tale che $\widehat{\mu}(n) = \phi(n)$ per ogni n in E: possiamo quindi definire un'applicazione suriettiva $\varphi : M \to \ell^\infty(E)$ per cui

$$\|\phi\|_\infty = \sup_{n\in E}|\phi(n)| = \sup_{n\in E}|\widehat{\mu}(n)| \leq \frac{|\mu|\,[-\pi,\pi]}{2\pi} = \|\mu\|_M.$$

Otteniamo cioè che φ è un operatore lineare continuo e suriettivo tra spazi di Banach: per il teorema della mappa aperta già menzionato, φ è un'applicazione aperta e quindi esiste una costante $B^{'}$ tale che per ogni $\phi \in \ell^\infty(E)$ vi è una misura $\mu \in M$ tale che $\widehat{\mu}|E = \phi$ e

$$\|\mu\|_M \leq B'\|\phi\|_\infty.$$

Sia $\psi \in c_0(E)$ e $\|\psi\|_\infty \leq 1$. Per ogni intero k consideriamo il sottoinsieme di E

$$E_k = \left\{n \in E : 2^{-k} < |\psi(n)| \leq 2^{-k+1}\right\},$$

e definiamo ψ_k come l'elemento di $c_0(E)$ che coincide con ψ su E_k ed è nullo altrove. Allora per ogni k esiste una misura $\mu_k \in M$ tale che $\widehat{\mu_k}|E = \psi_k$ e

$$\|\mu_k\|_M \leq B' \cdot 2^{1-k}.$$

Poiché E_k è un insieme finito, per il lemma 4.1.3 esiste un polinomio trigonometrico t_k tale che $\widehat{t_k}(n) = 1$ per ogni n in E_k e $\|t_k\|_1 \leq 2$. Poniamo

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} t_k * \mu_k.$$

Poichè

$$\|t_k * \mu_k\|_1 \leq \|t_k\|_1 \cdot \|\mu_k\|_M \leq B' \cdot 2^{2-k}$$

si ha $f \in L^1$, in quanto

$$\|f\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|t_k * \mu_k\|_1 \leq B' \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2-k} < \infty.$$

Inoltre per ogni intero n

$$\widehat{f}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{t_k * \mu_k}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{t_k}(n) \widehat{\mu_k}(n).$$

In particolare se $n \in E_k$, allora per ogni $k' \neq k$ si ha $n \notin E_{k'}$ e quindi $\psi_{k'}(n) = 0$ e $\widehat{\mu_{k'}}(n) = 0$: nella somma cioè rimane solo il termine k-esimo e

$$\widehat{f}(n) = \widehat{\mu_k}(n) = \psi_k(n) = \psi(n).$$

Possiamo quindi concludere che $\widehat{f}|E = \psi$, cioè $c_0(E) \subseteq \mathfrak{F}(L^1)|E$; poiché abbiamo già osservato che vale anche l'altra inclusione possiamo concludere che vale l'uguaglianza tra i due insiemi, e quindi il punto (e) è dimostrato.

Concludiamo dimostrando che (e) implica (a). Per ipotesi, per ogni $\psi \in c_0(E)$ esiste $f \in L^1$ tale che $\widehat{f}|E = \psi$: rimane quindi definito un operatore lineare e suriettivo

$$\varphi : L^1(-\pi, \pi) \to c_0(E)$$

che è continuo, grazie a

$$\|\psi\|_\infty = \sup_{n \in E} |\psi(n)| = \sup_{n \in E} |\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1.$$

Per il teorema della mappa aperta, esiste una costante B'' tale che per ogni $\psi \in c_0(E)$ vi è una funzione $f \in L^1$ tale che $\widehat{f}|E = \psi$ e

$$\|f\|_1 \leq B'' \|\psi\|_\infty.$$

Sia $g \in T_E$: definiamo

$$\psi(n) = \begin{cases} \dfrac{|\widehat{g}(n)|}{\widehat{g}(n)} & \widehat{g}(n) \neq 0 \\ 0 & \widehat{g}(n) = 0 \end{cases}$$

Risulta $\psi \in c_0(E)$ poichè i $\widehat{g}(n)$ sono definitivamente nulli, essendo i coefficienti di Fourier di un polinomio trigonometrico; inoltre $\|\psi\|_\infty \leq 1$. Allora, per quanto osservato precedentemente, esistono una funzione $f \in L^1$ e una costante B'' tali che $\widehat{f}|E = \psi$ e $\|f\|_1 \leq B''$. Quindi

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{g}(n)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)\widehat{g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)g(s)ds = (f(-\cdot)*g)(0)$$
$$\leq \|f(-\cdot)*g\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty \leq B''\|g\|_\infty,$$

e dunque E è un insieme di Sidon.

□

4.2 Insiemi di Hadamard

In questa parte caratterizzeremo gli insiemi di Sidon sfruttando alcune loro proprietà strutturali: con queste arriveremo a dimostrare che gli insiemi di Hadamard sono un esempio di insieme di Sidon.

Definizione 4.2.1 Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ e siano $n_1, n_2, ...$ gli elementi di E, dove $n_i \neq n_j$ per ogni $i \neq j$. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, definiamo $R_s(n, E)$ come il numero di modi in cui n può essere scritto come somma o differenza di s elementi di E, cioè nella forma

$$n = \pm n_{k_1} \pm n_{k_2} \pm ... \pm n_{k_s},$$

con $n_{k_i} \neq \pm n_{k_j}$ se $i \neq j$, $n_{k_i} \in E$ per ogni i.

Per esempio, consideriamo l'insieme $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e scegliamo $s = 2$. Allora

$$R_2(\pm 2, E) = 1;$$
$$R_2(\pm 1, E) = 2;$$
$$R_2(\pm 0, E) = 0;$$
$$R_2(\pm 3, E) = 1;$$
$$R_2(\pm n, E) = 1,$$

per ogni $|n| > 3$.

Definizione 4.2.2 Un sottoinsieme E di $\mathbb{Z}$ si dice *simmetrico* se

$$n \in E \Longleftrightarrow -n \in E.$$

Diciamo *rapporto inferiore* di un insieme simmetrico $E = \{\pm n_1, \pm n_2, \cdots\}$ il valore

$$q = \inf_k \frac{n_{k+1}}{n_k}$$

Prima di procedere, abbiamo bisogno di un ulteriore criterio che raffina le proprietà enunciate nel teorema 4.1.2.

Teorema 4.2.3 *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$. E è di Sidon se e solo se esiste $\delta > 0$ tale che per ogni funzione ϕ definita su E a valori in $\{\pm 1\}$ esiste una misura $\mu \in M$ tale che*

$$\sup_{n \in E} |\phi(n) - \widehat{\mu}(n)| \leq 1 - \delta.$$

Dimostrazione

($\Rightarrow$)Supponiamo che E sia di Sidon. Dal teorema 3.1.2 segue che $\mathfrak{F}(M)|E = \ell^\infty(E)$. Sia ϕ definita su E a valori in $\{\pm 1\}$: allora $\phi \in \ell^\infty(E)$ per cui esiste una misura $\mu \in M$ tale che $\widehat{\mu}(n) = \phi(n)$ per ogni $n \in E$; in particolare $|\phi(n) - \widehat{\mu}(n)| = 0$ per ogni $n \in E$, e quindi vale la diseguaglianza per ogni $\delta \leq 1$.

($\Leftarrow$) Data un'arbitraria funzione $f \in C_E$, mostriamo che $\|\widehat{f}\|_1 < \infty$: in virtù del teorema 4.1.2 potremo concludere che l'insieme E è di Sidon. Supponiamo inizialmente che $\widehat{f}$ sia a valori reali. Consideriamo l'applicazione $\phi : E \to \{\pm 1\}$ tale che per ogni n in E sia $\phi(n)\widehat{f}(n) = |\widehat{f}(n)|$. Per ipotesi esiste una misura $\mu \in M$ tale che

$$\sup_{n \in E} |\phi(n) - \widehat{\mu}(n)| \leq 1 - \delta.$$

Sia $\lambda = \dfrac{1}{2}(\mu + \mu^*)$; allora

$$\sup_{n \in E} \left|\phi(n) - \widehat{\lambda}(n)\right| \leq 1 - \delta;$$

infatti

$$\widehat{\mu^*}(n) = \mu^*\left(e^{-inx}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{-in(-x)}}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}d\mu = \widehat{\mu}(n),$$

da cui

$$\widehat{\lambda}(n) = \frac{1}{2}\left(\widehat{\mu}(n) + \widehat{\mu^*(n)}\right) = \widehat{\mu}(n).$$

Inoltre per ogni $n \in E$,

$$|\widehat{f}(n)\widehat{\lambda}(n) - |\widehat{f}(n)|| = |\widehat{f}(n)| \cdot |\widehat{\lambda}(n) - \phi(n)| \leq (1 - \delta)\,|\widehat{f}(n)|.$$

Sia $g = \lambda * f$; allora per ogni $n \in E$

$$|\widehat{f}(n)| - \widehat{f}(n)\widehat{\lambda}(n) \leq |\widehat{f}(n)\widehat{\lambda}(n) - |\widehat{f}(n)||,$$

per cui

$$\widehat{g}(n) = \widehat{\lambda}(n)\widehat{f}(n) \geq -|\widehat{f}(n)\widehat{\lambda}(n) - |\widehat{f}(n)|| + |\widehat{f}(n)| \geq \delta|\widehat{f}(n)|.$$

Sia $F \subseteq E$ un insieme finito e sia $\epsilon = 1$. Per il lemma 4.1.3 esiste un polinomio trigonometrico t tale che $\|t\|_1 \leq 2$, $0 \leq \widehat{t}(n) \leq 1$ per ogni n e $\widehat{t}(n) = 1$ per ogni $n \in F$. Allora

$$\begin{aligned}\delta \sum_{n \in F} |\widehat{f}(n)| \leq \sum_{n \in F} \widehat{g}(n) = \sum_{n \in F} \widehat{t}(n)\widehat{g}(n) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{t}(n)\widehat{g}(n) \\ = t * g(0) \leq \|t * g\|_\infty \leq \|t\|_1 \|g\|_\infty \leq 2\|\mu\|_M \|f\|_\infty,\end{aligned}$$

dove le ultime due diseguaglianze seguono rispettivamente dal teorema 2.2.4 e dalla proposizione 2.3.9. Dall'arbitrarietà dell'insieme F segue che $\|\widehat{f}\|_1 < \infty$ per ogni $f \in C_E$ tale che $\left\{\widehat{f}(n)\right\}$ è una successione di numeri reali. Consideriamo ora il caso generale in cui $\widehat{f}$ non sia a valori reali: possiamo scrivere f come somma

$$f = f_1 + i f_2,$$

con $f_1 = \frac{1}{2}(f + f^*)$ e $f_2 = -\frac{1}{2}i\,(f - f^*)$,dove f^* è l'applicazione che a x associa $\overline{f(-x)}$. Allora f_1 e f_2 sono in C_E e $\widehat{f_1}$ e $\widehat{f_2}$ sono entrambi a valori reali. Infatti, poichè la somma di due complessi coniugati è un reale e la differenza è immaginario puro,

$$\begin{aligned}\widehat{f_1}(n) &= \frac{1}{4\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx + \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(-x)}e^{-inx}dx\right] \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx + \overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx}\right] \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{f_2}(n) &= \frac{i}{4\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx - \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(-x)}e^{-inx}dx\right] \\ &= \frac{i}{4\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx - \overline{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx}\right] \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Per quanto dimostrato, $\|\widehat{f_1}\|_1 < \infty$ e $\|\widehat{f_2}\|_1 < \infty$ e quindi

$$\|\widehat{f}\|_1 \leq \|\widehat{f_1}\|_1 + \|\widehat{f_2}\|_1 < \infty,$$

cioè per ogni $f \in C_E$, $\|\widehat{f}\|_1 < \infty$; per il teorema 4.1.2 E è un insieme di Sidon.

$\square$

Osserviamo che nel caso in cui l'insieme E sia simmetrico nel precedente teorema possiamo assumere che ϕ sia pari o dispari: infatti per ogni $f \in C_E$, possiamo scrivere f come somma $f = f_p + f_d$, dove $f_p(x) = (f(x) + f(-x))/2$ e $f_d(x) = (f(x) - f(-x))/2$; allora f_p e f_d sono in C_E, essendo E simmetrico, e sono rispettivamente pari e dispari. Osserviamo che se una funzione g è pari, allora $\widehat{g}$ è pari, in quanto

$$\begin{aligned}\widehat{g}(-n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(-y)e^{-iny}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iny}dy = \widehat{g}(n)\end{aligned}$$

In modo analogo si può verificare che se g è dispari, allora $\widehat{g}$ è dispari. Da ciò segue che $\widehat{f_p}$ e $\widehat{f_d}$ sono rispettivamente pari e dispari; in particolare $|\widehat{f_p}|$ e $|\widehat{f_d}|$ sono funzioni pari. Nel corso della dimostrazione, al momento di mostrare che per ogni funzione $f \in C_E$ tale che $\widehat{f}$ sia a valori reali, allora $\widehat{f} \in \ell^1$, possiamo spezzare f come somma di una funzione pari e una dispari nel modo visto prima. Quindi per entrambe considerare una funzione ϕ tale che

$$\phi \cdot \widehat{f_i} = |\widehat{f_i}|;$$

se f_i è pari, allora ϕ sarà pari, poichè il loro prodotto è una funzione pari che non si annulla mai in E; per lo stesso motivo se f_i è dispari, allora ϕ deve essere dispari. Proseguendo nella dimostrazione, posso concludere che $\widehat{f_p}$ e $\widehat{f_d}$ sono in ℓ^1 e quindi anche $\widehat{f}$.

Dimostriamo ora un importante criterio aritmetico con cui concludere che un insieme è di Sidon.

Teorema 4.2.4 *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$. Supponiamo che esista una costante B e una partizione finita di E in insiemi simmetrici $E_1, \ldots, E_t$ tali che per ogni $n \in E \cup \{0\}$ valga*

$$R_s(n, E_j) \leq B^s$$

per ogni naturale s e per ogni j tale che 1$\leq j \leq t$. Allora E è un insieme di Sidon.

Dimostrazione Possiamo assumere senza perdita di generalità che $0 \notin E$. Infatti se 0 è un elemento di E, basta considerare l'insieme $E_0 = \{0\}$ per cui $R_1(0, E_0) = 1$ e $R_s(n, E_0) = 0$ in tutti gli altri casi, e quindi procedere come se 0 non fosse in E. Notiamo che $B \geq 1$: infatti dato $n_1 \in E$ e scelto $j \in \{1, ..., t\}$ tale che $n_1 \in E_j$, si ha ovviamente

$$B \geq R_1(n_1, E_j) = 1.$$

Poniamo $b = 1/(3tB^2)$; allora per ogni $t \geq 1$

$$Bb = \frac{1}{3tB} \leq \frac{1}{3};$$

e in particolare $b \leq 1/3$.

Sia ϕ una funzione definita su E che assume solo i valori $\pm b$. Vogliamo applicare il teorema 3.2.3,considerando separatamente i casi in cui ϕ è dispari o pari. Fissato j, assumiamo che $E_j = \{\pm n_1, \pm n_2, \cdots\}$, con $n_1 < n_2 < \cdots$. Consideriamo il caso in cui ϕ è pari e definiamo

$$\begin{aligned} f_k(x) &= 1 + \phi(n_k)\, e^{in_kx} + \phi(-n_k)\, e^{-in_kx} \\ &= 1 + 2\phi(n_k)\cos(n_kx)\,. \end{aligned}$$

Allora $f_k \geq 0$ poichè $|\phi(n_k)\cos(n_kx)| \leq b \leq \frac{1}{3}$. Consideriamo il polinomio trigonometrico positivo

$$t_N(x) = \prod_{k=1}^{N} f_k(x).$$

Allora, riordinando tutti i prodotti delle f_k secondo il parametro $n = \pm n_{k_1} \pm ... \pm n_{k_s}$, con $s \geq 1$, possiamo scrivere

$$t_N(x) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \phi(n_k)\, e^{in_kx} + \sum_{k=1}^{N} \phi(-n_k)\, e^{-in_kx} + \sum_{n} c_N(n) e^{inx},$$

con

$$c_N(n) = \sum_{\substack{s=2 \\ n=\pm n_{k_1} \cdots \pm n_{k_s}}}^{N} \phi(n_{k_1}) \cdot \ldots \cdot \phi(n_{k_s})\,.$$

Osserviamo che

$$|c_N(n)| \leq \sum_{\substack{s=2 \\ n=\pm n_{k_1}\cdots\pm n_{k_s}}}^{N} |\phi(n_{k_1})| \cdot \ldots \cdot |\phi(n_{k_s})| \leq \sum_{s=2}^{N} B^s b^s,$$

poiché $R_s(n, E_j) \leq B^s$ e $|\phi(n_{k_i})| \leq b$. Inoltre

$$\begin{aligned}\sum_{s=2}^{N}(Bb)^s &= \sum_{s=0}^{N}(Bb)^s - 1 - Bb = \frac{1-(bB)^{N+1}}{1-bB} - 1 - Bb \\ &= \frac{(bB)^2-(bB)^{N+1}}{1-bB} \leq \frac{(bB)^2}{1-bB};\end{aligned}$$

Poichè $bB \leq \dfrac{1}{3}$ e $btB^2 = \dfrac{1}{3}$,

$$\frac{1-bB}{(btB^2)^2} \geq \frac{2}{3(btB^2)^2} = 6,$$

quindi $\dfrac{(bB)^2}{1-bB} \leq \dfrac{1}{6t^2B^2}$; in particolare

$$|c_N(n)| \leq \frac{1}{6t^2B^2}$$

per ogni $n \in E \cup \{0\}$. Osserviamo che l'insieme degli indici su cui si somma $\sum_n c_N(n)e^{inx}$ è un insieme simmetrico e che $c_N(n) = c_N(-n)$; per cui, essendo $t_N \geq 0$,

$$\begin{aligned}\|t_N\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t_N(x)dx &= 1 + \sum_{k=1}^{N}\phi(n_k)\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{in_kx}+e^{-in_kx}\right)dx + c_N(0) + \\ &+ \sum_{n>0} c_N(n)\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{inx}+e^{-inx}\right)dx = 1 + c_N(0),\end{aligned}$$

poichè l'esponenziale ha media nulla su $[-\pi, \pi]$. Per cui

$$\|t_N\|_1 \leq 1 + \frac{1}{6t^2B^2}.$$

Possiamo cioè concludere che i t_N costituiscono una successione di polinomi trigonometrici di norma L^1 limitata. Consideriamo la successione di misure $\{\lambda_n\}$ tali che

$$\lambda_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)t_n(x)dx.$$

Allora la successione è limitata, in quanto per ogni n

$$\|\lambda_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t_n(x)|dx = \|t_n\|_1 \leq 1 + \frac{1}{6t^2B^2}.$$

Per la proposizione 2.3.6 esiste una sottosuccessione $\left(t_{N_p}\right) \subseteq (t_N)$ tale che la successione $\left\{\lambda_{N_p}\right\}$ associata converge debolmente a una misura μ_j di M. In particolare avremo che

$$\lim_{p\to\infty} \widehat{t_{N_p}}(n) = \widehat{\mu_j}(n)$$

per ogni intero n. Sia $n \in E_j$ e sia i per cui $n = \pm n_i$. Allora $\widehat{t_{N_p}}(n) = \phi(n) + c_{N_p}(n)$ e

$$|\widehat{\mu_j}(n) - \phi(n)| \leq \left|\widehat{\mu_j}(n) - \widehat{t_{N_p}}(n)\right| + \left|c_{N_p}(n)\right| \leq \frac{1}{6t^2B^2} + \frac{1}{6t^2B^2} = \frac{1}{3t^2B^2},$$

per N_p abbastanza grande. Se invece $n \notin E_j$, allora $\widehat{t_{N_p}}(n) = c(n)$ e

$$|\widehat{\mu_j}(n)| = \lim_{p\to\infty}\left|\widehat{t_{N_p}}(n)\right| = \lim_{p\to\infty}\left|c_{N_p}(n)\right| \leq \frac{1}{6t^2B^2}.$$

Sia $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_t$. Per ogni $n \in E$, esiste una unico j per cui $n \in E_j$; allora

$$\begin{aligned}
|\widehat{\mu}(n) - \phi(n)| &\leq |\widehat{\mu_j}(n) - \phi(n)| + |\widehat{\mu_1}(n)| + \cdots + \left|\widehat{\mu_{j-1}}(n)\right| + \\
&+ \left|\widehat{\mu_{j+1}}(n)\right| + \cdots + |\widehat{\mu_t}(n)| \leq \frac{1}{3t^2B^2} + \frac{t}{6t^2B^2} \\
&= \frac{b}{t} + \frac{b}{2} \leq \frac{3b}{2} \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

In definitiva alla funzione ϕ abbiamo associato la misura μ per la quale

$$|\widehat{\mu}(n) - \phi(n)| < \frac{1}{2}.$$

Dunque vale il teorema 4.2.3 con $\delta = 1/2$, e quindi E è un insieme di Sidon.

Nel caso in cui ϕ è dispari poniamo

$$\begin{aligned} f_k(x) &= 1 - i\phi\,(n_k)\,e^{in_kx} - i\phi\,(-n_k)\,e^{-in_kx} \\ &= 1 + 2\phi\,(n_k)\sin(n_kx)\,, \end{aligned}$$

e il resto delle dimostrazione procede nello stesso modo.

$\square$

Diamo ora un esempio di insieme di Sidon, dimostrando che gli insiemi di Hadamard sono di Sidon.

Definizione 4.2.5 Un sottoinsieme simmetrico di $\mathbb{Z}$ della forma $E = \{\pm n_1, \pm n_2, \cdots\}$ con $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ si dice *di Hadamard* se il rapporto inferiore è maggiore di 1, cioè

$$q = \inf_k \frac{n_{k+1}}{n_k} > 1.$$

Lemma 4.2.6 *Sia H un insieme di Hadamard. Allora H può essere partizionato in un numero finito di insiemi di Hadamard di rapporto inferiore maggiore di 3.*

Dimostrazione Sia $H = \{\pm n_1, \pm n_2, \cdots\}$ con $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ e sia

$$q = \inf_k \frac{n_{k+1}}{n_k} > 1.$$

Scelto un intero positivo m tale che $q^m > 3$, consideriamo i sottoinsiemi di H

$$H_0 = \{\pm n_{mk} : k = 1, 2, ...\}\,,$$

$$H_1 = \{\pm n_{1+mk} : k = 1, 2, ...\}\,,$$

$$\vdots$$

$$H_{m-1} = \{\pm n_{m-1+mk} : k = 1, 2, ...\}\,.$$

Allora ciascun H_i è un insieme di Hadamard per il quale

$$\frac{n_{i+m(k+1)}}{n_{i+mk}} = \frac{n_{i+mk+m}}{n_{i+mk}} > q\frac{n_{i+mk+m-1}}{n_{i+3mk}} > q^m > 3,$$

cioè, passando all'estremo inferiore, per ogni i il rapporto inferiore di H_i è maggiore di 3.

$\square$

Teorema 4.2.7 *Un insieme di Hadamard E è di Sidon.*

Dimostrazione Consideriamo un partizione finita $\{E_j\}$ di E tale che il rapporto inferiore degli E_i sia maggiore di 3. Allora, per ogni intero n e per ogni j, si ha

$$R_s(n, E_j) \leq 1.$$

Infatti supponiamo per assurdo che un intero n ammetta almeno due rappresentazioni differenti come somma di s elementi di E_j

$$n = a_1 n_{t_1} + \ldots + a_s n_{t_s},$$

$$n = b_1 n_{k_1} + \ldots + b_s n_{k_s},$$

dove $a_i, b_j \in \{\pm 1\}$. Sottraendo, avremmo una relazione del tipo

$$e_1 n_{r_1} + e_2 n_{r_2} + \ldots + e_p n_{r_p} = 0,$$

con $r_1 > r_2 > \cdots > r_p$ e $e_i \in \{\pm 1, \pm 2\}$. Allora

$$n_{r_1} = \sum_{h=1}^{p} e_h n_{r_h} \leq 2 \sum_{h=1}^{p} n_{r_h} \leq 2 \left(\sum_{h=1}^{p} q^{-h} \right) n_{r_1}$$

Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{p} q^{-n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{q}} - 1 = \frac{1}{q-1}.$$

Perciò

$$n_{r_1} \leq \frac{2}{q-1} n_{r_1} < n_{r_1},$$

essendo $q > 3$; con ciò arriviamo ad un assurdo. Otteniamo quindi che

$$R_s(n, E_j) \leq 1$$

per ogni intero n, per ogni E_j. Possiamo così applicare il teorema 4.2.4 e concludere che E è di Sidon.

□

Viceversa non tutti gli insiemi di Sidon sono di Hadamard: per darne un esempio abbiamo bisogno dei due seguenti criteri.

Proposizione 4.2.8 *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ tale che per ogni $n \neq 0$ appartenente a E, allora $-n \notin E$. Supponiamo che esista una partizione finita di E in $E_1, \cdots, E_t$ ed esista una costante B per cui*

$$R_s(n, E_j) \leq B^s$$

per ogni naturale s, per ogni j compreso tra 1 e t, per ogni $n \in E \cup \{0\}$. Allora E è un insieme di Sidon.

Dimostrazione Sia $E = \{n_1, n_2, \cdots\}$ e sia

$$\begin{aligned} f_k(x) &= 1 + \phi(n_k) e^{in_k x} + \phi(-n_k) e^{-in_k x} \\ &= 1 + 2\phi(n_k) \cos(n_k x) . \end{aligned}$$

A questo punto possiamo procedere in modo identico alla dimostrazione del teorema 4.2.4.

□

Lemma 4.2.9 *Sia H unione finita di insiemi di Hadamard. Per ogni $\xi > 0$ poniamo*

$$\Gamma(\xi) = \{n \in H : \xi < |n| < 2\xi\},$$

e denotiamo con $N(\xi)$ la cardinalità di $\Gamma(\xi)$. Allora esiste una costante B tale che per ogni $\xi > 0$, $N(\xi) \leq B$.

Dimostrazione Supponiamo inizialmente che $H = \{\pm n_1, \pm n_2, \cdots\}$ sia di Hadamard. Sia λ il rapporto inferiore di H, cioè

$$\lambda = \inf_k \frac{n_{k+1}}{n_k}.$$

Sia $\xi > 0$ e consideriamo

$$n_k = \min\left(\Gamma\left(\xi\right) \cap \mathbb{N}\right).$$

Per ogni $t > 0$, $n_{k+t} \geq \lambda^t n_k > \lambda^t \xi$; per cui se $\lambda^t \xi > 2\xi$, allora $n_{k+t} > 2\xi$. In altre parole gli interi n_{k+t} non sono più in $\Gamma\left(\xi\right)$ quando $t > \log_\lambda\left(2\right)$. In particolare, scelto $t = 1 + [\log_\lambda 2]$,

$$N\left(\xi\right) \leq 1 + \log_\lambda\left(2\right).$$

Consideriamo il caso generale in cui H sia unione di un'arbitraria famiglia finita di insiemi di Hadamard $\{H_1, \cdots, H_n\}$.

Per ogni $i = 1, \ldots, n$ sia $\Gamma_i\left(\xi\right) = \{n \in H_i : \xi < |n| < 2\xi\}$: allora per ogni i esiste un M_i tale che per ogni $\xi > 0$

$$N_i\left(\xi\right) = \left|\Gamma_i\left(\xi\right)\right| \leq M_i.$$

Sia $\Gamma\left(\xi\right) = \{n \in H : \xi < |n| < 2\xi\}$; allora $\Gamma\left(\xi\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i\left(\xi\right)$. In particolare per ogni ξ

$$N\left(\xi\right) \leq M_1 + \ldots + M_n.$$

$\square$

Abbiamo ora tutti gli strumenti per costruire un insieme di Sidon che non sia unione finita di insiemi di Hadamard. Consideriamo dunque l'insieme

$$E = \left\{3^{2^{l+2}} + 3^k : k = 2^l, 2^l + 1, ..., 2^{l+1} - 1, l = 0, 1, ...\right\}.$$

Osserviamo innanzitutto che per ogni naturale k esiste un unico l tale che $2^l \leq k < 2^{l+1}$, quindi per ogni k esiste un unico elemento n di E tale che

$$n = 3^{2^{l+2}} + 3^k \doteqdot n_k.$$

Mostriamo che per ogni $\{n_{i_1}, n_{i_2}, ...n_{i_s}\} \subset E$, posto $\sigma = \sum_{k=1}^{s} \epsilon_k n_{i_k}$ con $\epsilon_k = \pm 1$ per ogni k, si ha $\sigma \neq 0$ e

$$\sigma \in E \Longleftrightarrow s = 1, \epsilon_1 = 1, \sigma = n_{i_1}.$$

Se infatti dimostriamo ciò, possiamo concludere che $R_1(n, E) = 1$ e $R_s(n, E) = 0$ per ogni $s \neq 1$ e quindi, sfruttando la proposizione 4.2.8,deduciamo che E è di Sidon.

Consideriamo più in generale la somma $\sigma = \sum_{k=1}^{s} \delta_k n_k$ con $\delta_k = 0, 1, -1$ e supponiamo che sia $\sigma = 0$: vogliamo concludere che allora $\delta_k = 0$ per ogni k. Se per assurdo esiste un k per cui $\delta_k \neq 0$, sia k_0 il più piccolo indice per cui $\delta_k \neq 0$. Allora per ogni $k > k_0$, avremmo

$$n_k \equiv 0 \bmod \left(3^{k_0+1}\right),$$

dove $n_k = 3^{2^{l+2}} + 3^k$ con $2^l \leq k < 2^{l+1}$. Infatti se $k > k_0$, allora $k = k_o + t$ con $t > 0$; in particolare

$$3^k = 3^{k_0+t} = 3^{k_0+1} 3^{t-1} \equiv 0 \bmod \left(3^{k_0+1}\right);$$

Inoltre $k_0 < k < 2^{l+1} < 2^{l+2}$, per cui

$$3^{2^{l+2}} \equiv 0 \bmod \left(3^{k_0+1}\right).$$

Analogamente, se $2^l \leq k_0 \leq 2^{l+1}$, si ha $n_{k_0} = 3^{2^{l+2}} + 3^{k_0}$ e quindi

$$n_{k_0} \equiv 3^{k_0} \bmod \left(3^{k_0+1}\right).$$

Poiché $\sigma = 0$ e $\delta_k n_k \equiv 0 \bmod \left(3^{k_0+1}\right)$ per ogni $k > k_0$, si ottiene $\sigma \equiv \delta_{k_0} n_{k_0} \equiv 0 \bmod \left(3^{k_0+1}\right)$; ma $n_{k_0} \equiv 3^{k_0} \bmod \left(3^{k_0+1}\right)$, per cui $\delta_{k_0} \equiv 0 \bmod \left(3^{k_0+1}\right)$; ma ciò è impossibile poiché $\delta_{k_0} = \pm 1$. Possiamo concludere che

$$\sigma = 0 \Leftrightarrow \delta_k = 0 \text{ per ogni } k.$$

Sia $\sigma = \sum_{k=1}^{s} \delta_k n_k = n_p = 3^{2^{l+2}} + 3^p$ e sia k_0 il minimo k per cui $\delta_k \neq 0$. Come verificato prima per ogni $k > k_0$ si ha $n_k \equiv 0 \bmod \left(3^{k_0+1}\right)$, per cui

$$n_p \equiv \delta_{k_0} 3^{k_0} \bmod \left(3^{k_0+1}\right);$$

da ciò segue che $p \geq k_0$. Infatti se per assurdo fosse $p < k_0$, avremmo

$$\delta_{k_0} 3^{k_0} \equiv 0 \bmod \left(3^{p+1}\right);$$

ma sappiamo che $n_p \equiv 3^p \bmod \left(3^{p+1}\right)$, per cui $\delta_{k_0} 3^{k_0}$ e n_p non sarebbero congruenti modulo 3^{p+1}, il che contraddice la relazione $n_p \equiv \delta_{k_0} 3^{k_0} \bmod \left(3^{k_0+1}\right)$. Allora $p \geq k_0$, per cui $3^{k_0} | 3^p$ e $3^{k_0} | 3^{2^{l+2}}$ essendo $p < 2^{l+2}$. Poichè inoltre $3^{k_0+1} \left| \left(\delta_{k_0} 3^{k_0} - 3^{2^{l+2}} - 3^p\right)\right.$, otteniamo che $3 \left| \left(\delta_{k_0} - 3^{2^{l+2}-k_0} - 3^{p-k_0}\right)\right.$, cioè

$$\delta_{k_0} \equiv 3^{p-k_0} \bmod (3),$$

essendo $3^{2^{l+2}-k_0} \equiv 0 \bmod (3)$. Allora, poichè $\delta_{k_0} = \pm 1$, l'unica possibilità per cui valga la precedente congruenza è che sia $p = k_0$ e $\delta_{k_0} = 1$, cioè $n_p = n_{k_0}$. Quindi

$$\sigma' = \sum_{k=k_0+1}^{s} \delta_k n_{i_k} = \sigma - \delta_{k_0} n_{k_0} = \sigma - n_p = 0,$$

e quindi $\delta_k = 0$ per ogni $k > k_0$. Possiamo così concludere, come già osservato, che E è un insieme di Sidon.

Dimostriamo adesso che E non può essere unione finita di insiemi di Hadamard: a tale scopo cerchiamo di negare il lemma 4.2.9, dimostriamo cioè che per ogni costante B esiste ξ tale che $N(\xi) > B$. Consideriamo infatti un naturale n tale che $2^l > B$ e poniamo

$$\xi = 3^{2^{l+2}}.$$

Poniamo $a_k = 3^{2^{l+2}} + 3^{2^l+k}$ per $k = 0, 1, 2, ..., 2^l - 1$. Consideriamo per ogni k

$$\Delta_{k+1} = a_{k+1} - a_k = 3^{2^l+k+1} - 3^{2^l+k} = 2 \cdot 3^{2^l+k}$$

la distanza tra due successivi a_i. Partendo da ξ, ad ogni passo gli a_k incrementano di Δ_k per un incremento totale di

$$\Delta = \sum_{k=1}^{2^l} \Delta_k = \sum_{k=1}^{2^l} 3^{2^l+k-1} \cdot 2 = 2 \cdot 3^{2^l} \sum_{h=1}^{2^l-1} 3^h = 3^{2^l}\left(3^{2^l-1}\right).$$

Poiché $\Delta < 2\xi - \xi = 3^{2^{l+2}}$, gli a_k sono tutti contenuti nell'intervallo $(\xi, 2\xi)$; ne segue che

$$N(\xi) \geq \#\left\{a_0, ..., a_{2^l-1}\right\} = 2^l > B,$$

cioè per ogni B esiste uno ξ tale che $N(\xi) > B$: possiamo concludere che E non può essere unione di insiemi di Hadamard.

Bibliografia

[1] D. Li, H. Queffélec, L. Rodriguez-Piazza, *Some new thin sets of integers in Harmonic Analyses*, Journal d'Analise Mathematique, Vol. 86 (2002)

[2] R.E. Edwards, *Fourier Series: a modern introduction*, (1967), Vol. 1-2.

[3] N. Danford, J.T. Schwartz, *Linear Operators. Part 1: General Theory*, (1966)

[4] J.P. Kahane, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 199-213.

[5] T. Murai, Nagoya Math J., 85 (1962), 87-154.

[6] A. Zygmund, *Trigonometric series*, (1935), Vol. 1-2.

[7] G.H. Hardy, *Weierstrass's nondifferentiable function*, Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916) 301-325.

[8] K. Weierstrass, *Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für Keinen Werth des letzeren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen*, Königl. Akad. Wiss. (1872), Mathematische Werke II, 71-74.