Corso di laurea in Scienze biologiche molecolari

Corso di Matematica e statistica B - Lista di esercizi n.2

1. Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x + \cos x}{x+\pi}$, (b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{4x^2-7x-5}{x^3-8x^2-1}$,

   (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^{x^2-1}+3^{-(x^2-1)}}{x^2+2^x}$, (d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\mathrm{Log} x^2 + \log_2 x^{10}}{\ln(x^2-2)}$,.

2. Verificare che i seguenti limiti non esistono:

   (a) $\lim_{x\to+\infty} \cos x$, (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$,

   (c) $\lim_{x\to 0^+} \sin \dfrac{1}{x}$, (d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x$.

3. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di forme indeterminate:

   (a) $\lim_{x\to -1^-} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-1}}$, (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin x}$,

   (c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$, (d) $\lim_{x\to+\infty} 3^x 2^{-x}$.

4. Dimostrare, ricorrendo alla definizione di limite, che se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = M,$$

   e se non si ha simultaneamente $L = +\infty$ e $M = -\infty$ o viceversa, allora

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = L+M, \qquad \lim_{x\to x_0} (f(x)-g(x)) = L+M.$$

5. Dimostrare, ricorrendo alla definizione di limite, che si ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \ \text{ e } \ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L.$$

6. Esibire una funzione $f(x)$ tale che

$$\lim_{x\to 45} f(x) = 64.$$

7. Sia $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} (f(2x^2 - x))^{-1}, \qquad \lim_{t\to 0^+} \sqrt{f(t^{-1})}, \qquad \lim_{s\to\pi^+} \frac{1}{f\left(\tan\frac{s}{2}\right)}.$$

8. Calcolare:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

9. Descrivere il comportamento delle funzioni $f(x)$ che in un fissato punto x_0 verificano le seguenti proprietà, "parenti" della definizione di continuità:

   (i) esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ risulta

   $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{per } |x - x_0| < \delta;$$

   (ii) esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ risulta

   $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{per } |x - x_0| < \delta;$$

   (iii) per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\delta > 0$ risulta

   $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{per } |x - x_0| < \delta;$$

   (iv) esistono $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tali che risulta

   $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{per } |x - x_0| < \delta.$$

10. Si verifichi che se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, allora si ha anche

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = |L|.$$

È vero il viceversa?

11. Si provi che

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x = 1.$$