GEOMETRIA 2
Prova scritta del 15 Aprile 2016

Esercizio 1.

Siano G_1 e G_2 due gruppi di omeomorfismi di R^n che agiscono in modo propriamente discontinuo e siano X_1, X_2 i rispettivi quozienti. Dimostrare che ogni applicazione continua $f : X_1 \to X_2$ è indotta da una applicazione continua $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Esercizio 2.

Si consideri l'applicazione $\varphi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ definita da

$$\varphi([u, v]) = [u^2 + v^2, 2uv, v^2 - u^2].$$

Dimostrare che φ è omotopa ad una applicazione costante.

Esercizio 3.

Sia $X_1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ l'immagine dell'applicazione $\varphi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, 1] :\to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ data da

$$\varphi(\alpha, \beta, t) = ((\cos\alpha, \sin\alpha), (t\cos\beta, t\sin\beta)).$$

Sia invece $X_2 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ l'immagine dell'applicazione
$\psi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ data da

$$\psi(\alpha, t, \beta) = ((t\cos\alpha, t\sin\alpha), (\cos\beta, \sin\beta)).$$

Si consideri lo spazio topologico X ottenuto dall'unione disgiunta di X_1 e X_2 tramite l' incollamento delle due frontiere, dato dall'applicazione i così definita

$$i((\cos\alpha, \sin\alpha), (\cos\beta, \sin\beta)) = ((\cos\alpha, \sin\alpha), (\cos\beta, \sin\beta))$$

In altri termini

$$X = X_1 \bigsqcup X_2/\mathcal{R}$$

ove $\mathcal{R}_i$ è la relazione di equivalenza $P\,\mathcal{R}\,Q \iff P = Q$ oppure $Q = i(P)$.

- X è connesso?
- X è compatto?
- Dimostrare che X è semplicemente connesso