Quadriche proiettive reali.
Classificazione topologica delle quadriche non degeneri.

A parte la quadrica vuota di equazione

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

(rango 4 e segnatura $(4,0,0)$), ci sono due tipi di quadriche non degeneri, quelle di segnatura $(3,1,0)$ e quelle di segnatura $(2,2,0)$ di equazioni rispettivamente: $x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ e $x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$.
Nel primo caso il piano di equazione $x_3=0$ non interseca la quadrica. Prendendolo come piano all'infinito dello spazio $\mathbb{R}^3$, in coordinate non omogenee la quadrtica si scrive

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

e quindi la quadrica di partenza è omeomorfa alla sfera S^2.
Nel secondo caso abbiamo l'equazione:

$$x_0^2 - x_2^2 = X_3^2 - x_1^2.$$

Cambiamo coordinate:

$$\begin{cases} u_0 = x_0 + x_2 \\ u_1 = x_3 - x_4 \\ u_2 = x_0 - x_2 \\ u_3 = x_3 + x_1 \end{cases}$$

Si verifica facilmento che la matrice del cambiamento di coordinate è invertibile.
In queste nuove coordinate l'equazione della quadrica Q diventa

$$u_0u_2 - u_1u_3 = 0.$$

Consideriamo la coppia di rette $r_{[\lambda,\mu]}, s_{[a,b]}$ cosìdefinite:

$$\begin{cases} \lambda u_0 - \mu u_1 = 0 \\ \mu u_2 - \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a u_0 - b u_3 = 0 \\ b u_2 - a u_1 = 0 \end{cases}$$

dove λ e μ non sono entrambi nulli e a e b altrettanto. Entrambe le rette giacciono sulla quadrica come è facile controllare.
Vogliamo ora dimostrare i seguenti fatti.

(1) $r_{[\lambda,\mu]} \cap s_{[a,b]}$ è un punto qualunque siano i parametri omogenei $[\lambda,\mu], [a,b]$.
(2) $r_{[\lambda,\mu]} \cap r_{[\lambda',\mu']} = \emptyset$ se $[\lambda,\mu] \neq [\lambda',\mu']$
(3) $s_{[a,b]} \cap s_{[a',b']} = \emptyset$ se $[a,b] \neq [a',b']$.

Proviamo 1 risolvendo il sistema delle due rette. Si vede facilmente che la matrice del sistema ha rango 3 e quindi ha come soluzione una quaterna omogenea $[c_0, c_1, c_2, c_3]$ di numeri non tutti nulli. In altri termini

$$r_{[\lambda,\mu]} \cap s_{[a,b]} = [c_0, c_1, c_2, c_3] \in Q.$$

Proviamo 2: questa volta la matrice del sistema ha rango 4 quindi l'unica soluzione è la quaterna nulla. Pertanto l'intersezione delle due rette è vuota. La prova di 3 è del tutto analoga.
Abbiamo cosídimostrato che ci sono due famiglie di rette a due a due sghembe fra loro la cui unione è tutta la quadrica. Inoltre ogni retta di una famiglia incontra tutte le rette dell'altra famiglia.
Poiché una retta proiettiva è omeomorfa a S^1, ci possiamo aspettare che Q sia omeomorfa ad un toro. Proviamo a dimostrarlo.
Definiamo l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to Q$$

come $\varphi([\lambda, \mu], [a, b]) = r_{[\lambda,\mu]} \cap s_{[a,b]}$.

- φ è iniettiva. Se $([\lambda, \mu], [a, b]) \neq ([\lambda', \mu'], [a', b'])$ o è diversa la prima componente o è diversa la seconda. In entrambi i casi per la proprietà delle rette della stessa famiglia di essere sghembe esse non possono contenere lo stesso punto immagine.
- φ è surgettiva. Sia $P_0 = [c_0, c_1, c_2, c_3] \in Q$, per cui $c_0c_2 = c_1c_3$. Poniamo $[\lambda, \mu] = [c_1, c_0] = [c_2, c_3]$ e $[a, b] = [c_3, c_0] = [c_2, c_1]$. Risulta $\varphi([\lambda, \mu], [a, b]) = P_0$.

Poiché $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ è compatto e Q è separato, per provare che φ è un omeomorfismo basta provare che è continua ovvero che è continua in ogni punto e per far questo possiamo passare a coordinate non omogenee. Supponiamo per il momento $\lambda b \neq 0$ ossia $[\lambda\mu] = [1, k]$ e $[a, b] = [h, 1]$. Dalle proporzioni prima scritte si ottiene:

- $c_0 : \mu = c_1 : \lambda$
- $c_2 : \lambda = c_3 : \mu$
- $c_3 : a = c_0 : b$
- $c_2 : a = c_1 : b$

ricaviamo:

$$\begin{cases} c_0 = kc_1 \\ c_3 = kc_2 \\ c_3 = hc_0 \\ c_2 = hc_1 \end{cases}$$

Fissiamo c_1 e calcoliamo c_0, c_3, c_2. Otteniamo $c_0 = kc_1, c_3 = hkc_1, c_2 = hc_1$ che sono tre funzioni continue di h e k. Si noti che per $\lambda b \neq 0$ non si può avere $c_1 = 0$ altrimenti le due rette sarebbero sghembe.
In modo analogo si prova che φ è continua nei punti di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ dove $\mu a \neq 0$, nei punti in cui $\lambda a \neq 0$ e nei punti in cui $\mu b \neq 0$. Poiché questi quattro aperti ricoprono $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ abbiamo provato che φ è un omeomorfismo fra il toro e la quadrica.
Osservazione
Lo stesso ragionamento prova che la quadrica complessa non degenere in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ è rigata da due famiglie di rette proiettive complesse e quindi è omeomorfa a $S^2 \times S^2$.