

GEOMETRIA 2
Compito del 13 Gennaio 2016

Esercizio 1.

Si consideri in \mathbb{R}^3 la sfera S^2 di centro l'origine e raggio 1. Si consideri lo spazio X ottenuto da S^2 togliendo un punto $P_0 \in S^2$ e collassando ad un punto una circonferenza non passante per P_0 .

- (1) Si chiede se lo spazio X sia connesso, compatto, di Hausdorff.
- (2) Si calcoli il gruppo fondamentale di X .

Esercizio 2.

Si consideri in \mathbb{C}^3 il luogo di zeri X del polinomio $z^2 - xy$.

- (1) Si dimostri che l'applicazione $p : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ data da $p(s, t) = (s^2, t^2, st)$ induce un rivestimento $p : \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow X \setminus \{(0, 0, 0)\}$.
- (2) Si dimostri che nessun intorno di $(0, 0, 0)$ in X è omeomorfo a $D \times D$ dove D è il disco unitario aperto in \mathbb{C} .

Esercizio 3.

Determinare il tipo proiettivo della quadrica di equazione $x_3^2 - x_1x_2 = 0$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ e in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Esercizio 4.

Si consideri la corona circolare $C = \{1 < |z| < 4\} \subset \mathbb{C}$. Si dimostri che il polinomio $z^3 + 2z^2 + 4z + 1$ ha tutte le sue radici in C . Quante di esse sono reali?