Geometria Proiettiva

I compito - 25 Gennaio 2010

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico. Sia $Y = \{a, b\}$ uno spazio topologico con due elementi, dotato della topologia discreta. Mostra che X è connesso se e solo se ci sono esattamente due funzioni continue da X in Y.

Esercizio 2. Sia X uno spazio metrico. Dati un punto $x \in X$ e un insieme $A \subset X$, la *distanza* $d(x, A)$ fra x e A è definita come

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

L'ϵ*-intorno* di A è il sottoinsieme $U_\epsilon(A)$ dato da:

$$U_\epsilon(A) = \{x \in X \mid d(x, A) < \epsilon\}.$$

Sia $\mathcal{D}$ l'insieme di tutti gli ϵ-intorni, al variare di A e $\epsilon > 0$:

$$\mathcal{D} = \{U_\epsilon(A) \mid A \subset X, \epsilon > 0\}.$$

(1) Mostra che ogni elemento di $\mathcal{D}$ è aperto.
(2) Mostra che $\mathcal{D}$ è una base per la topologia di X.
(3) Sia $X = \mathbf{R}$ con la distanza euclidea. Costruisci un aperto di $\mathbf{R}$ che non sia un elemento di $\mathcal{D}$.
(4) Sia $X = \mathbf{R}$ con la distanza euclidea. L'insieme $\mathcal{D}$ è chiuso rispetto all'intersezione finita?

Esercizio 3. Considera il sottoinsieme $A \subset \mathbf{R}^2$ dato da $A = \{(-1, 0), (1, 0)\}$. Sia $X = \mathbf{R}^2/_A$ lo spazio topologico ottenuto dal piano $\mathbf{R}^2$ collassando il sottoinsieme A (quozientando cioè per la relazione d'equivalenza che identifica due punti se sono uguali o se stanno entrambi in A).

(1) Lo spazio X è di Hausdorff? È compatto? È connesso?
(2) Dimostrare che esiste una immersione $f : S^1 \to X$ tale che $X \setminus f(S^1)$ non sia connesso.
(3) Dimostrare che esiste una immersione $f : S^1 \to X$ tale che $X \setminus f(S^1)$ sia connesso.

Esercizio 4. Considera la conica in $\mathbb{RP}^2$ seguente:

$$C_\lambda = \{(1 + \lambda)x_0^2 - 2x_0x_1 + (1 - \lambda)x_1^2 - (1 + \lambda)x_2^2 = 0\}$$

dipendente da un parametro $\lambda \in \mathbf{R}$.

(1) Per quali valori $\lambda \in \mathbf{R}$ la conica C_λ contiene il punto $[1, 1, 1]$?
(2) Determina il tipo proiettivo della conica C_λ al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.
(3) (Facoltativo.) Determina i punti di $\mathbb{RP}^2$ che appartengono a C_λ per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.