Geometria proiettiva – A.A. 2009/2010
Quinto compito – 17 Settembre 2010

Esercizio 1. Considera la seguente famiglia di sottoinsiemi del piano $\mathbf{R}^2$ dotato della topologia euclidea:

$$\tau = \{{}^cC \mid C \text{ sottoinsieme chiuso e limitato di } \mathbf{R}^2\} \cup \{\mathbf{R}^2\}.$$

(1) Mostra che τ definisce una topologia su $\mathbf{R}^2$. Che relazione c'è fra τ e la topologia euclidea?
(2) Lo spazio $(\mathbf{R}^2, \tau)$ è compatto? È connesso? È di Hausdorff?

sì sì no è solo T1
(ok, guardare mio foglio)

Soluzione.

$A \subset \mathbb{R}^2$ è aperto se il compl. è compatto

τ ha meno aperti della euclidea

c'è da aggiungere ϕ.

$\cup A_i = \cup {}^cK_i = {}^c(\cap K_i)$ ✓
↑compatto

$A_1 \cap A_2 = {}^cK_1 \cup {}^cK_2 = {}^c(K_1 \cup K_2)$.

$\mathbb{R}^2, \tau$ è compatto?

Sia $\{A_i\}$ un ricoprimento di $\mathbb{R}^2$

Scelgo $A_1 \neq \phi$ $\{A_i\}_{i \neq 1}$ coprono il compatto ${}^cA_1$

ne bastano un # finito

${}^cA_1$ è compatto $\Rightarrow \exists$ sottoricop. finito di ${}^cA$, sia esso

$A_2 \ldots A_n$

$\Downarrow$

$A_2 \ldots A_n \cup A_1$ ricopre X
$({}^cA_1 \cup A_1)$

È connesso? se x assurdo $X = A \cup B$ aperti
e si ha $A \cap B = \phi$

${}^c(A \cap B) = {}^cA \cup {}^cB = \mathbb{R}^2$ no

sono chiusi e limitati
e non con la loro unione
non può dare un aperto illimitato come $\mathbb{R}^2$

Esercizio 2. Sia X un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ dotato della topologia euclidea. Mostra che X è compatto se e solo se ogni funzione continua $f : X \to \mathbf{R}$ è limitata.

Soluzione.

Se X è compatto $\Leftrightarrow$ è chiuso e limitato $f(X)$ è compatto in $\mathbb{R}$ è limitato.

~~A~~ ogni funz. continua su X è limitata $\Rightarrow$ X è limitato perché le coordinate di $\mathbb{R}^n$ sono continue.

Supponiamo per assurdo che X non sia chiuso, ~~c'è una successione convergente x_n~~ sia $x_0 \in \overline{X} \setminus X$ ~~c'è una succ. che converge a x_0 fatta di punti di X.~~ $\forall$ punto $y \in X$ $\quad d(y, x_0) > 0$

$$f(y) = \frac{1}{d(y, x_0)}$$

prendo la succ. che converge a x_0 $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$

$x_n \in X$, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$.

Trovo una funzione continua che non è limitata

Esercizio 3. Sia $r \subset \mathbb{RP}^2$ una retta proiettiva nel piano proiettivo reale $\mathbb{RP}^2$. Sia $\sim$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{RP}^2$ che collassa r ad un punto, cioè

$$x \sim y \iff x = y \text{ oppure } x, y \in r.$$

Definiamo lo spazio topologico quoziente

$$X = \mathbb{RP}^2/_\sim.$$

(1) Lo spazio X è compatto? È connesso? È di Hausdorff?
(2) Mostra che esiste un punto $x_0 \in X$ tale che $X \setminus \{x_0\}$ sia omeomorfo al piano $\mathbf{R}^2$.
(3) Mostra che X è omeomorfo alla sfera S^2.

Soluzione.

Geometria proiettiva – A.A. 2009/2010
Quinto compito – 17 Settembre 2010

Esercizio 4. Considera le seguenti coniche proiettive in $\mathbb{RP}^2$:

$$C = \{ -3x_0^2 + 3x_1^2 + 9x_2^2 + 16x_0x_2 = 0\}$$
$$D_k = \{x_0^2 + (k-4)x_1^2 + (k+1)x_2^2 + 2x_0x_1 = 0\}$$

La conica D_k dipende da un parametro reale $k \in \mathbf{R}$.

(1) Determina i valori $k \in \mathbf{R}$ per i quali C e D_k sono proiettivamente equivalenti.

(2) Classifica le coniche D_k a meno di omeomorfismo (al variare di $k \in \mathbf{R}$).

Soluzione.