

GEOMETRIA 2
Compito del 2 Febbraio 2015

Esercizio 1.

Sia X uno spazio topologico e $F, G \subset X$ due chiusi tali che $F \cap G$ e $F \cup G$ siano connessi. Dimostrare che sia F che G sono connessi.

Esercizio 2.

Si consideri lo spazio $[-1, 1] \times [-1, 1]$ con la relazione di equivalenza

$$(s, t) \rho (s', t') \iff (s, t) = (s', t') \text{ oppure } |s - s'| = 2 \text{ e } t' = -t$$

Sia X lo spazio quoziente con la topologia quoziente e p la proiezione.

- (1) Dimostrare che il sottospazio $Y = p(\{s = 0\}) \subset X$ è un retratto per deformazione di X .
- (2) Calcolare $\Pi_1(X, p(0, 0))$.

Esercizio 3.

Si consideri la famiglia di quadriche $Q_{[\lambda, \mu]} \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione:

$$\lambda(x_0x_3 - x_1^2 - x_2^2) + \mu x_0x_1 = 0.$$

Determinare al variare della coppia omogenea $[\lambda, \mu]$ il tipo della quadrica $Q_{[\lambda, \mu]}$.

Esercizio 4.

Calcolare $\int_0^\infty \frac{\sin x + \cos x}{x^4 + 1} dx$.