GEOMETRIA PROIETTIVA – A.A. 2009/2010
QUARTO COMPITO – 14 LUGLIO 2010

Esercizio 1. Definiamo un *chiuso affine* in $\mathbf{R}^n$ un insieme C che sia unione finita di sottospazi affini di dimensione k arbitraria (con $0 \leqslant k \leqslant n$; l'unione vuota è ammessa).
Consideriamo il caso $n = 2$ e definiamo

$$\tau = \{{}^cC \mid C \text{ chiuso affine in } \mathbf{R}^2\}$$

(1) Mostra che τ definisce una topologia su $\mathbf{R}^2$. Che relazione c'è fra τ e la topologia euclidea?
(2) Lo spazio $(\mathbf{R}^2, \tau)$ è compatto? È connesso? È di Hausdorff?

Soluzione.

(1)=(3) S^1 (2) $S^1 \vee S^1$ (4) Non è T2

$1 \neq 2$ $2 \neq 4$ $\Rightarrow 4 \neq 1$ solo 1 e 3 sono $\simeq$ altri sono

Geometria proiettiva – A.A. 2009/2010
Quarto compito – 14 Luglio 2010

Esercizio 2. Si consideri la circonferenza:

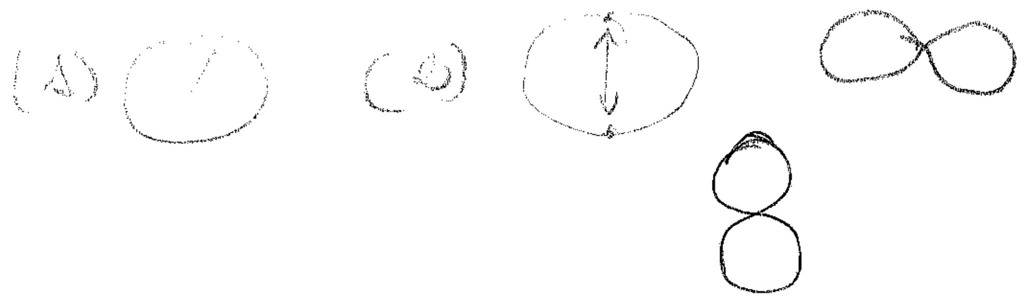
$$S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}.$$

in R $||x|| = |x|$

Dire quali fra i seguenti spazi topologici sono omeomorfi:

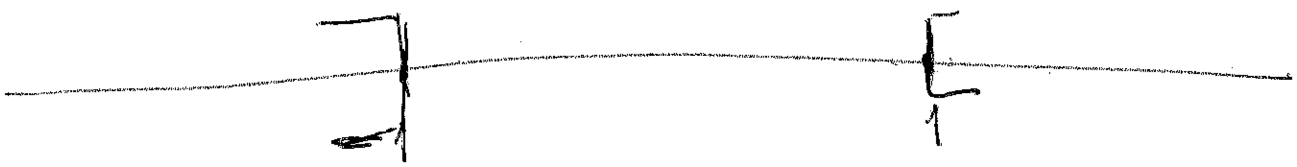
(1) S^1
(2) $S^1/_\sim$ con la relazione di equivalenza $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ oppure $\{x, y\} = \{i, -i\}$.
(3) $\mathbf{R}/_\sim$ con la relazione di equivalenza $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ oppure $||x||, ||y|| \geqslant 1$. S_1
(4) $\mathbf{R}/_\sim$ con la relazione di equivalenza $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ oppure $||x||, ||y|| > 1$.

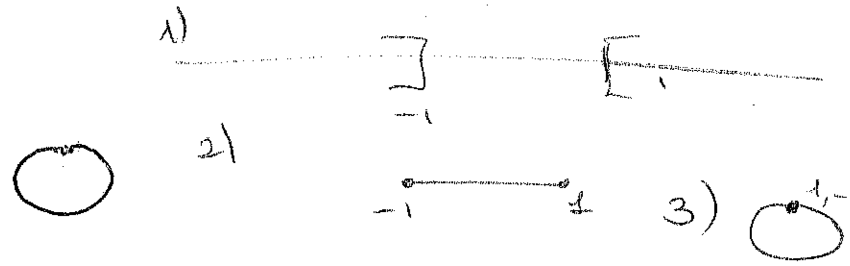
Soluzione.



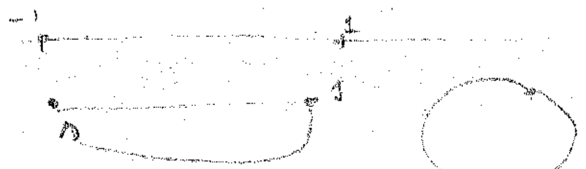
$\Rightarrow 1 \neq 2$

se tolgo un pto 1 resta connesso 2 no diventa sconnesso





(3)



è proprio la ~~spazio~~ circonf. S^1

$\Rightarrow 3 \simeq 1$

(4)

Non è T2 $\Rightarrow \neq$

$1 \neq 4$

Geometria proiettiva – A.A. 2009/2010
Quarto compito – 14 Luglio 2010

Esercizio 3. Sia (X,d) uno spazio metrico compatto. Sia x_0 un punto di X

(1) Mostra che x_0 è isolato se e solo se $X \setminus \{x_0\}$ è compatto.

(2) Mostra che l'insieme

$$\{d(x_0,x) \mid x \in X\} \subset \mathbf{R}$$

ha un massimo M. I punti che distano M da x_0 formano un sottoinsieme compatto di X?

Soluzione.

$$\{d(x_0,x) \mid x \in X\} \subset \mathbb{R}$$

Fisso x_0 e considero $d(x_0,-): X \to \mathbb{R}$ è f. continua

l'immagine è chiuso e limitato, ha un max M.

$\{x \in X \mid d(x,x_0) = M\}$ è chiuso in X (perché è $f^{-1}(M)$ per una funz. continua) quindi compatto

f(compatto) è compatto chiuso e limitato

Posso vedere che è un chiuso e limitato.

Geometria proiettiva – A.A. 2009/2010
Quarto compito – 14 Luglio 2009

Esercizio 4. Sia $\pi = \{x_0 + x_1 = 0\}$ un piano proiettivo nello spazio proiettivo complesso $\mathbb{CP}^3$ di coordinate x_0, x_1, x_2, x_3.
Sia z un numero complesso. Si consideri la retta proiettiva

$$r_z = \{[t+u, t-u, uz, -uz] \mid t, u \in \mathbf{C}\}$$

dipendente dal parametro z.

(1) Determina i punti che appartengono a tutte le rette r_z, al variare di z in $\mathbf{C}$.
(2) Determina l'insieme dei punti di π che sono contenuti in r_z per qualche z.

Soluzione.