Equazioni di Navier-Stokes

Daini Daniele

23 febbraio 2016

Indice

1 Introduzione

In questo documento si espone in breve un modello matematico per descrivere fluidi incomprimibili e viscosi, nell'ambito di applicazione dell'equazione di Eulero. L'intenzione è quella di esporre pochi argomenti di carattere generale, ma sviluppati in modo da essere comprensibili anche per chi, come me, non ha mai frequentato un corso di analisi funzionale. Per approfondimenti, rimando agli appunti scritti dal relatore che ho riportato in appendice (o che, in versione estesa, possono essere trovati sul suo sito) e alla bibliografia; in particolare, suggerisco [Temam(1984)] e [Ladyzhenskaya(1963)].
Voglio ringraziare il professor Acquistapace per il tempo, la pazienza e la dedizione che mi ha dedicato durante tutto il semestre; senza il suo aiuto, non sarebbe stato possibile per me comprendere l'importanza, l'eleganza e il significato dell'approccio variazionale comunemente utilizzato nell'analisi delle equazioni di Navier Stokes. Ringrazio anche il collega Roberto Lepera per gli utili consigli prima, durante e dopo lo sviluppo del percorso qui affrontato.

2 La fisica dei fluidi

2.1 La modellizzazione

Possiamo modellizzare un fluido come l'insieme di un grande numero di piccoli elementi contenenti materia ed interagenti tra loro. Questi elementi sono da scegliere sufficientemente piccoli da rendere legittimo il passaggio agli integrali quando si tratterà di sommare grandezze su tutti gli elementi, e sufficientemente grandi da permettere una trattazione statistica delle molecole all'interno di ogni volume (vogliamo poter utilizzare concetti termodinamici come pressione e temperatura); questo significa scegliere una divisione in volumi visti come puntiformi dall'intero fluido, ma che contengono un gran numero di molecole. Trascureremo nella nostra trattazione tutti gli effetti di tipo diffusivo che potrebbero invalidare la divisione in elementi del fluido; questo significa osservare il sistema per tempi t<< $\tau_{diffusione}$, con $\tau_{diffusione}$ un tempo caratteristico del sistema definito in funzione di un parametro empirico che descrive il libero cammino medio di un elemento. La descrizione dello stato di un fluido viene considerata completa una volta determinata la distribuzione delle velocità nello spazio e nel tempo $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, e di due funzioni termodinamiche, tradizionalmente scelte come la densità ρ e la pressione p; difatti ogni altra grandezza termodinamica, attraverso l'equazione di stato, risulta determinabile.

Potremo descrivere il moto di un fluido attraverso le traiettorie seguite dai singoli elementi che lo compongono; si tratta quindi di assegnare le coordinate come funzione del tempo $\mathbf{r}$(t)=(x(t),y(t),z(t)) e le coordinate iniziali (a t=t_0) $\mathbf{R}$ (X,Y,Z)=(X_i). La fluidodinamica è di per sè descritta quindi da una mappa che manda una regione in un'altra, eventualmente deformata, tramite il parametro tempo; la relazione funzionale che la descrive è quindi del tipo:

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}(t) = \phi(\mathbf{R}, t) \\ &\mathbf{r}(t_0) = \phi(\mathbf{R}, t_0) = \mathbf{R} \text{ o } x_i = \phi_i(X, Y, Z, t) \\ &\mathbf{R} = \Psi(\mathbf{r}(t)) \end{aligned} \tag{1}$$

In particolare, com'è evidente dall'ultima relazione scritta, richiederemo che si tratti di una mappa invertibile, al costo di perdere di generalità : in questo modo imponiamo che due elementi di fluido inzialmente distinti non si vengano a sovrapporre perdendo d'identità. Questa condizione implica che il determinante del Jacobiano della trasformazione sia diverso da 0:

$$J = det(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}) \neq 0 \tag{2}$$

In letteratura si usa chiamare coordinate lagrangiane (o materiali) le condizioni iniziali R $\rightarrow \{$X$\}$ e coordinate euleriane le r $\rightarrow \{$x$\}$

Possiamo definire la derivata lagrangiana (o materiale) di una grandezza fisica f definita su ogni elemento fluido come:

$$\frac{d}{dt}f(X,t) = \frac{\partial f^L(X,t)}{\partial t}|_X = \frac{\partial f^E}{\partial t} + \frac{\partial f^E}{\partial x_i}\frac{dx_i(X,t)}{dt} = \partial_t f^E + (\mathbf{v}\cdot\nabla)f^E = \rho(x,t) \tag{3}$$

con l'ultimo membro che rappresenta un eventuale termine di sorgente che crea o distrugge la grandezza fisica di cui stiamo osservando l'evoluzione temporale.

2.2 Equazioni di continuità

Seguiamo il ragionamento riportato in [L.D.Landau and E.M.Lifshitz(1987)], valido nel caso di fluidi ideali. Per fluidi ideali s'intende fluidi senza viscosità (termine di Stokes non compare) e senza conducibilità termica (fluido adiabatico).

Per risolvere il problema abbiamo bisogno di determinare cinque quantità: le tre componenti del campo di velocità, e due funzioni termodinamiche che scegliamo come pressione e densità. Due condizioni vengono imposte dalla conservazione della materia e dell'entropia; i rimanenti tre gradi di libertà saranno fissati dall'equazione di Eulero, che come vedremo è un'equazione vettoriale.

Teorema 2.1 (Equazione di continuità, o conservazione della materia)**.**

$$\frac{\partial \rho}{dt} + div(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{4}$$

Dimostrazione: poichè l'integrale di superficie $\int \rho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f}$ rappresenta la massa totale del fluido che sta uscendo da un suo volume (quello racchiuso dalla superficie con cui si integra, e avendo preso la normale della superficie uscente, per convenzione), è semplice convincersi che:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho\, dV = -\int_{\partial\Omega}\rho\mathbf{v}\cdot\, d\mathbf{f} = -\int_{\Omega} div(\rho\mathbf{v})\, dV \tag{5}$$

Da cui, portando tutto allo stesso membro e notando che l'equazione dev'essere verificata per ogni volume su cui integriamo, si ottiene la legge sopra scritta. □

Da notare che nel caso di fluido incomprimibile l'equazione di continuità si riduce alla condizione di indivergenza sul campo di velocità, ovvero: $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$. Inoltre non abbiamo utilizzato la condizione di idealità, si tratta quindi di un'equazione a validità generale.

Teorema 2.2 (Conservazione dell'entropia)**.**

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + div(\rho s\mathbf{v}) = 0 \tag{6}$$

Dimostrazione. Abbiamo imposto nei fluidi ideali la conservazione dell'entropia (adiabaticità), che possiamo scrivere come:

$$0 = \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}(s) \tag{7}$$

Con s che rappresenta l'entropia per unità di massa. Utilizzando la conservazione della materia si ottiene la forma sopra scritta. □

Nel caso in cui si abbia conservazione dell'entropia, possiamo mettere in relazione l'entalpia con la pressione; infatti detta w l'entalpia per unità di massa e V volume specifico (ovvero per unità di massa) si ha:

$$dw = Tds + Vdp = \frac{dp}{\rho} \tag{8}$$

Da cui $\frac{\mathbf{grad}(p)}{\rho} = \mathbf{grad}(w)$.

2.3 Equazione di Eulero

Consideriamo un volume di fluido; le forze di contatto agenti su di esso sono, per definizione di pressione (con d$\mathbf{f}$ indichiamo il versore di una superficie chiusa):

$$\mathbf{F} = -\int p\,\mathrm{d}\mathbf{f} = -\int \mathbf{grad}(p)\,\mathrm{d}V \tag{9}$$

Nel caso in cui siano presenti solo le forze di pressione, possiamo scrivere la legge di Newton (per unità di volume) per il nostro volumetto come:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{grad}(p) \tag{10}$$

In termini di coordinate euleriane,si ottiene l'equazione di Eulero:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{grad}(p)}{\rho} \tag{11}$$

Se sono presenti forze di volume, è sufficiente aggiungerle a destra ridotte a forze per unità di massa, a causa della divisione per ρ; ad esempio in presenza di gravità si ottiene:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{grad}(p)}{\rho} + \mathbf{g} \tag{12}$$

Da notare che l'equazione di Eulero si può riscrivere, passando al rotore a destra e sinistra:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{curl}(\mathbf{v})) = \mathbf{curl}(\mathbf{v}\wedge\mathbf{curl}(\mathbf{v})) \tag{13}$$

Abbiamo cioè ottenuto, dopo aver assunto che tutte le forze presenti possono essere scritte come il gradiente di un potenziale, un'equazione differenziale che coinvolge solo $\mathbf{v}$. Alle equazioni del moto adesso determinate vanno aggiunte le condizioni al contorno che vogliamo che $\mathbf{v}$ soddisfi. Per un fluido ideale, le condizioni al contorno adatte sono quelle d'impenetrabilità dei bordi (se vengono considerati come contorni rigidi) che comportano la necessità di avere nulle al bordo le componenti ad esso normali della velocità.

2.4 Il termine di Stokes: fluidi viscosi

Vogliamo ora aggiungere a quanto trovato nel caso di fluido ideale, un termine che tenga di conto delle forze di attrito interne al fluido. In questo modo terremo di conto del trasferimento irreversibile di quantità di moto dalle zone ad alta velocità a quelle a bassa velocità. Ci proponiamo di descrivere questo fenomeno attraverso un tensore a due indici σ'_{ik}, detto tensore degli sforzi viscosi. Poichè vogliamo rappresentare le forze di attrito generate dallo scorrimento relativo degli elementi, ci aspettiamo che il tensore dipenda dalle derivate spaziali della velocità; in particolare, per gradiente piccolo della velocità possiamo supporre che il tensore dipenda solo dalle derivate prime. Vogliamo inoltre che il termine di forza che stiamo aggiungendo diventi nullo nel caso di campo di velocità uniforme, quindi non ci possono essere termini indipendenti dalle derivate prime. Imponiamo infine che il tensore si annulli nel caso di moto rotazionale uniforme (gli strati infatti in questo caso non scorrono l'uno sull'altro anche se hanno velocità diverse);

quello che si ottiene, sfruttando l'isotropia dello spazio e imponendo la traccia nulla per la parte tra parentesi, il tensore scritto nel modo piú generale possibile:

$$\sigma_{ik}^{'} = \eta(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \tag{14}$$

Se supponiamo che i coefficienti di viscosità, η e ζ, non varino molto nei diversi punti del fluido possiamo tirarli fuori dai gradienti. Si ottiene quindi dall'equazione di Eulero, aggiungendo il termine dovuto alla viscosità, l'equazione di Navier-Stokes:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}\right] = -\mathbf{grad}(p) + \eta\triangle\mathbf{v} + (\zeta + \frac{1}{3}\eta)\mathbf{grad}(div(\mathbf{v})) \tag{15}$$

Propongo qui anche la derivazione dell'equazione di Navier-Stokes presa dagli appunti delle lezioni del professor Cornolti, in quanto utilizza un approccio diverso.

Descriviamo la forza di contatto su un elemento fluido attraverso la superficie dΣ con versore uscente $\mathbf{n} = n_i\mathbf{i}$ tramite il prodotto tensoriale $\mathbf{F} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}d\Sigma$. Passando agli infinitesimi, si ottiene la relazione $dF_i = d\Sigma_j T_{ij} = T_{ij}^T d\Sigma_j$, ovvero sfruttando il teorema di Gauss:

$$F_i = \int \nabla\mathbf{T}_i\, dV = \int \partial_j T_{ij}\, dV \tag{16}$$

Con considerazioni in un caso particolare, si trova che, per evitare comportamenti anomali del modello che stiamo costruendo, deve essere T simmetrico. Questo significa che T ammette una base di autovettori ortogonali che lo rendono diagonale. Mi aspetto inoltre di trovare in T una parte isotropa che c'è anche nel caso di campo di velocità nullo o costante, e che rappresenti la pressione termodinamica (unica forza di contatto nel caso di fluido ideale). In un materiale isotropo il prodotto diadico $\partial_i v_j$ per le regole di trasformazione che rispetta sotto rotazioni si può scomporre come somma diretta delle rappresentazioni irriducibili di SO(3) di dimensione 1 (la traccia) e di dimensione 5 (la parte simmetrica a traccia nulla). A ciascuna scomposizione corrisponde un grado di libertà, cioè un coefficiente moltiplicativo libero (non determinato dalla simmetria). Si trova quindi:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu^1 Tr(\mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{D} - \frac{1}{3}Tr(\mathbf{D})) \tag{17}$$

Con $\mathbf{D} = (\partial_i v_j + \partial_j v_i)/2$, $Tr(\mathbf{D}) = \sum_i \partial_i v_i = div(\mathbf{v})$, μ^1 coefficiente di viscosità di volume e μ coefficiente di viscosità di deformazione. Inoltre,p coincide per sua definizione con la pressione termodinamica del sistema. Si può riscrivere l'equazione precedente nella forma equivalente:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \lambda(\nabla\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} \tag{18}$$

Con $\lambda = \mu_1 - \frac{2}{3}\mu$ e μ detti secondo e primo coefficiente di viscosità. La forza per unità di volume da aggiungere all'equazione di Eulero quindi, posto $\nu = \frac{\mu}{\rho}$: $F_i = \sum_j \nu\partial_j(\partial_i v_j + \partial_j v_i) = \nu\partial_i(\partial_j v_j) + \nu\nabla^2 v_i$, che nel caso di incomprimibilità restituisce l'equazione di Navier-Stokes:

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{g} \tag{19}$$

3 Notazioni e Functional Setting

Ci appoggiamo alle notazioni che si trovano in [Temam(1995)]. Denoteremo con $L^2(\Omega)$ lo spazio delle funzioni a valori reali definite sull'insieme Ω che sono L^2 secondo la misura di Lebesgue $dx = dx_1 dx_2 ... dx_n$. Su questo spazio sono definiti il prodotto scalare e la norma tramite:

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx, \quad |u| = \{(u, u)\}^{1/2} \tag{20}$$

Denotiamo lo spazio di Sobolev $H^m(\Omega)$ come lo spazio di funzioni che stanno in L^2 insieme a tutte le derivate fino all'ordine m. Su questi spazi di Hilbert è definito il prodotto scalare (e la relativa norma):

$$(u, v)_m = \sum_{[\alpha] \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v), \quad |u|_m = \{(u, u)_m\}^{1/2} \tag{21}$$

Dove abbiamo posto $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $[\alpha] = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ e:

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{[\alpha]}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Indicheremo con $H_0^m(\Omega)$ il sottospazio di Hilbert di $H^m(\Omega)$ delle funzioni nulle sul bordo Γ di Ω, ovvero a traccia nulla (vedi Appendice A).
Indicheremo con $H_p^m(Q)$ le funzioni di H^m periodiche di periodo L lungo ogni direzione, con $Q = (]0, L[)^n$. Possiamo facilmente caratterizzare queste funzioni tramite le loro espansioni in serie di Fourier:

$$H_p^m = \{u,\, u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{2i\pi k \cdot x/L},\, \bar{c}_k = c_{-k},\, \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |k|^{2m} |c_k|^2 \leq \infty\} \tag{22}$$

Che è una caratterizzazione valida più in generale per $m \in \mathbb{R}$. Si può mostrare che in questo caso la norma indotta $|u|_m$ è equivalente a $\{\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|^{2m}) |c_k|^2\}^{1/2}$, per la quale il nostro spazio è uno spazio di Hilbert. In particolare, $\dot{H}_p^m(Q)$ e $\dot{H}_p^{-m}(Q)$ sono in dualitá $\forall m \in \mathbb{R}$.
Denotiamo l'insieme di Sobolev delle funzioni a media nulla come:

$$\dot{H}_p^m(Q) = \{u \in H_p^m(Q),\, c_0 = 0\} \tag{23}$$

Utilizzeremo la convenzione secondo cui $\{H_p^m\}^n = \mathbb{H}_p^m$. In particolare, ci appoggeremo agli spazi:

$$\begin{aligned} V(Q) &= \{u \in \mathbb{H}_p^1(Q), \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n\} \\ H(Q) &= \{u \in \mathbb{H}_p^0(Q), \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n\} \\ V'(Q) &= \{u \in \mathbb{H}_p^{-1}(Q) = (\mathbb{H}_p^1(Q))', \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n\} \end{aligned} \tag{24}$$

Indicando l'insieme $V(\Omega)$ ci riferiremo invece all'analogo nel caso generale come indicato in 120: il caso di funzioni nulle al bordo può essere visto come caso particolare del caso periodico, quindi non utilizzeremo una notazione diversa per indicarne gli insiemi; ci limiteremo a non esplicitare il dominio. Dotiamo V del prodotto scalare e della norma di Hilbert (che è equivalente a quella indotta dallo spazio di Sobolev corrispondente):

$$((u,v)) = \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}), \quad ||u|| = \{((u,u))\}^{1/2} \tag{25}$$

Si può dimostrare come V' sia il duale di V; sará da intendersi $\|\cdot\|_{V'}$ come la norma duale di $\|\cdot\|$ su V'. Tra questi insiemi vale:

$$V \subset H \subset V'$$

Con i contenimenti da intendersi continui e con gli spazi densi ognuno in quello che segue. Si può mostrare che lo spazio delle funzioni regolari:

$$\mathscr{V} = V \cap \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)^n$$

E' denso in V, H e V'. Per ulteriori dettagli ed alcuni risultati sulla scelta degli spazi funzionali, consulta l'appendice A.

3.1 Inclusione continua tra insiemi

Definizione 1. Siano H,V due spazi di Hilbert tali che $H \subset V$. Si dice che H è incluso in modo continuo in V se vale:

$$\exists c > 0 \text{ tale che } \|u\|_V \leq c\|u\|_H \qquad \forall u \in H \tag{26}$$

In questo caso se $\phi \in V'$, cioè ϕ è un funzionale lineare e continuo $\phi : V \to \mathbb{R}$, allora $\phi \in H'$

Si può mostrare che, nel caso in cui l'aperto Ω sia limitato, in virtù della disuguaglianza di Poincarè vale:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H_0^1 \tag{27}$$

Che dimostra la relazione di inclusione continua tra i due insiemi.

3.2 Equazioni di Navier Stokes, forma variazionale

Definito:

$$b(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} u_i D_i v_j w_j \, dx \tag{28}$$

L'equazione di Navier Stokes riportata in 19 può essere riscritta proiettando col prodotto scalare di $\mathbb{R}^n$ (indicato come $(\vec{a},\vec{b})_{\mathbb{R}^n} = \vec{a}\cdot\vec{b}$) su $\vec{v} \in \mathbb{L}^2$, integrando sul dominio Ω e sfruttando la condizione 40 come:

$$\frac{d}{dt}(\vec{u},\vec{v}) + \nu((\vec{u},\vec{v})) + b(\vec{u},\vec{u},\vec{v}) = (\vec{f},\vec{v}) \qquad \forall \vec{v} \in \mathscr{V} \tag{29}$$

Verifichiamo quanto appena affermato termine a termine:

$$\frac{d}{dt}(\vec{u},\vec{v}) \text{ viene da } \int \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{v}\,dx = \frac{d}{dt}\int \vec{u}\cdot\vec{v}\,dx \tag{30}$$

Abbiamo qui assunto, poichè $\vec{v} \in L^2(\Omega)$, che $\vec{v}$ non dipende dalla variabile t. Il termine non lineare è per definizione di b:

$$\int (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\cdot\vec{v}\,dx = \sum_{i,j}\int u_i D_i u_j v_j\,dx = b(\vec{u},\vec{u},\vec{v}) \tag{31}$$

Per il termine di viscosità abbiamo:

$$\begin{aligned} &-\int_\Omega \triangle\vec{u}\cdot\vec{v}\,dx = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega D_i^2\vec{u}\cdot\vec{v}\,dx = \\ &= -\sum_{i=1}^n \int_\Omega \left[D_i(D_i\vec{u}\cdot\vec{v}) - D_i\vec{u}\cdot D_i\vec{v}\right]dx = \\ &= -\sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} n_i D_i u_j v_j d\sigma + \int_\Omega D_i\vec{u}\cdot D_i\vec{v}\,dx = \\ &= \int_\Omega D_i\vec{u}\cdot D_i\vec{v}\,dx = ((\vec{u},\vec{v})) \end{aligned} \tag{32}$$

Dove abbiamo chiamato n_i le componenti della normale alla superficie $\partial\Omega$, e dove il termine d'integrale su $\partial\Omega$ fa zero perchè abbiamo preso $\vec{u}$ nullo al bordo. Il termine in $\vec{\nabla}(p)$ fa zero se consideriamo $\vec{v}$ a divergenza nulla, per il risultato di ortogonalità esposto nell'ultimo teorema dell'appendice A. L'equazione così ottenuta può essere riscritta in V' tramite l'operatore di stokes A (vedi prossima sezione) e l'operatore B definito da:

$$\langle B(\vec{u},\vec{v},\vec{w}),\vec{w}\rangle = b(\vec{u},\vec{v},\vec{w}), \qquad B\vec{u} = B(\vec{u},\vec{u}). \tag{33}$$

Ottenendo:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \nu A\vec{u} + B\vec{u} = \vec{f} \text{ in } V'. \tag{34}$$

3.3 Formulazione variazionale del problema di Navier Stokes

Su [Temam(1995)] vengono riportate due formulazioni, una debole ed una forte, a seconda degli spazi funzionali in cui prendiamo i dati. Le riportiamo per comodità anche qui:

Problema: soluzioni deboli. Siano:

$$\begin{aligned} &f \in L^2(0,T;V') \\ &u_0 \in H \end{aligned} \tag{35}$$

Trovare $u \in L^2(0,T;V)$ che soddisfi:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(u,v) + \nu((u,v)) + b(u,u,v) = \langle f,v\rangle \qquad \forall v \in V, \\ &u(0) = u_0 \end{aligned} \tag{36}$$

□

Problema: soluzioni forti. Siano:

$$\begin{aligned} &f \in L^2(0,T;H) \\ &u_0 \in V \end{aligned} \tag{37}$$

Trovare $u \in L^2(0,T;D(A)) \cap L^\infty(0,T;V)$ che soddisfi:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(u,v) + \nu((u,v)) + b(u,u,v) = \langle f,v\rangle \qquad \forall v \in V, \\ &u(0) = u_0 \end{aligned} \tag{38}$$

□

4 Equazione di Stokes e l'operatore di Stokes.

Assegnata $\vec{f} \in \dot{\mathbb{H}}^0_p(Q)$ o $\vec{f} \in \dot{\mathbb{H}}^{-1}_p(Q)$ trovare $\vec{u} \in \dot{\mathbb{H}}^1_p(Q)$ e $p \in L^2(Q)$ tali che:

$$-\triangle\vec{u} + \vec{\nabla}p = \vec{f} \text{ in } Q \tag{39}$$

e

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \text{ in } Q \tag{40}$$

Da notare che se $\vec{u}$ e p soddisfano il problema appena descritto, lo soddisfano anche $\vec{u}' = \vec{u} + \vec{\alpha}$ e $p' = p + \beta$ con $\vec{\alpha}$ e β costanti qualsiasi che non dipendono dalle coordinate spaziali; questo risulta evidente perchè entrambe le funzioni compaiono solo tramite le proprie derivate, e poichè $Q = (]0, L[)^n$ allora $\vec{u} \in \mathbb{H}^1_p(Q) \Rightarrow \vec{u}' \in \mathbb{H}^1_p(Q)$ com'è immediato verificare. Le posso quindi prendere a media nulla senza perdere generalità.

4.1 Soluzione tramite sviluppo in serie di Fourier

Per risolvere il problema di Stokes conviene scrivere lo sviluppo n-dimensionale in serie di Fourier delle funzioni in gioco, in modo da poter derivare in modo semplice. Evitando di inserire il simbolo di vettore al pedice dei coefficienti di Fourier per non appesantire la notazione, si ha:

$$\vec{u} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \vec{u}_k e^{2\pi i \frac{\vec{k}\cdot\vec{x}}{L}}, \qquad p = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} p_k e^{2\pi i \frac{\vec{k}\cdot\vec{x}}{L}}, \qquad \vec{f} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \vec{f}_k e^{2\pi i \frac{\vec{k}\cdot\vec{x}}{L}}. \tag{41}$$

Se poniamo ad esempio n=2, si ottiene per lo sviluppo della velocità:

$$\begin{aligned}\vec{u} = \vec{u}_{(0,0)} + \vec{u}_{(1,0)}e^{2\pi i \frac{x}{L}} + \vec{u}_{(0,1)}e^{2\pi i \frac{y}{L}} + \vec{u}_{(-1,0)}e^{-2\pi i \frac{x}{L}} + \vec{u}_{(0,-1)}e^{-2\pi i \frac{y}{L}} + \\ + \vec{u}_{(2,0)}e^{4\pi i \frac{x}{L}} + \vec{u}_{(1,1)}e^{2\pi i \frac{x+y}{L}} + \vec{u}_{(0,2)}e^{4\pi i \frac{y}{L}} + \dots\end{aligned} \tag{42}$$

con:

$$\vec{u}_{(k,h)} = C(k,h) \int_0^L \int_0^L \vec{u}(x,y) e^{2\pi i \frac{kx}{L}} e^{2\pi i \frac{hy}{L}} \tag{43}$$

Per C(k,h) la costante di normalizzazione per il set ortonormale utilizzato, facilmente esplicitabile imponendo la condizione di normalizzazione per il set stesso. Sostituendo gli sviluppi di Fourier nella 39, ed esplicitando il vincolo 40 otteniamo in ordine:

$$-\frac{4\pi^2|\vec{k}|^2}{L^2}\vec{u}_k + \frac{2\pi i p_k}{L}\vec{k} = \vec{f}_k \tag{44}$$

e

$$\vec{k} \cdot \vec{u}_k = 0 \tag{45}$$

Posso moltiplicare scalarmente a destra e a sinistra nella 44 per $\vec{k}$ e, sfruttando la 45, si ottiene:

$$p_k = \frac{L\vec{k} \cdot \vec{f}_k}{2\pi i|\vec{k}|^2} \qquad \vec{k} \in \mathbb{Z}^n\,,\, \vec{k} \neq 0 \tag{46}$$

Ho quindi determinato esplicitamente la relazione che lega i coefficienti di Fourier della pressione p con quelli di $\vec{f}$. Posso allora risostituire in 44 e ottenere:

$$\vec{u}_k = -\frac{L^2}{4\pi^2|\vec{k}|^2}(\vec{f}_k - \frac{(\vec{k} \cdot \vec{f}_k)\vec{k}}{|\vec{k}|^2}) \tag{47}$$

Prendere $\vec{f}$ in H significa prendere una funzione a divergenza nulla, e deve quindi valere $\vec{k} \cdot \vec{f}_k = 0$. Sostituendo in 47 otteniamo infine:

$$\begin{aligned} &p = 0 \\ &\vec{u}_k = -\frac{L^2\vec{f}_k}{4\pi^2|\vec{k}|^2} \end{aligned} \tag{48}$$

Abbiamo ottenuto una mappa $\vec{f} \to \vec{u}$ che manda H in $D(A) = \{\vec{u} \in H, \triangle\vec{u} \in H\} = \dot{\mathbb{H}}^2_p(Q) \cap H$. La mappa inversa che ad ogni $\vec{u}$ associa una $\vec{f}$ si denota A, si dice operatore di Stokes e rispetta:

$$\vec{f}_k = -\frac{4\pi^2|\vec{k}|^2\vec{u}_k}{L^2} \Rightarrow A\vec{u} = -\triangle\vec{u} \qquad \forall\vec{u} \in D(A) \tag{49}$$

4.2 Proprietà dell'operatore di Stokes

Si può dimostrare che l'operatore A è un operatore illimitato positivo lineare autoaggiunto su H. Inoltre, si può mostrare che A è un isomorfismo da D(A) in H e da V in V'. Riportiamo autofunzioni ed autovalori di A definiti da:

$$\begin{aligned} &Aw_j = \lambda_j w_j, \qquad w_j \in D(A) \text{ for } j \in \mathbb{N}, \\ &0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots, \qquad \lambda_j \to \infty \text{ for } j \to \infty \end{aligned} \tag{50}$$

Si ha:

$$\vec{w}_{k,\alpha} = (\hat{e}_\alpha - \frac{k_\alpha\vec{k}}{|\vec{k}|^2})e^{2\pi i\frac{\vec{k}\cdot\vec{x}}{L}}, \qquad \lambda_{k,\alpha} = \frac{4\pi^2|\vec{k}|^2}{L^2} \tag{51}$$

Dove $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n, k \neq 0, \alpha = 1, \ldots, n$, e $\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n$ rappresenta la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

5 Stime a priori

Ci occupiamo ora di ricavare alcune stime in norma per la funzione u che descrive il campo di velocità del fluido, nel tentativo di trovare dei risultati di regolarità sulla nostra soluzione, ovvero di poter escludere comportamenti patologici della stessa. Ometteremo il segno di vettore sulla u per evitare di appesantire ulteriormente la notazione. Assumiamo ora u una soluzione sufficientemente regolare dei problemi 2.1-2.2 riportati su [Temam(1995)]; cerchiamo di maggiorare la norma di u in termini delle funzioni date u_0 , f e del parametro ν. Riportiamo qui alcuni lemmi che esplicitano i conti dietro ai passaggi chiave che si trovano al paragrafo 3.1 di [Temam(1995)].

Lemma 5.1.

$$\langle f(t), u(t)\rangle \leq \|f(t)\|_{V'}\|u(t)\| \tag{52}$$

Dimostrazione. Sia $T_f : V(Q) \to \mathbb{R}$ l'applicazione $u \to \langle f, u\rangle_{V(Q)}$. Quest'applicazione è, per come l'abbiamo definita, un elemento del duale di $V(Q)$, ovvero è un elemento di $V'(Q)$. Dunque T_f come operatore ha norma definita da:

$$\begin{aligned} \|T_f\|_{V'(Q)} &:= \inf\{M \geq 0 : |T_f(u)| \leq M\|u\|_{V(Q)} \forall u \in V(Q)\} = \\ &= \inf\{M \geq 0 : \frac{|T_f(u)|}{\|u\|_{V(Q)}} \leq M\} = \sup \frac{|T_f(u)|}{\|u\|_{V(Q)}} \end{aligned} \tag{53}$$

Poichè T_f è un operatore limitato, posso definire la norma $\|f\|_{V'}$ come uguale a quella dell'operatore $\|T_f\|_{V'}$, in appoggio al teorema di Riesz (ricordiamo che $V \subset L^2 = (L^2)' \subset V'$, con l'uguaglianza stabilita proprio dal teorema di Riesz). Esplicitiamo la tesi, sfruttando il significato di sup:

$$\langle f, u\rangle \leq |\langle f, u\rangle| = |T_f(u)| \leq \|T_f\|_{V'}\|u\|_V = \|f\|_{V'}\|u\|_V \tag{54}$$

□

Lemma 5.2.

$$\|f(t)\|_{V'}\|u(t)\| \leq \frac{\nu}{2}\|u(t)\|^2 + \frac{1}{2\nu}\|f(t)\|^2_{V'} \tag{55}$$

Dimostrazione. Si tratta di un breve conto, è sufficiente notare che:

$$\begin{aligned} &\frac{\nu}{2}\|u(t)\|^2 + \frac{1}{2\nu}\|f(t)\|^2 - \|u(t)\|\|f(t)\| = (\sqrt{\frac{\nu}{2}}\|u(t)\| - \sqrt{\frac{1}{2\nu}}\|f(t)\|)^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow \frac{\nu}{2}\|u(t)\|^2 + \frac{1}{2\nu}\|f(t)\|^2 \geq \|u(t)\|\|f(t)\| \end{aligned} \tag{56}$$

□

Dall'equazione 29, come riportato in [Temam(1995)], applicando i due lemmi appena dimostrati risulta valida la disequazione:

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \nu\|u(t)\|^2 \leq \frac{1}{\nu}\|f(t)\|^2_{V'} \tag{57}$$

Integrando questa relazione tra 0 e T ed utilizzando $|u(t)| \geq 0$, otteniamo le stime riportate su [Temam(1995)] che riportiamo di seguito:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \|u\|^2 dt \leq K_1, \\ &K_1(u_0, f, \nu, T) = \frac{1}{\nu}\left(|u_0|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T \|f\|^2_{V'} dt\right) \end{aligned} \tag{58}$$

Mentre, integrando tra 0 e s con $0 < s < T$ e maggiorando con 0 termini negativi si ottiene:

$$\begin{aligned} &|u(s)|^2 \leq |u_0|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^s \|f(t)\|^2_{V'} dt \\ &\sup_{s\in[0,T]} |u(s)|^2 \leq K_2 \\ &K_2(u_0, f, \nu, T) = \nu K_1 \end{aligned} \tag{59}$$

In modo del tutto analogo si può ripetere la procedura sostituendo nell'equazione riportata in 29 al posto di v $Au(t)$; si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu|Au(t)|^2 + b(u(t), u(t), Au(t)) =& (f(t), Au(t)) \\ \leq& \frac{\nu}{4}|Au(t)|^2 + \frac{1}{\nu}|f(t)|^2 \end{aligned} \tag{60}$$

5.1 Caso n=2

A questo punto, per procedere con le stime a priori, è necessario distinguere i casi n=2 e n=3; infatti è possibile dimostrare per la forma trilineare b le seguenti disequazioni (che provengono essenzialmente dall'applicazione della diseguaglianza di Hoelder):

$$\begin{aligned} &|b(u,v,w)| \leq c_2|u|^{1/2}\|u\|^{1/2}\|v\|^{1/2}|Av|^{1/2}|w| \\ &\forall u \in V,\ v \in D(A),\ w \in H, \qquad \text{se } n = 2, \end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned} &|b(u,v,w)| \leq c_3\|u\|\|v\|^{1/2}|Av|^{1/2}|w| \\ &\forall u \in V,\ v \in D(A),\ w \in H, \qquad \text{se } n = 3, \end{aligned} \tag{62}$$

Occupiamoci ora di ottenere le stime a priori per il caso n=2. Sfruttando la prima delle due disequazioni appena riportate, sostituendola nella 60:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu|Au(t)|^2 + b(u(t), u(t), Au(t)) \leq \\
&\leq \frac{\nu}{4}|Au(t)|^2 + \frac{1}{\nu}|f(t)|^2 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \frac{3\nu}{2}|Au(t)|^2 + 2b(u(t), u(t), Au(t)) \leq \frac{2}{\nu}|f(t)|^2 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \frac{3\nu}{2}|Au(t)|^2 \leq \frac{2}{\nu}\|f(t)\|^2 - 2b(u(t), u(t), Au(t)) \leq \\
&\leq \frac{2}{\nu}|f(t)|^2 + 2|b(u(t), u(t), Au(t))| \leq \\
&\leq \frac{2}{\nu}|f|^2 + 2c_2|u|^{1/2}\|u\||Au|^{3/2}
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Dopodiché applichiamo la nota diseguaglianza di Young, nella forma:

$$
ab \leq \epsilon a^p + c_\epsilon b^{p'}, \qquad 1 < p < \infty, \qquad p' = \frac{p}{p-1}, \qquad c_\epsilon = \frac{(p-1)}{p^{p'}\epsilon^{(1/p)-1}} \tag{64}
$$

In cui sostituiamo:

$$
p = \frac{4}{3}, \qquad \epsilon = \frac{\nu}{2}, \qquad a = |Au|^{3/2}, \qquad b = |u|^{1/2}\|u\| \tag{65}
$$

Per ottenere la relazione:

$$
\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + \nu|Au(t)|^2 \leq \frac{2}{\nu}|f(t)|^2 + c_1'|u(t)|^2\|u\|^4 \tag{66}
$$

Dimenticando il termine $\nu|Au|^2$ abbiamo ottenuto una disequazione differenziale della forma giusta per applicare il lemma di Gronwall:

Lemma 5.3. Supponiamo di avere una disequazione differenziale della forma:

$$
\dot{y}(t) \leq a(t) + \theta(t)y(t) \tag{67}
$$

Allora vale la seguente disuguaglianza:

$$
y(t) \leq y(0)e^{\int_0^t \theta(r)dr} + \int_0^t a(\tau)e^{\int_\tau^t \theta(r)dr}d\tau \tag{68}
$$

Dimostrazione. Si tratta di effettuare qualche calcolo. Possiamo riscrivere la disequazione come:

$$
\begin{aligned}
&\dot{y} - \theta y \leq a \Leftrightarrow e^{-\int_0^t \theta(s)ds}\left[\dot{y}(t) - \theta(t)y(t)\right] \leq a(t)e^{-\int_0^t \theta(s)ds} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(y(t)e^{-\int_0^t \theta(r)dr}) \leq a(t)e^{-\int_0^t \theta(r)dr} \\
&\Leftrightarrow y(t)e^{-\int_0^t \theta(r)dr} - y(0) \leq \int_0^t a(\theta)e^{-\int_0^\tau \theta(r)dr}d\tau \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow y(t) \leq y(0)e^{\int_0^t \theta(r)dr} + \int_0^t a(\tau)e^{\int_\tau^t \theta(r)dr}d\tau
\end{aligned}
\tag{69}
$$

Che è la tesi. $\square$

Applichiamo il lemma appena dimostrato alla 66 senza il termine in $Au(t)$; poste:

$$y(t) = \|u(t)\|^2 \qquad \theta(\tau) = c_1'|u(\tau)|^2\|u(\tau)\|^2 \qquad a(s) = \frac{2}{\nu}|f(s)|^2 \tag{70}$$

Otteniamo:

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u_0\|^2 e^{\int_0^t c_1'|u(\tau)|^2\|u(\tau)\|^2 d\tau} + \frac{2}{\nu}\int_0^t |f(s)|^2 e^{\int_s^t c_1'|u(\tau)|^2\|u\|^2 d\tau} ds \tag{71}$$

Sfruttando le 58 e 59 si ottengono infine le stime:

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^2 \leq K_3 \\ &K_3(u_0, f, \nu, L) = \left(\|u_0\|^2 + \frac{2}{\nu}\int_0^T |f(s)|^2 ds\right) e^{c_1' K_1 K_2} \end{aligned} \tag{72}$$

Tornando alla 66, ovvero considerando di nuovo il termine in $Au(t)$, con un integrale da 0 a T otteniamo, in totale analogia a quanto visto per 58:

$$\begin{aligned} &\nu\int_0^T |Au(t)|^2 dt \leq \|u_0\|^2 + \frac{2}{\nu}\int_0^T |f(t)|^2 dt + c_1' \sup_{t\in[0,T]} |u(t)|^2\|u(t)\|^4 \\ &\int_0^T |Au(t)|^2 dt \leq K_4 \\ &K_4(u_0, f, \nu, L) = \frac{1}{\nu}\left(\|u_0\|^2 + \frac{2}{\nu}\int_0^T |f(t)|^2 dt + c_1' K_2 K_3^2\right) \end{aligned} \tag{73}$$

6 Risultati e alcune dimostrazioni di esistenza ed unicità delle equazioni di Navier-Stokes

Riportiamo alcuni risultati noti riguardanti l'esistenza e l'unicità di una soluzione $\vec{u}$ per l'equazione di Navier Stokes. Non riportiamo i casi più generali possibili; consigliamo in caso di necessità di cercare in [Ladyzhenskaya(1963)] o in [Temam(1984)]. Da quest'ultimo abbiamo estratto le dimostrazioni riportate.

6.1 Esistenza

Teorema 6.1. Supponiamo che la dimensione dello spazio $\mathbb{R}^n$ in cui vive il dominio Ω sia $n \leq 4$. Supponiamo che siano assegnate $\vec{f}$ e $\vec{u}_0$ tali che:

$$\begin{aligned} &\vec{f} \in L^2(0,T;V') \\ &\vec{u}_0 \in H, \end{aligned} \tag{74}$$

Allora esiste almeno una funzione $\vec{u}$ che soddisfi le equazioni di Navier Stokes nella forma:

$$\begin{aligned} &\vec{u} \in L^2(0,T;V),\ \vec{u}' \in L^2(0,T;V') \\ &\vec{u}' + \nu A\vec{u} + B\vec{u} = \vec{f} \text{ in } (0,T), \\ &\vec{u}(0) = \vec{u}_0 \end{aligned} \tag{75}$$

Inoltre $\vec{u} \in L^\infty(0,T;H)$ e $\vec{u}$ è una funzione debolmente continua da $[0,T]$ in H.

Note: L'enunciato di questo teorema e la sua dimostrazione sono riportati in [Temam(1984)](pag.282). Noi ci limitiamo ad esporre il filo logico della dimostrazione, senza riportare tutti i conti per brevità. Sostanzialmente si applica il metodo di Galerkin: poichè V è separabile e $\mathscr{V}$ è denso in V, esiste una successione di elementi in $\mathscr{V}$ che rappresenta un sistema completo in V. La denotiamo come $w_1, \ldots, w_m \ldots$. Si definisce a questo punto una soluzione approssimata del problema come:

$$\vec{u}_m = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\vec{w}_i \tag{76}$$

tale che soddisfi:

$$\begin{aligned} &(\vec{u}'_m(t), w_j) + \nu((\vec{u}_m(t), \vec{w}_j)) + b(\vec{u}_m, \vec{u}_m(t), w_j) = \langle f(t), w_j \rangle\,, \\ &t \in [0,T],\ j = 1, \ldots, m\,, \\ &\vec{u}_m(0) = \vec{u}_{0m}, \end{aligned} \tag{77}$$

Dove abbiamo indicato con $\vec{u}_{0m}$ la proiezione di $\vec{u}_0$ sullo spazio generato dai $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$. A questo punto si scarica il problema dell'esistenza di una tale

$\vec{u}_m$ sui coefficienti g_{im}; si può infatti mostrare che il problema appena scritto per $\vec{u}_m$ può essere riscritto come:

$$g'_{im}(t) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} g_{jm}(t) + \sum_{j,k=1}^{m} \alpha_{ijk} g_{jm}(t) g_{km}(t) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} \langle \vec{f}(t), \vec{w}_j \rangle. \quad (78)$$

Che è un sistema di equazioni differenziali non lineari (nel quale non sono più presenti derivate parziali), e di cui sappiamo esistere una soluzione massimale definita su un qualche $[0, t_m]$. Le stime a priori che abbiamo mostrato nel paragrafo precedente, in particolare le 58 e 59 permettono di assegnare una certa regolarità alla successione $\vec{u}_m$ cosicchè essa non scoppi all'infinito prima di T e converga per $m \to \infty$ ad una $\vec{u}$. La dimostrazione termina dopo aver provato che è possibile passare al limite all'interno della 77. $\square$

Riportiamo invece la dimostrazione in un caso di regolarità maggiore. Supponiamo che sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ limitato e Lipschitziano; allora nel metodo di Galerkin è possibile scegliere la successione $w_1, \dots, w_m, \dots$ come 51. In particolare, nel caso n=2, si ha:

Teorema 6.2. Sia Ω un aperto limitato di classe $\mathcal{C}^2$ in $\mathbb{R}^2$. Supponiamo che siano assegnate $\vec{f} \in L^2(0, T; H)$ e $\vec{u}_0 \in V$. Allora esiste una soluzione al problema 75, che soddisfa:

$$\vec{u} \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; V), \qquad \vec{u}' \in L^2(0, T; H) \quad (79)$$

Dimostrazione. Applichiamo il metodo Galerkin in analogia a quanto fatto in 6.1 ma scegliendo il set ortonormale completo definito da 51 per definire la soluzione approssimata. Possiamo riscrivere la 77 come:

$$(\vec{u}'_m, \vec{w}_j) + (\nu A \vec{u}_m + B \vec{u}_m, \vec{w}_j) = (\vec{f}, \vec{w}_j) \qquad 1 \le j \le m \quad (80)$$

Sfruttando la definizione di A e dei $\vec{w}_j$, con un'operazione analoga all'integrazione per parti, poichè abbiamo scelto funzioni a traccia nulla (cioè nulle al bordo) abbiamo:

$$((\vec{w}_j, \vec{\nu})) = (A \vec{w}_j, \vec{\nu}) = \lambda_j (\vec{w}_j, \vec{\nu}), \qquad \forall \vec{\nu} \in V. \quad (81)$$

Dunque, dopo aver moltiplicato per λ_j possiamo riscrivere la 80 come:

$$((\vec{u}'_m, \vec{w}_j)) + \nu (A \vec{u}_m, A \vec{w}_j) + (B \vec{u}_m, A \vec{w}_j) = (f, A \vec{w}_j). \quad (82)$$

Moltiplicando a destra e sinistra per g_j e sommando sull'indice j otteniamo allora la relazione 66 che sappiamo, attraverso il lemma di Gronwall, portare a 72 e a 73. Da queste, si conclude che $\vec{u}_m$ rimane limitata in $L^\infty(0, T; V)$ e che $\vec{u}_m$ rimane limitata in $L^2(0, T; \mathbb{H}^2(\Omega))$. Segue quindi che $\vec{u}_m$ converge a $\vec{u}$ per $\vec{u} \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}^2(\Omega))$. Per quanto riguarda $\vec{u}'$, sappiamo che vale:

$$\vec{u}' = \vec{f} - B \vec{u} - \nu A \vec{u} \quad (83)$$

Ma si può mostrare che $B\vec{u} \in L^4(0,T;H)$ e $A\vec{u} \in L^2(0,T;H)$ implicano $\vec{u}' \in L^2(0,T;H)$ (perchè $[0,T]$ è limitato, quindi $L^4(0,T;H) \subset L^2(0,T;H)$), che è la tesi. □

6.2 Unicità

Torniamo ora al caso più generale e dimostriamo il risultato di unicità, sempre nel caso bidimensionale.

Teorema 6.3. Supponiamo n=2. La soluzione $\vec{u}$ del problema 75 data dal teorema 80 è unica. Inoltre $\vec{u}$ è quasi ovunque uguale ad una funzione continua da $[0,T]$ in H e:

$$\vec{u}(t) \to \vec{u}_0, \text{ in } H, \text{ as } t \to 0. \tag{84}$$

Dimostrazione. Cominciamo col provare il risultato di regolarità. Possiamo riscrivere la 75 come:

$$\vec{u}' = \vec{f} - B\vec{u} - \nu A\vec{u} \tag{85}$$

Poichè tutti i termini a destra sono $L^2(0,T;V')$ otteniamo che $\vec{u}' \in L^2(0,T;V')$. Si può provare ([Temam(1984)](p.260, Lemma 1.2)) che questo implica che sia $\vec{u} \in \mathcal{C}([0,T];H)$, da cui segue, per la continuità, il risultato di regolarità esposto. Inoltre, dallo stesso lemma appena citato segue che vale:

$$\frac{d}{dt}|\vec{u}(t)|^2 = 2\langle \vec{u}'(t), \vec{u}(t)\rangle. \tag{86}$$

Supponiamo ora che esistano due soluzioni $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ per 75, e definiamo $\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$. Allora $\vec{u}$ deve soddisfare:

$$\begin{aligned} &\vec{u}' + \nu A\vec{u} = -B\vec{u}_1 + B\vec{u}_2 \\ &\vec{u}(0) = 0 \end{aligned} \tag{87}$$

Come abbiamo già fatto in precedenza, prendiamo il prodotto scalare della prima equazione, che vive in V' con $\vec{u}(t) \in V$. Poichè:

$$b(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -b(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v})$$

Risulta evidente, dalla trilinearità di b:

$$\begin{aligned} &b(\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_2, \vec{u}_1 - \vec{u}_2) = b(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_1 - \vec{u}_2) - b(\vec{u}_2, \vec{u}_2, \vec{u}_1 - \vec{u}_2) = \\ &= b(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_1) - b(\vec{u}_1, \vec{u}_1, \vec{u}_1 - \vec{u}_2) \end{aligned} \tag{88}$$

e

$$\begin{aligned} b(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_1 - \vec{u}_2) = b(\vec{u}_1, \vec{u}_2 + (\vec{u}_1 - \vec{u}_2), \vec{u}_1 - \vec{u}_2) - b(\vec{u}_1, \vec{u}_1 - \vec{u}_2, \vec{u}_1 - \vec{u}_2) = \\ = b(\vec{u}_1, \vec{u}_2 + (\vec{u}_1 - \vec{u}_2), \vec{u}_1) \end{aligned}$$

Si ottiene:

$$\frac{d}{dt}|\vec{u}(t)|^2 + 2\nu\|\vec{u}(t)\|^2 = -2\left(b(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_1 - \vec{u}_2) - b(\vec{u}_2, \vec{u}_2, \vec{u}_1 - \vec{u}_2)\right) = \\ = -2b(\vec{u}(t), \vec{u}_2(t), \vec{u}(t)). \tag{89}$$

Poichè si può dimostrare che per l'operatore trilineare b nel caso n=2 vale:

$$|b(\vec{u}, \vec{\nu}, \vec{w})| \leq 2^{1/2}|\vec{u}|^{1/2}\|\vec{u}\|^{1/2}\|\vec{\nu}\||\vec{w}|^{1/2}\|\vec{w}\|^{1/2}, \qquad \forall \vec{u}, \vec{\nu}, \vec{w} \in H_0^1(\Omega) \tag{90}$$

Applicando le maggiorazioni del caso, in modo del tutto analogo a quanto fatto per ricavare le 58, otteniamo:

$$\frac{d}{dt}|\vec{u}(t)|^2 \leq \frac{1}{\nu}|\vec{u}(t)|^2\|\vec{u}_2(t)\|^2. \tag{91}$$

A questo punto, poichè sappiamo che $\vec{u}_2 \in \mathcal{C}([0,T]; H)$ possiamo integrarla nel tempo, e la disequazione appena scritta diventa:

$$\frac{d}{dt}\left[|\vec{u}(t)|^2 e^{-\frac{1}{\nu}\int_0^t \|\vec{u}_2(s)\|^2 ds}\right] \leq 0 \tag{92}$$

Questa si può integrare a sua volta e, ricordando che $\vec{u}(0) = 0$, otteniamo la tesi:

$$|\vec{u}(t)|^2 \leq 0, \, \forall t \in [0, T] \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \tag{93}$$

□

7 La tesi in meno di dieci minuti

Le equazioni di Navier Stokes, ricavate nel 1822 da Navier, sono:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = \nu\triangle u - \frac{\nabla p}{\rho} + f \\ &u(0) = u_0 \\ &u(\partial\Omega) = 0 \\ &\nabla \cdot u = 0 \end{aligned} \tag{94}$$

Il motivo per cui scegliamo u nulla al bordo è essenzialmente storico, dovuto a considerazioni di carattere sperimentale riconducibili a Stokes, come evidenziato in [Day(1990)]. In realtà l'imposizione di questa condizione al bordo non è deducibile dai principi del modello; ci sono infatti evidenze sperimentali di violazioni di queste condizioni; a tal riguardo, consiglio di consultare [Eric Lauga and Stone(2005)]. La condizione di incomprimibilità espressa come divergenza nulla è un'immediata conseguenza dell'equazione di continuità imposta in contemporanea con la derivata lagrangiana (o materiale) della ρ nulla.

Trattandosi di un'equazione alle derivate parziali, viene naturale cercare soluzioni nello spazio L^2. Ci appoggeremo allo spazio di Sobolev H^m per richiedere che anche le derivate m-esime rimangano in L^2. Gli spazi più usati in letteratura come functional setting per matematizzare il problema sono, di conseguenza:

$$\begin{aligned} H &= \{u \in L_0^2 : \nabla \cdot u = 0\} \\ V &= \{u \in H_0^1 : \nabla \cdot u = 0\} \end{aligned} \tag{95}$$

Indicheremo la norma su V come $((u, w)) = \sum_i (D_i u, D_i w)$. Detto A l'operatore di Stokes tale che $A = -\triangle$, ovvero $A : V \to V'$, e $(Bu, v) = b(u, u, v) = \sum_{i,j} \int u_i D_i(u_j) v_j dx$ bilineare che $B : V \times V \to V'$ possiamo riscrivere le equazioni di NS come equazioni differenziali nel duale di V, che indicheremo con V':

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + Bu + \nu Au = f \\ &u(0) = u_0 \end{aligned} \tag{96}$$

Con le solite condizioni su u.

Trattandosi di un'equazione non lineare alle derivate parziali, non è detto che esista una soluzione abbastanza regolare per tutto l'intervallo $t \in [0, T]$ in cui osserviamo il fluido. A priori tale soluzione potrebbe esistere fino ad un certo $T^* < T$ e poi smettere di soddisfare le eq di NS, oppure biforcarsi e perdere di unicità. Per analizzare la presenza di questi comportamenti anomali, si costruiscono delle stime sulla norma di u in funzione delle norme dei dati (f e u_0). E' quindi evidente l'importanza di scegliere dei dati abbastanza regolari per avere soluzioni non patologiche; si trova inoltre che le stime vengono a dipendere dalla dimensione del dominio Ω su cui sono definite le funzioni. Vale il seguente teorema di esistenza:

Teorema 7.1. Nel caso in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $n \leq 4$ date:

$$\begin{aligned} &f \in L^2(0, T; V') \\ &u_0 \in H \end{aligned} \tag{97}$$

Allora:

$$\exists u \in L^2(0, T; V), \dot{u} \in L^2(0, T; V') \tag{98}$$

e che rispetta l'equazione di NS in tutto l'intervallo $[0, T]$. Inoltre $u \in L^\infty(0, T; H)$ ed è quasi ovunque uguale a una funzione debolmente continua da $[0, T]$ in H.

Si dimostra questo risultato in appoggio al metodo di Galerkin, che prevede la costruzione di una soluzione approssimata del tipo:

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} g_{im} w_i \tag{99}$$

In questo modo, poichè m è finito, si riesce a scaricare il problema dell'esistenza di una tale u_m sull'esistenza dei coefficienti g_{im}, i quali devono rispettare un'equazione differenziale non lineare in cui non sono però presenti le derivate parziali (i g dipendono solo da t), e che quindi ammette soluzione in un intervallo $[0, t_m]$. Tramite delle stime in norma si prova che $t_m \geqslant T$ e che u_m è sufficientemente regolare da convergere ad una u con le proprietà di regolarità esposte nel teorema. La dimostrazione si conclude provando che si può passare al limite, esponendo u come la soluzione che cercavamo.

Vogliamo ora curare l'unicità della soluzione. Nel caso in cui n=2, vale:

Teorema 7.2. Con le stesse ipotesi del teorema di esistenza prima citato, u è unica.

Supponiamo che esistano due soluzioni u_1 e u_2. Detta $u = u_1 - u_2$, questa dovrà essere soluzione del problema:

$$\begin{aligned} &\dot{u} + \nu A u = -Bu_1 + Bu_2 \\ &u(0) = 0 \end{aligned} \tag{100}$$

proiettando su $u \in V$, e sfruttando delle stime in norma su b si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|u(t)|^2 \leq \frac{1}{\nu}|u(t)|^2\|u_2(t)\|^2 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[|u|^2 e^{-\frac{1}{\nu}\int_0^t \|u_2\|^2 ds}\right] \leq 0 \\ \Leftrightarrow |u|^2 \leq 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2 \end{aligned} \tag{101}$$

8 Appendice A:Appunti del professor Acquistapace sugli spazi funzionali

Lemma 8.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto per lo spazio:

$$E(\Omega) = \{\vec{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \in L^2(\Omega)\} \tag{102}$$

$E(\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma:

$$\|\vec{u}\|^2_{E(\Omega)} = \|\vec{u}\|^2_{[L^2(\Omega)]^N} + ||\vec{\nabla} \cdot \vec{u}||^2_{L^2(\Omega)} \tag{103}$$

Dove con $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ si intende la distribuzione definita da:

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{u}, \phi \rangle = -\int_\Omega \langle \vec{u}, \vec{\nabla}\phi \rangle_{\mathbb{R}^N} dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \tag{104}$$

Dimostrazione: Se $\{\vec{u}_n\} \subseteq E(\Omega)$ è una successione di Cauchy, per la completezza di $\mathbb{L}^2(\Omega)$ si ha:

$$\exists \vec{u} \in \mathbb{L}^2, \exists v \in L^2(\Omega) \quad \text{tali che} \quad \vec{u_n} \to \vec{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega), \vec{\nabla} \cdot \vec{u_n} \to v \in L^2(\Omega) \tag{105}$$

Dunque:

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{u}, \phi \rangle = -\int_\Omega \langle \vec{u}, \vec{\nabla}\phi \rangle \, dx = -\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \langle \vec{u}_n, \vec{\nabla}\phi \rangle \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_n)\phi \, dx$$
$$= \int_\Omega v\phi \, dx \qquad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty \tag{106}$$

Quindi $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = v \in L^2(\Omega)$ e $\vec{u}_n \to \vec{u}$ in $E(\Omega)$ $\square$

Lemma 8.2. Se $\partial\Omega$ è lipschitziano, allora $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ è denso in $E(\Omega)$

Dimostrazione. Omessa in quanto macchinosa. $\square$

Lemma 8.3. Sia Ω limitato con $\partial\Omega$ bordo C^2. Esiste un operatore lineare e continuo (detto traccia) $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, tale che $\gamma_0\vec{u} = \vec{u}|_{\partial\Omega}$ $\forall u \in [\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})]^n$. Il nucleo di γ_0 è lo spazio $H_0^1(\Omega)$, la sua immagine è $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, denso in $L^2(\partial\Omega)$, con:

$$\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf\{\|v\|_{H^1(\Omega)} : \gamma_0 v = g\} \tag{107}$$

Esiste inoltre un operatore di sollevamento $\varphi_\Omega : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$, lineare e continuo, tale che $\gamma_0\varphi_\Omega g = g$ $\forall g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Commento. Tutti questi fatti sono classici, non ne riportiamo la dimostrazione. Esiste un risultato analogo per le funzioni di $E(\Omega)$. $\square$

Teorema 8.4. Sia Ω limitato con $\partial\Omega$ in C^2. Sia $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ lo spazio duale di $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Esiste un operatore lineare e continuo $\gamma_{\vec{\nu}} : E(\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, tale che $\gamma_{\vec{\nu}}\vec{u} = \langle \vec{u}, \vec{\nu} \rangle|_{\partial\Omega}$ per ogni $u \in C^1(\overline{\Omega})$, ove $\vec{\nu}$ è il versore normale esterno a $\partial\Omega$. Inoltre vale la seguente formula (teorema della divergenza generalizzato):

$$\int_\Omega \langle \vec{u}, \vec{\nabla} w \rangle \, dx + \int_\Omega (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) w \, dx = \langle \gamma_{\vec{\nu}}\vec{u}, \gamma_0 w \rangle \qquad \forall \in E(\Omega), \forall w \in H^1(\Omega) \tag{108}$$

Dimostrazione. Sia $\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ e sia $w \in H^1(\Omega)$ tale che $\gamma_0 w = \phi$. Per $\vec{u} \in E(\Omega)$ fissata, sia:

$$X_{\vec{u}}(\phi) = \int_\Omega \langle \vec{u}, \vec{\nabla} w \rangle \, dx + \int_\Omega (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) w \, dx \tag{109}$$

Proviamo che $X_{\vec{u}}(\phi)$ non dipende dalla scelta di w tra quelle che hanno traccia ϕ. Infatti, se $\gamma_0 w_1 = \gamma_0 w_2 = \phi$, allora $w = w_1 - w_2 \in H_0^1(\Omega)$.

Quindi $\exists\{w_n\} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ tale che $w_n \to w$ in $H^1(\Omega)$. Ma per il teorema della divergenza classico, vale:

$$\int_\Omega \langle \vec{u}, \vec{\nabla} w_n \rangle \, dx + \int_\Omega (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) w_n \, dx = 0 \qquad \forall n \in N \tag{110}$$

Perchè $w_n = 0$ su $\partial\Omega$, ovvero $\gamma_0 w_n = 0$. Se $n \to \infty$ si ha quindi:

$$\begin{aligned} X_{\vec{u}}(\phi) = \int_\Omega \langle \vec{u}, \vec{\nabla} w \rangle \, dx + \int_\Omega (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) w \, dx = \\ = X_{\vec{u}}(w_1) - X_{\vec{u}}(w_2) = 0 \end{aligned} \tag{111}$$

Ciò premesso, sia $w = \varphi_\Omega \phi$ con $\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Allora:

$$\begin{aligned} |X_{\vec{u}}(\phi)| \leq \|\vec{u}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \|\nabla \vec{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq \|\vec{u}\|_{E(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} \\ \leq \|u\|_{E(\Omega)} \|\phi_\Omega\|_{\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^1(\Omega))} \|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \end{aligned} \tag{112}$$

Quindi $X_{\vec{u}} : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to R$ è lineare e continua, cioè $X_{\vec{u}} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, ossia $\exists g \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ tale che $X_{\vec{u}}(\phi) = \langle g, \phi \rangle$ $\forall \phi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Questa g dipende dalla $\vec{u} \in E(\Omega)$ fissata, e la dipendenza è chiaramente lineare. La stima precedente mostra che $|\langle g, \phi \rangle| \leq c\|\vec{u}\|_{E(\Omega)} \|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$; ponendo $\gamma_{\vec{\nu}}(\vec{u}) = g$, si ha quindi $\gamma_{\vec{\nu}}$ lineare e continua da $E(\Omega)$ in $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Poniamo ora $\gamma_{\vec{\nu}}(\vec{u}) = \langle \vec{u}, \vec{\nu} \rangle|_{\partial\Omega}$ $\forall \vec{u} \in C^1(\overline{\Omega})$. Infatti se $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$ vale:

$$\begin{aligned} \langle \gamma_{\vec{\nu}(\vec{u})}, \gamma_0 w \rangle = X_{\vec{u}}(\gamma_0 w) = \int_\Omega (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) w \, dx + \int_\Omega \langle \vec{u}, \vec{\nabla} w \rangle \, dx = \\ = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{u}, \vec{\nu} \rangle w d\sigma = \langle \langle \vec{u}, \vec{\nu} \rangle|_{\partial\Omega}, \gamma_0 w \rangle. \end{aligned} \tag{113}$$

Poichè $C^\infty(\overline{\Omega})$ è denso in $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ e $\gamma_{\vec{\nu}}(\vec{u}) \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, per continuità questa relazione si estende a:

$$\langle \gamma_{\vec{\nu}}(\vec{u}), \phi \rangle = \langle \langle \vec{u}, \vec{\nu} \rangle|_{\partial\Omega}, \phi \rangle \qquad \forall \phi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\, , \forall \vec{u} \in C^1(\overline{\Omega}) \tag{114}$$

E in particolare si ottiene, per la definizione di $\langle \gamma_{\vec{\nu}}(\vec{u}), \phi \rangle = X_{\vec{u}}(\phi)$:

$$\int_\Omega (div \vec{u}) w \, dx + \int_\Omega \langle \vec{u}, \vec{\nabla} w \rangle \, dx = \langle \gamma_{\vec{\nu}}(\vec{u}), \gamma_0 w \rangle \qquad \forall \vec{u} \in E(\Omega)\, , \forall w \in H^1(\Omega) \tag{115}$$

□

Esempio 8.5. $\gamma_{\vec{\nu}} : E(\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ è surgettivo.

Commento. Dimostrazione omessa poichè è inessenziale □

Teorema 8.6.

$$\text{Ker } \gamma_{\vec{\nu}} = E_0(\Omega) := \text{chiusura di } C_0^\infty(\Omega) \text{ in } E(\Omega) \tag{116}$$

Dimostrazione. Se $\vec{u} \in E_0(\Omega)$, per definizione esiste $\{\vec{u}_n\} \subseteq C_0^\infty$ tale che $\vec{u}_n \to \vec{u}$ in $E(\Omega)$. Si ha $\gamma_{\vec{\nu}}(\vec{u}_n) = 0$ per ogni n, quindi $\gamma_{\vec{\nu}}(\vec{u}) = \lim_{n\to\infty} \gamma_{\vec{\nu}}(\vec{u}_n) = 0$. Viceversa, sia $\vec{u} \in \text{Ker } \gamma_{\vec{\nu}}$. Denotiamo con $\widetilde{u}$ il prolungamento di u che vale 0 al di fuori di $\overline{\Omega}$. Poichè è $\gamma_{\vec{\nu}}(\vec{u}) = 0$, se $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi = \phi|_{\overline{\Omega}}$ si ha:

$$0 = \langle \gamma_{\vec{\nu}}(\vec{u}), \gamma_0\varphi \rangle = \int_\Omega ((\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\varphi + \langle \vec{u}, \vec{\nabla}\varphi \rangle)\, dx \tag{117}$$

ne segue:

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} ((\widetilde{\vec{\nabla} \cdot \vec{u}})\phi + \langle \widetilde{u}, \vec{\nabla}\varphi \rangle)\, dx \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{118}$$

Il che prova che $\vec{\nabla}\widetilde{u} = \widetilde{\vec{\nabla} u}$ e dunque $\widetilde{u} \in E(\mathbb{R}^N)$. Se ora si prende un mollificatore ρ_ϵ e si fa la convoluzione $\rho_\epsilon * \widetilde{\vec{u}}$, si ha $\rho_\epsilon * \widetilde{\vec{u}} \to \widetilde{\vec{u}}$ in $E(\mathbb{R}^N)$, dato che $\rho_\epsilon * \widetilde{\vec{u}} \to \widetilde{\vec{u}}$ in $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^N)$ e

$$\vec{\nabla}(\rho_\epsilon * \widetilde{\vec{u}}) = (\rho_\epsilon * \vec{\nabla}\widetilde{\vec{u}}) \to \vec{\nabla}\widetilde{\vec{u}} \text{ in } L^2(\mathbb{R}^N) \tag{119}$$

In particolare $\rho_\epsilon * \vec{u} \to \vec{u}$ in $E(\Omega)$. Un'ulteriore localizzazione mediante una partizione dell'unitá fa ottenere un'approssimazione di $\vec{u}$ mediante funzioni $C_0^\infty(\Omega)$ (omesso, ma non è difficile). □

Siano ora:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{\vec{u} \in (C_0^\infty(\Omega))^N : \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0\} \\ H &= \text{chiusura di } \mathcal{V} \text{ in } \mathbb{L}^2(\Omega) \\ V &= \text{chiusura di } \mathcal{V} \text{ in } \mathbb{H}_0^1(\Omega) \end{aligned} \tag{120}$$

Esempio 8.7. Se p è una distribuzione sull'aperto Ω, allora per ogni $v \in \mathcal{V}$ vale:

$$\langle \vec{\nabla} p, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^N \langle D_i p, v_i \rangle = -\sum_{i=1}^N \langle p, D_i v_i \rangle = -\langle p, \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \rangle = 0 \tag{121}$$

Vale anche il viceversa per un teorema di De Rham: se $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_N)$ è una distribuzione vettoriale, e se $\langle \vec{f}, \vec{v} \rangle = 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathcal{V}$ allora esiste una distribuzione p su Ω tale che:

$$\vec{f} = \vec{\nabla} p \tag{122}$$

In particolare se $\vec{f} \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ e $\langle \vec{f}, \vec{v} \rangle = 0\ \forall \vec{v} \in \mathcal{V}$, allora $\exists p \in L^2(\Omega)$ tale che $\vec{f} = \vec{\nabla} p$, purchè Ω sia limitato con $\partial\Omega$ Lipschitziano. In altre parole, $\nabla : L^2(\Omega)/\mathbb{R} \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ è un isomorfismo (lo spazio quoziente $L^2/\mathbb{R}$ ci vuole, modulo le costanti, per rendere ∇ iniettivo). Possiamo porre:

$$L^2(\Omega)/\mathbb{R} \simeq \{p \in L^2(\Omega) : \int_\Omega p\, dx = 0\} \tag{123}$$

Teorema 8.8. Sia Ω limitato con $\partial\Omega$ lipschitziano. Allora:

$$\begin{aligned} H &= \{\vec{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \gamma_{\vec{\nu}} \vec{u} = 0\} \\ H^{\perp} &= \{\vec{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \vec{u} = \vec{\nabla} p,\, p \in H^1(\Omega)\} \end{aligned} \tag{124}$$

Dimostrazione. Sia $\vec{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ con $\vec{u} = \vec{\nabla} p$ e $p \in H^1(\Omega)$; allora per ogni $\vec{v} \in \mathcal{V}$:

$$\int_\Omega \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \, dx = \int_\Omega \langle \vec{\nabla} p, \vec{v} \rangle \, dx = -\int_\Omega p(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \, dx = 0 \tag{125}$$

E quindi, essendo H la chiusura di $\mathcal{V}$ in $\mathbb{L}^2(\Omega)$,

$$\int_\Omega \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \, dx = 0 \qquad \forall \vec{v} \in H, \tag{126}$$

ossia $\vec{u} \in H^{\perp}$. Viceversa, sia $\vec{u} \in H^{\perp}$: allora da $\int_\Omega \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \, dx = 0 \ \forall \vec{v} \in \mathcal{V}$ segue, per il teorema di De Rham, $\vec{u} = \vec{\nabla} p$ come distribuzione; ma siccome $\vec{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, si ha $p \in H^1(\Omega)$, da cui l'altra inclusione. Ciò prova la seconda relazione. Sia $\vec{u} \in H$ e sia $\{\vec{u}_n\} \subseteq \mathcal{V}$ tale che $\vec{u}_n \to \vec{u}$ in $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Quindi $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_n \to \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ in $H^{-1}(\Omega)$, e da $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_n = 0$ segue subito $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. Perciò in particolare, $\vec{u}_n, \vec{u} \in E(\Omega)$ e $\|\vec{u}_n - \vec{u}\|_{E(\Omega)} = \|\vec{u}_n - \vec{u}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \to 0$. Pertanto $\gamma_{\vec{\nu}}(\vec{u}_n) \to \gamma_{\vec{\nu}}(\vec{u})$ in $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, e siccome $\gamma_{\vec{\nu}}(\vec{u}_n) = 0$ segue $\gamma_{\vec{\nu}}(\vec{u}) = 0$. Dunque $H \subseteq \{\vec{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \gamma_{\vec{\nu}}(\vec{u}) = 0\} =: H^0$.

Se fosse $H \subset H^0$, sia $H^{00} = \{\vec{v} \in H^0\}$. Allora $H^{00} \subseteq H^{\perp}$, e per la relazione già provata avremmo, per $\vec{v} \in H^{00}, \vec{v} = \vec{\nabla} p$ con $p \in H^1(\Omega)$; inoltre p soddisfa il problema di Neumann:

$$\begin{aligned} &\triangle p = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \text{ in } \Omega \\ &\frac{\partial p}{\partial \vec{\nu}} = \langle \vec{u}, \vec{\nu} \rangle = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{aligned} \tag{127}$$

e questo implica p=costante in Ω, cioè $\vec{u} = \vec{0}$. Dunque $H^{00} = \{0\}$ e $H = H^0$ □

Riferimenti bibliografici

[Day(1990)] Micheal A. Day. *THE NO-SLIP CONDITION OF FLUID DYNAMICS*. Kluwer Academic Publishers., 1990.

[Eric Lauga and Stone(2005)] Michael P. Brenner Eric Lauga and Howard A. Stone. *Microfluidics: The No-Slip Boundary Condition.* Editors J. Foss, C. Tropea and A. Yarin, Springer, 2005.

[Ladyzhenskaya(1963)] O. A. Ladyzhenskaya. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow.* Gordon and Breach Science, 1963.

[L.D.Landau and E.M.Lifshitz(1987)] L.D.Landau and E.M.Lifshitz. *Fluid Mechanics.* Pergamon Press, 1987.

[Temam(1984)] Roger Temam. *Navier-Stokes Equations.* Elsevier Science Publishers B.V., 1984.

[Temam(1995)] Roger Temam. *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis.* Siam, 1995.