

Classificazione delle forme quadratiche

Una forma quadratica Q è un polinomio di secondo grado, cioè

$$Q(x_1, \dots, x_n) = {}^t XAX + 2{}^t BX + C$$

ove non è restrittivo pensare la matrice A matrice simmetrica.

Siano \mathcal{A}_n e \mathcal{I}_n i gruppi rispettivamente delle affinità e delle isometrie di \mathbb{R}^n , cioè il prodotto semidiretto rispettivamente del gruppo lineare $GL(n, \mathbb{R})$ o del gruppo ortogonale $O(n, \mathbb{R})$ con il gruppo delle traslazioni \mathbb{R}^n .

Vogliamo classificare le forme quadratiche sotto l'azione di questi due gruppi.

Diremo che una forma quadratica è *a centro* se esiste un punto N tale che la Q è invariante rispetto alla simmetria centrale con centro il punto N .

Osservazione 1 *L'origine O è un centro di simmetria per $Q(X)$ se e solo se $B = 0$*

Prova: Se $B = 0$, Q è invariante sotto l'azione della simmetria centrale $X \rightarrow -X$.

Viceversa dire che O è un centro di simmetria per Q significa $Q(X) = Q(-X)$ per ogni X . Da cui $4{}^t BX = 0$ per ogni X , cioè $B = 0$. \square

Osservazione 2 *La forma Q ha un punto di simmetria centrale se e solo se le due matrici A e (A, B) hanno lo stesso rango.*

Prova: Supponiamo che esista un punto di simmetria centrale N . Operando il cambiamento di coordinate $Y = X - N$ otteniamo una forma quadratica che ha l'origine come punto di simmetria centrale, priva cioè di termini di primo grado nelle Y .

Eseguendo il cambiamento di coordinate otteniamo

$${}^t(Y + N)A(Y + N) + 2{}^tB(Y + N) + C = {}^tYAY + 2({}^tNA + {}^tB)Y + {}^tNAN + 2{}^tBN + C$$

e quindi affinché il polinomio in Y non abbia termini di primo grado N dovrà essere soluzione del sistema

$$AN = -B$$

da cui la condizione. Viceversa se la condizione è verificata, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è risolubile e questo garantisce l'esistenza di un punto di simmetria centrale \square

• Forme quadratiche a centro

Se Q è una forma quadratica a centro, operiamo la traslazione che porta l'origine in un centro di simmetria. Nelle nuove coordinate la forma quadratica sarà

$${}^tXAX + C'$$

Il teorema di Sylvester ci garantisce l'esistenza di un cambiamento di coordinate in cui la matrice A assume forma diagonale con soli $1, -1$ e 0 sulla diagonale. Cioè operando un tale cambiamento di coordinate abbiamo che la forma quadratica diviene

$$\sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i^2 + c'$$

dove p e n sono rispettivamente gli indici di positività e negatività e $p + n = r$, con r rango della matrice A e $c' = 0$ o 1 .

• **Forme quadratiche non a centro**

Se la forma non è a centro sicuramente la matrice A non è invertibile, quindi i due sottospazi di \mathbb{R}^n , $K = \text{Ker } A$ ed $H = \text{Im } A$ hanno entrambi dimensione positiva.

A è simmetrica: pertanto A è autoaggiunta rispetto al prodotto scalare euclideo. Quindi sottospazi sono mutuamente ortogonali e

$$\mathbb{R}^n = H \oplus K$$

Operiamo un cambiamento di coordinate in modo tale che H sia lo spazio delle prime $h = \dim H$ coordinate e K quello delle ultime.

La matrice di Q in questa nuova base diviene

$$A' = \begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ove \bar{A} è una matrice $h \times h$.

Indicando con U e V le coordinate rispettivamente in H e K , la forma assunta da Q sarà

$${}^tU\bar{A}U + 2{}^t\bar{B}_1U + 2{}^t\bar{B}_2V + C$$

La forma quadratica

$${}^tU\bar{A}U + 2{}^t\bar{B}_1U + C$$

è una forma quadratica dello spazio delle U a centro (perché?), quindi possiamo operare un cambiamento di coordinate nelle U per cui l'equazione diviene

$${}^tU \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} U + C$$

Abbiamo quindi che la forma nelle nuove coordinate è diventata

$${}^tU \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} U + 2{}^t\bar{B}_2V + C$$

Con un ultimo cambiamento di coordinate nelle V possiamo far sì che

$$2{}^t\bar{B}_2V + C$$

divenga v_1 ed arriviamo quindi alla forma canonica

$$v + \sum_{i=1}^{p'} u_i^2 - \sum_{i=p'+1}^h u_i^2$$

Quadriche: classificazione affine e metrica

La classificazione affine e metrica delle quadriche discende da quanto detto, osservando che due forme quadratiche hanno lo stesso luogo di zeri se differiscono per una costante non nulla, quindi occorrerà fare attenzione nell'usare la segnatura per la classificazione al fatto che $Q = 0$ e $-Q = 0$ definiscono lo stesso luogo di zeri.

Inoltre se si usa il gruppo ortogonale occorrerà utilizzare al posto del teorema di Sylvester il teorema spettrale e quindi le forme diagonali non saranno più classificate dalla sola segnatura ma dagli autovalori.

Quadriche: classificazione proiettiva

Per fare la classificazione proiettiva seguiamo una via leggermente diversa ed esemplifichiamola in $\mathbb{P}_2(K)$ dove con K si intende \mathbb{R} o \mathbb{C} .

Sia $Q(x_0, x_1, x_2)$ la forma quadratica e $b(x, y)$ la forma bilineare simmetrica associata.

Tramite la b si costruisce una applicazione tra $\mathbb{P}_2(K)$ e il suo duale in questo modo.

Associamo al punto A di coordinate proiettive omogenee (a_0, a_1, a_2) la retta (l'iperpiano) π_A (iperpiano polare) di equazioni omogenee $\sum \alpha_i x_i = 0$ dove $\alpha_i = \sum q_{i,j} a_j$

Si vede immediatamente che vale la proprietà seguente

Siano A e B due punti non appartenenti alla quadrica.

$$A \in \pi_B \iff B \in \pi_A$$

Ciò significa che se prendiamo un punto B sulla retta polare di A la retta polare del punto $C = \pi_A \cap \pi_B$ sarà la retta congiungente i punti A e B .

Se prendiamo ora come punti base del riferimento proiettivo i punti A, B, C le rette polari dei punti A, B, C avranno equazioni rispettivamente $x_i = 0$, cioè con queste scelte nell'equazione della forma quadratica tutti i termini $q_{i,j}$ con $i \neq j$ debbono essere nulli.

Quindi in un riferimento proiettivo siffatto la forma quadratica assume la forma

$$q_{0,0}x_0^2 + q_{1,1}x_1^2 + q_{2,2}x_2^2 = 0$$

.

A questo punto intervengono considerazioni diverse a seconda che il corpo dei coefficienti sia \mathbb{C} o \mathbb{R} .

Nel primo caso tutte le forme quadratiche sono equivalenti ad una somma di quadrati mentre nel secondo caso si hanno due modelli distinti.

Il riferimento così trovato prende il nome di *triangolo autopolare*

È facile estendere queste considerazioni alla dimensione n considerando un tetraedro autopolare e riottenere la classificazione affine considerando le particolari proiettività che fissano l'iperpiano all'infinito

Osserviamo infine che data un quadrica $Q = 0$ in $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, l'equazione dell'iperpiano polare del punto P è data da $\frac{\partial Q}{\partial x_0}(P)x_0 + \frac{\partial Q}{\partial x_1}(P)x_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_2}(P)x_2 = 0$.

Quadriche: classificazione topologica

Diremo che una forma quadratica omogenea Q è singolare se esiste un punto P che annulla contemporaneamente le tre forme lineari $\frac{\partial Q}{\partial x_0}, \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \frac{\partial Q}{\partial x_2}$: in altri termini se partendo da ogni punto dello spazio si può costruire un tetraedro autopolare.

Si provi che le quadriche non singolari di $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ sono omeomorfe al vuoto o alla circonferenza e quelle di $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ sono omeomorfe al vuoto, alla sfera o al toro $S^1 \times S^1$

3.12.2009