Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

IMMERSIONI APERTE IN DIMENSIONE INFINITA

Relatore, Correlatore
Prof. P. Majer, Prof. A. Abbondandolo

Controrelatore
Prof. F. Lazzeri

Candidato
RAUL TOZZI

Anno Accademico 2006–2007

Ammiro molti scienziati del passato e molto le grandi imprese che possono essere compiute da un'umile e metodica riflessione; sono ammaliato dal dono naturale degli esseri viventi capaci di intelligere una enormità prossima e remota nel tempo e nello spazio: rifletto su come possa incastonarsi una parte con l'altra in tutto questo immenso quadro di percezioni. Desiderio comprendere le chiavi della Creazione Matematica, la cui struttura è già scritta da secoli di stratificazione e d'esperienza, la cui forza discende però dall'accedere nel modo più essenziale alla nostra intelligenza. Segue la miracolosa capacità di cogliere l'essenza non solo del nostro pensiero ma dell'intera esperienza cui questo si riconduce. Esperienza che, forgiata da millenni di evoluzione giunge a noi latrice di meraviglie, ma anche, tanto spesso, di frustrazioni e contraddizioni che pur muovendo le nostre risorse più profonde creano quelle sofferenze che ogni ingegno combatte

Prefazione

L'obiettivo principale di questa tesi è quello di approfondire un importante risultato in analisi globale nell'ambito delle varietà di dimensione infinita: il teorema di embedding aperto di Eells-Elworthy. Esso asserisce che ogni varietà di Banach di dimensione infinita, parallelizzabile, separabile può essere realizzata con un embedding di classe C^∞ come un sottoinsieme aperto del suo spazio modello. Particolare attenzione sarà rivolta al caso delle varietà modellate su uno spazio di Hilbert separabile, essendo questo l'ambito preferenziale di applicazione del teorema sopra citato. Saranno fornite alcune modifiche, chiarificazioni e semplificazioni alla dimostrazione originale del teorema e suggeriti alcuni spunti per strategie dimostrative alternative frutto delle più moderne tecniche analitiche e topologiche.

Il teorema di embedding aperto di Eells-Elworthy sarà contestualizzato nel cosiddetto *periodo d'oro* della teoria topologica dell'immersione, quel periodo che va dal 1959 al 1973, in cui la teoria dell'immersione e più in generale l'analisi globale ricevettero fondamentali contributi da parte di numerosi matematici (quali C. Bessaga, D. Burghelea, J. Eells, D. Elworthy, N. Kuiper, R. Palais, S. Smale, per citarne solo alcuni), le cui idee confluirono in altrettanti articoli di ricerca (come [Be 66], [Ku-Bu 69], [Ee 67], [Pa 66], [Sm 59]). A partire dagli anni settanta del secolo scorso, l'analisi globale è stata soggetta ad un interesse sempre crescente, lo stimolo essendo parzialmente dovuto ai rapidi sviluppi nella teoria degli operatori differenziali, dei sistemi dinamici, allo studio degli spazi di applicazioni e dei gruppi di trasformazioni, e delle varietà di dimensione infinita. D'altra parte un forte impulso alla ricerca in questo campo deriva dalle applicazioni reali o potenziali ad una svariata gamma di soggetti. Le applicazioni alla teoria dei campi (problemi della quantizzazione dei campi gravitazionali), alla teoria della relatività (spazi di soluzioni per le equazioni di campo di Einstein) e alla meccanica quantistica sono ben note. Più recentemente, l'analisi globale si è mostrata di interesse anche in campo ingegneristico, in particolare per lo studio della stabilità strutturale, delle singolarità in fluidodinamica e nella fisica dei plasmi.

In questo contesto particolarmente vitale ho deciso di intraprendere l'analisi attenta della prova originale del teorema di Eells-Elworthy [Ee-El 70], guidato dalla necessità di rendere un poco più accessibile, diretta e attuale la dimostrazione originale e di migliorare ove possibile alcuni passaggi con costruzioni il più possibile geometriche e tangibili. D'altra parte, la letteratura matematica non contiene migliorie alla dimostrazione originale di Eells-Elworthy, se non una sua possibile estensione al caso delle varietà con bordo [Ro 94].

Scendendo un poco più nel dettaglio, pur rimanendo sempre a livello informale, una *varietà Riemanniana* di dimensione infinita è una varietà liscia modellata su uno spazio di Hilbert infinito dimensionale, tale che lo spazio tangente in ciascun punto è dotato di un prodotto scalare la cui dipendenza dal punto è di classe C^∞. Una tale varietà può essere considerata uno spazio metrico definendo come distanza tra due punti l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve differenziabili che li uniscono; una varietà Riemanniana è *completa* se è completa con questa metrica. La geometria differenziale locale delle varietà Riemanniane si sviluppa esattamente nello stesso modo come nel caso finito dimensionale: in particolare si può definire un'unica derivata covariante e ottenere così le nozioni di tensore di curvatura, geodetica, curvatura sezionale. Tuttavia, per la geometria differenziale globale delle varietà la situazione è sensibilmente diversa, la ragione principale essendo che la completezza non implica, come nel caso finito dimensionale, che due dati punti possono essere sempre collegati con una geodetica minimizzante (si veda il controesempio C.54 di Grossman).

Una delle idee caratteristiche di Eells-Elworthy per attaccare il problema dell'embedding aperto di varietà di dimensione infinita consiste nell'usare in modo appropriato la nozione di *struttura di Fredholm*. Quest'ultima crebbe inizialmente come uno sforzo di dare una formulazione globale alla teoria del grado di Leray-Schauder, con la speranza di avere applicazioni ai teoremi di esistenza per equazioni differenziali alle derivate parziali ellittiche non lineari. Come accennato, apparve però ben presto chiaro che le strutture di Fredholm costituivano anche uno strumento estremamente utile nello studio della topologia differenziale delle varietà di dimensione infinita. Infatti, il controllo che ne deriva lavorando con perturbazioni di dimensione finita dell'identità apparve di vitale importanza per la prova del teorema di embedding aperto (si veda [Mu 68], [Mu 70], [Mu 71]). Uno dei risultati più utili in questo senso è il teorema di Mukherjea-Quinn sull'esistenza di una filtrazione di Fredholm di certe varietà di Banach di dimensione infinita, ottenuta per mezzo di una successione di varietà di dimensione finita. Prende così corpo il processo di riduzione di una varietà di dimensione infinita con una successione approssimante di varietà annidate di dimensione finita:

$$\{O\} = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n \subset M_{n+1} \subset \cdots \subset M.$$

Congiuntamente alla nozione di struttura di Fredholm, la nozione di struttura layer giuoca un ruolo fondamentale nella prova del teorema di embedding aperto. In breve, diremo che un atlante su una varietà è di tipo *layer* se i cambiamenti di carta sono perturbazioni di rango localmente finito dell'identità, e, similmente, una morfismo tra varietà sarà detto *layer* se la sua rappresentazione nelle carte layer delle varietà di partenza e di arrivo è una perturbazione di rango localmente finito di una certa applicazione lineare. Precisamente, la collezione delle varietà layer e dei morfismi layer costituisce una categoria avente la maggior parte delle proprietà della categoria differenziabile, ivi incluso la nozione di embedding, sottovarietà, pull back, spray, mappa esponenziale, ed intorno tubolare.

Come è naturale aspettarsi, strutture layer e strutture di Fredholm sono legate a filo doppio: in ultima analisi esse discendono da un'unica struttura globale indotta dalla presenza di una mappa di Fredholm non-lineare, definita sulla varietà a valori nello spazio modello (cfr. teorema 2.33).

Per affrontare e comprendere questi argomenti nella loro essenza sono necessari strumenti abbastanza sofisticati sia in analisi globale che in geometria e topologia differenziale, come per esempio la teoria degli operatori di Fredholm e alcuni teoremi in teoria dell'omotopia in dimensione infinita (cfr. [Pa 66], [Pa 63]).

Vediamo esplicitamente il contenuto dei vari capitoli.

Lo studio delle varietà di dimensione infinita ha forti implicazioni nella topologia. Scopo del **capitolo** 1 è rivisitare alcuni contributi alla teoria dell'immersione prediligendo quei risultati con forti implicazioni topologiche che distinguono gli spazi e le varietà di dimensione infinita dai corrispondenti oggetti finito dimensionali. Constateremo che la topologia differenziale in dimensione infinita è sostanzialmente diversa e per certi aspetti è più semplice. Un esempio su tutti, se definiamo parallelizzabili le varietà il cui fibrato tangente è banale, la circonferenza unitaria $\mathcal{S}^1$ è parallelizzabile, dunque, in particolare, (prodotto di varietà parallelizzabili è parallelizzabile) tutti i tori $(\mathcal{S}^1)^k$ sono parallelizzabili. Più in generale, lo spazio tangente TG a un qualsiasi gruppo di Lie G è banale (cfr. [Sp 79]). D'altra parte un famoso teorema dovuto a J.F. Adams (1962) [Ada 62] stabilisce che la sfera $\mathcal{S}^n$ è parallelizzabile se e solo se $n = 1$, 3 o 7. Queste problematiche che abbiamo appena accennato non si presentano in dimensione infinita, infatti, una conseguenza del teorema di Kuiper è che ogni varietà modellata su uno spazio di Hilbert di dimensione infinita è parallelizzabile. Poiché sul teorema di Kuiper si basano alcune fondamentali costruzioni utili per la dimostrazione del teorema di embedding aperto, abbiamo ritenuto opportuno dimostrare con tutti i dettagli almeno uno degli ingredienti fondamentali per ottenere questo importante risultato.

Un altro teorema in questa direzione è il risultato di Bessaga, secondo cui la sfera unitaria di uno spazio di Hilbert di dimensione infinita è diffeomorfa all'intero spazio. Si noti che questo teorema non è vero in generale in dimensione finita, il primo ingenuo controesempio essendo costituito da

$\mathcal{S}^1$, che certamente non ammette un embedding aperto in $\mathbb{R}$. Analizzando l'articolo originale di Bessaga si sono poi fornite alcune estensioni al caso delle varietà di Banach. Completano il capitolo una versione del teorema di Whitney in dimensione infinita, una digressione sui limiti induttivi di varietà, e la costruzione di una retrazione forte dalla palla unitaria chiusa sulla sfera unitaria di uno spazio di Hilbert separabile di dimensione infinita.

Il **capitolo 2**, come promesso, è interamente dedicato alla dimostrazione del teorema di embedding aperto, secondo cui, ricordiamo, ogni varietà modellata su uno spazio di Hilbert reale, separabile, di dimensione infinita H, può essere realizzata con un embedding di classe C^∞ come un sottoinsieme aperto del modello. In particolare, in virtù di questo teorema sarà possibile dotare ogni siffatta varietà della metrica piatta.

La dimostrazione del teorema di embedding aperto può essere suddivisa in due parti:

(1) *Processo di riduzione al caso finito dimensionale via strutture di Fredholm e strutture layer.*

Sia H uno spazio di Hilbert reale, separabile, di dimensione infinita. Indicata con $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una base Hilbertiana per H, sia H_n il sottospazio di H di dimensione n generato da $e_1,\dots,e_n$. Se M è una varietà paracompatta, separabile, di Hausdorff, modellata su H, determineremo una applicazione di classe C^∞, $f\colon M\to H$, Fredholm di indice zero, propria, limitata (teorema 2.33) e trasversa ad H_n per ogni n in $\mathbb{N}$ (corollario 2.34). In particolare, per ogni n, risulterà che $M_n := f^{-1}(H_n)$ è una sottovarietà compatta di dimensione n di M (teoremi 2.38 e 2.40) e

$$\{O\} = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n \subset M_{n+1} \subset \cdots \subset M.$$

Inoltre, l'unione $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ è densa in M (teorema 2.38). Determineremo quindi uno spray su M relativamente al quale tutte le sottovarietà M_n sono totalmente geodetiche e la mappa esponenziale ad esso associata nelle carte layer di M è un morfismo layer (teorema 2.45).

Infine, come indicato nel teorema 2.65, costruiremo una successione $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di insiemi aperti di M tali che, per ogni n in $\mathbb{N}$, Z_n è un intorno tubolare di M_n di dimensione finita,

$$Z_n \subset Z_{n+1} \qquad \text{e} \qquad M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n.$$

Per dimostrare quest'ultimo risultato ci serviremo di un interessante teorema che chiameremo di *"estensione degli omeomorfismi"*; esso fornisce inoltre un modo nuovo di riguardare il teorema dell'intorno tubolare, almeno nella categoria topologica.

(2) *Raffinamento delle tecniche layer introdotte e determinazione di un embedding aperto.*

Immergeremo con un embedding ogni intorno tubolare Z_n nel modello H, e definiremo per induzione una successione $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di embedding aperti $\xi_n\colon Z_n\to H$ (cfr. proposizione 2.75). L'embedding aperto cercato sarà quindi $\xi := \lim \xi_n$. Precisamente, per ogni n, estenderemo ξ_n ad un embedding aperto ξ_{n+1} che coincida con ξ_n su Z_n. Il problema dell'estensione di ξ_n a ξ_{n+1} è un problema in dimensione finita e sarà trattato in ultima analisi per mezzo di un teorema di estensione dell'intorno tubolare (teorema D.19). Le questioni tecniche riguardanti le immersione degli intorni tubolari Z_n saranno trattate con gli strumenti forniti dalla teoria dell'isotopia (lemmi 2.70 e 2.71).

L'esposizione sarà corredata di numerose osservazioni finalizzate all'estensione del teorema di embedding aperto nella generalità delle varietà di Banach.

Allo scopo di rendere la trattazione il più possibile autocontenuta –la tesi è stata scritta con l'intenzione di poter essere letta con il solo ausilio dei testi di Abraham-Robbin [Ab-Ro 67], Dieudonné [Di 69], Dugundji [Du 66], Hirsch [Hir 94] e Lang [Lan 01]– per comodità del lettore sono presentate delle **appendici**. Esse coprono vari argomenti tra i quali la teoria lineare e non-lineare degli operatori di Fredholm, alcuni teoremi di isotopia strettamente necessari per le costruzioni di cui nel capitolo 2 e la nozione di intorno tubolare corredata dei teoremi di esistenza ed unicità nella generalità delle varietà di dimensione infinita. Scopo delle appendici è anche quello di approfondire ed esemplificare la teoria esposta nei due capitoli iniziali.

Notazioni

Notazioni di uso corrente

Notazione	*Notazione equivalente / Descrizione*
$>$	$\gneqq$
$\subset$	$\subseteq$
$\wedge$	congiunzione, *et*
$\mathbb{N}^+$	$\mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}^+$	$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
$\mathbb{R}_0^+$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
$\mathrm{Int}(S)$	parte interna di un insieme $S \subset X$, X spazio topologico

Spazi di applicazioni

Notazione	*Notazione equivalente / Descrizione*
$\mathcal{L}(E, F)$	spazio dei morfismi toplineari, i.e. morfismi lineari e continui
$\mathcal{L}_c(X, Y)$	insieme dei morfismi toplineari compatti
$\mathcal{L}(E)$	$\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$
$\mathrm{End}(E)$	$\mathcal{L}(E, E)$
$\mathrm{GL}(E)$	sottogruppo delle unità di $\mathrm{End}(E)$
$C_b^r(E)$	$\{\psi \colon E \to \mathbb{R}$ di classe C^r aventi supporto limitato$\}$

Altri simboli

Notazione	*Notazione equivalente / Descrizione*
$\mathrm{dom} f$	dominio del morfismo f
$\mathrm{codom}\, f$	codominio del morfismo f
$\mathrm{rk}\, f$	immagine del morfismo f
$\rightarrowtail$	monomorfismo
$\twoheadrightarrow$	epimorfismo
Vett-Top	categoria degli spazi vettoriali topologici reali
Difftop	categoria delle varietà di classe C^∞

Indice

Capitolo 1

Fenomeni della dimensione infinita

Molte delle definizioni e delle costruzioni standard proprie della geometria e della topologia differenziale in dimensione finita si trasportano invariate nelle corrispondenti generalizzazioni in dimensione infinita (cfr. appendice C).

Per contro, alcuni teoremi noti in dimensione finita cessano di essere veri in topologia infinito dimensionale (l'osservazione E.9 nell'appendice E fornisce un primo esempio in questa direzione), altri risultati invece sembrano essere connaturati alla dimensione infinita.

Questo capitolo introduttivo ha il duplice scopo di esporre alcune delle differenze più significative ed estendere alcuni dei risultati più o meno ovvi propri della dimensione finita al caso infinito dimensionale. Prediligeremo i risultati di cui non sia presente nella letteratura una dimostrazione completa e dettagliata e che potrebbero costituire utili riferimenti per costruzioni future.

1.1 Il teorema di Whitney in dimensione infinita

In questa sezione forniremo una estensione in dimensione infinita del seguente classico teorema.

Teorema 1.1 (Whitney, 1944). *Ogni varietà paracompatta di Hausdorff di dimensione n può essere realizzata con un embedding come una sottovarietà chiusa di $\mathbb{R}^{2n+1}$, e come una sottovarietà (non necessariamente chiusa) di $\mathbb{R}^{2n}$.*

Dimostrazione. Il teorema è un classico della geometria differenziale in dimensione infinita. Si rimanda il lettore per esempio alla chiara dimostrazione presentata da Hirsch in [Hir 94]. □

Dunque ogni varietà può essere realizzata come sottovarietà chiusa di un qualche $\mathbb{R}^N$, per N abbastanza grande, e quindi eredita una metrica Riemanniana indotta dalla metrica piatta di $\mathbb{R}^N$. Inoltre, in questo modo è possibile ottenere tutte le varietà Riemanniane di dimensione finita, in virtù del famoso teorema di Nash:

Teorema 1.2 (Nash, 1956). *Ogni varietà Riemanniana di dimensione finita ammette un embedding isometrico in $\mathbb{R}^N$, considerato con la metrica piatta, per N abbastanza grande.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione originale si faccia riferimento all'articolo di Nash [Na 56]. Si presti attenzione al fatto che all'interno di [Na 56] c'è una lieve imprecisione nella dimostrazione dell'iniettività dell'immersione di una varietà *non compatta* di dimensione n in uno spazio Euclideo $(n+1)(n/2)(3n+11)$ dimensionale. Questo fatto è stato notato per la prima volta da Solovay in [Sol 98]. Per una dimostrazione alternativa si faccia comunque riferimento al lavoro di Günther, [Gu 89]. □

Nel prossimo capitolo – che costituisce la parte centrale della tesi – otterremo come sottoprodotto del teorema di embedding aperto di Eells-Elworthy (teorema 2.78) che ogni varietà Hilbertiana separabile di dimensione infinita può essere dotata della metrica piatta.

Veniamo intanto all'annunciata estensione in dimensione infinita del teorema 1.1 di Whitney. Per le definizioni, e, più in generale, per i prerequisiti necessari alla comprensione dei risultati di questo capitolo, si faccia riferimento all'appendice C.

Teorema 1.3. *Ogni varietà di classe C^∞ avente base numerabile modellata su uno spazio di Hilbert separabile ammette un embedding di classe C^∞ su una sottovarietà chiusa di uno spazio di Hilbert separabile.*

Dimostrazione. Sia M una varietà come per ipotesi, e $\{(U_i, \varphi_i)\}$ un atlante numerabile della varietà M con, per ogni i, $\varphi_i(U_i) = B_O(1)$, la palla unitaria aperta del modello H di M. Sia $\{V_i\}$ un raffinamento localmente finito di $\{U_i\}$ e $\{W_i\}$ un ricoprimento di M costituito da insiemi aperti tali che per ogni i, $\overline{W}_i \subset V_i$. Sia g_i una funzione a valori reali di classe C^∞ definita su M tale che $0 \leq g_i(x) \leq 1$ per ogni $x \in M$, $g_i \equiv 0$ su $M \setminus V_i$ e $g_i \equiv 1$ su $\overline{W}_i$. Definiamo $\psi_i \colon M \to H \times \mathbb{R}$ mediante

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \big(g_i(x)\,\varphi_i(x), g_i(x)\big) & \text{se } x \in U_i, \\ (O, 0) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora chiaramente $\psi_i|_{W_i}$ è un embedding. Poniamo adesso $E_i := H \times \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}^+$, e denotiamo con E la somma di Hilbert[1] degli E_i. Definiamo $\psi \colon M \to E$ ponendo

$$\psi(x) = \sum \psi_i(x). \tag{1.1.1}$$

Si noti che ψ è una applicazione di classe C^∞, infatti nell'intorno di ogni punto x in M tutti i termini della somma che definisce ψ sono nulli eccezion fatta che per un numero finito di essi, i quali sono di classe C^∞.

Osserviamo che ψ è un'immersione iniettiva, infatti, per ogni x in M esiste un numero finito di indici i tale che $x \in W_i$ e $\psi_i|_{W_i}$ e quindi $\psi|_{W_i}$ è un embedding. Inoltre, siccome per x in W_i $g_i(x) = 1$, si deduce che $\|\psi(x)\| > 1$ per ogni x in M.

Verifichiamo che l'immagine $\psi(M)$ è chiusa in E. Per questo supponiamo che $\big(\psi(x_n)\big)$ converga a un punto y in E. Segue che, per qualche i, $(\psi_i(x_n))$ converge a un punto $y_i \in E_i \setminus \{O\}$, inoltre esiste N in $\mathbb{N}$ tale che $x_n \in V_i$ per ogni $n \geq N$. Ora, $(\varphi_i(x_n))$ converge in $B_O(1)$, d'altra parte $\varphi_i \colon U_i \to B_O(1)$ è un diffeomorfismo, quindi (x_n) converge a un punto x in U_i. Dunque ψ è un'immersione iniettiva chiusa di classe C^∞, quindi ψ^{-1} è continua, ψ è un omeomorfismo e perciò è un embedding (cfr. proposizione C.21 in appendice).
La dimostrazione è conclusa osservando che E è uno spazio di Hilbert separabile. □

Ricordiamo che una immersione in una varietà Riemanniana induce una metrica Riemanniana anche nella varietà di partenza. Precisamente:

Definizione 1.4. Siano M ed N varietà, $F \colon M \to N$ un'immersione, e g una metrica Riemanniana su N. Definiamo per ogni p in M una forma bilineare $(F^*g)_p$ su T_pM ponendo

$$\forall\, v, w \in T_pM \qquad (F^*g)_p(v, w) = g_{F(p)}\big(T_pF(v), T_pF(w)\big)$$

È immediato verificare che F^*g è una metrica Riemanniana su M, detta *metrica indotta* da g tramite F, o *metrica pullback*.

Corollario 1.5. *Ogni varietà a base numerabile di classe C^∞ modellata su uno spazio di Hilbert separabile ammette una metrica Riemanniana completa.*

[1] Sia X_i uno spazio di Hilbert per ogni $i = 1, 2, \ldots$. La somma di Hilbert degli X_i è l'insieme delle successioni $(x_1, x_2, \ldots)$ in cui $x_i \in X_i$ per ogni i, e $\sum \|x_i\|^2 < \infty$ (cfr. Dieudonné [Di 69] pag. 123 per la nozione precisa e le proprietà basilari delle somme di Hilbert).

Dimostrazione. Per il teorema 1.3, ogni varietà M che soddisfa le ipotesi del corollario 1.5 ammette un embedding su una sottovarietà chiusa di uno spazio di Hilbert separabile H:

$$\psi\colon M \to \psi(M) \subset H.$$

D'altra parte H, con la metrica indotta dal prodotto scalare, è una varietà completa, segue che la sottovarietà *chiusa* $\psi(M)$ di H è completa rispetto alla metrica indotta da H, sia essa g.

Se restringiamo il codominio di ψ a $\psi(M)$, per costruzione ψ è un *diffeomorfismo* tra M e $\psi(M)$. Consideriamo su M la metrica ψ^*g pull-back di g tramite $\psi\colon M \to \psi(M)$. Allora

$$\psi\colon \big(M, \psi^*g\big) \to \big(\psi(M), g\big)$$

è una *isometria*, e siccome $(\psi(M), g)$ è completa, anche (M, ψ^*g) lo è. □

Osservazione 1.6. Per una dimostrazione alternativa del corollario 1.5 che non faccia uso del teorema 1.3 si consulti per esempio [Nom 61].

1.2 Limite induttivo di varietà

In questa sezione proveremo che le varietà Hilbertiane sono limite induttivo di varietà di dimensione finita.

Definizione 1.7. Sia (X_n) una successione di spazi topologici tali che, per ogni n, X_n è un sottospazio di X_{n+1}. Denotiamo con $\varinjlim X_n$ il loro limite induttivo, i.e. lo spazio $X_\infty := \bigcup_n X_n$ munito della topologia più fine per cui $(\forall\, m)$ l'inclusione $X_m \hookrightarrow X_\infty$ sia continua.

Teorema 1.8 (Palais). *Sia (π_n) una successione di proiettori continui da uno spazio di Banach E su sottospazi finito dimensionali $E_n := \pi_n E \subset E_{n+1}$, che tenda fortemente all'identità di E (i.e. $\pi_n x \to x$ per ogni x in E). Dato un sottoinsieme aperto X di E, sia $X_n := X \cap E_n$ e $X_\infty = \varinjlim X_n$. Allora la mappa di inclusione naturale $j\colon X_\infty \hookrightarrow X$ è una equivalenza di omotopia.*

Dimostrazione. Per $0 \le t < \infty$ si definisca

$$\pi_t \stackrel{\text{def}}{:=} \pi_n + (t-n)\big(\pi_{n+1} - \pi_n\big)$$

in cui $n \le t \le n+1$. Sia $\pi_\infty = \mathrm{id}$ l'identità di E. Si noti che $\pi_t E_n \subset E_n$ per ogni n e per ogni t. Inoltre, quando $n > t$ abbiamo $\pi_t E \subset E_n$. Poiché per ogni x risulta $\lim_{t\to\infty} \pi_t x = x$, per il teorema di Banach-Steinhaus i proiettori π_t sono uniformemente limitati in norma e quindi equicontinui. Poiché $\pi_t \to \pi_\infty$ puntualmente, dall'equicontinuità segue che $\pi_t \to \pi_\infty$ uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di E. In particolare, se $x_n \to x$ allora $K = \{x_n\} \cup \{x\}$ è compatto e quindi se $t_n \to \infty$ allora $\pi_{t_n} \to \pi_\infty$ uniformemente su K, da cui segue che $\pi_{t_n} x_n \to x$. Dunque la mappa $\pi\colon E \times [0, \infty] \to E$ definita da $\pi(x, t) := \pi_t(x)$ è continua.

Sia ora X un sottoinsieme aperto di E e si definisca una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}_0^+$ ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\big\{t \,:\, t \ge 0 \,\wedge\, \pi_t x \notin X\big\}.$$

Allora f è semicontinua superiormente (i.e. se $f(x_0) < N$ allora esiste un intorno V di x_0 tale che $f(x) < N$ per ogni $x \in V$). Infatti, se così non fosse, allora esisterebbe una successione $x_n \to x$ ed una successione $t_n \ge N$ tale che $\pi_{t_n} x_n \notin X$. In particolare (t_n) è limitata. Si scelga una sottosuccessione convergente a $t \ge N$: si ha che $\pi_t x_n \to \pi_t x_0$, e poiché il complementare di X è chiuso, deve essere $\pi_t x_0 \notin X$, in contraddizione con la definizione di f.

Si ricordi adesso che in uno spazio paracompatto, ed in particolare in uno spazio metrico, ogni funzione semicontinua superiormente ammette una funzione continua dominante. Esiste quindi una funzione continua $g\colon X \to \mathbb{R}_0^+$ tale che $\pi_t x \in X$ ogni volta che $t \ge g(x)$.

Definiamo $h\colon X \times [0,1] \to X$ ponendo

$$h(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \Big(x, \frac{1}{t}g(x)\Big).$$

Scriveremo anche $h_t(x)$ in luogo di $h(x,t)$. Si osservi che h è una omotopia tra h_0, i.e. l'identità di X, e $h_1 = (\cdot, g(\cdot))$.

Dato x_0 in X, sia n in $\mathbb{N}$ tale che $n > g(x_0)$. Allora $h_1(x_0) = \pi\big(x_0, g(x_0)\big) \in X \cap E_n = X_n$. Questo mostra che h_1 applica X in $\bigcup_n X_n = X_\infty$.

Sia $\tilde{h}_1$ l'applicazione h_1 vista come mappa da X a valori nello spazio topologico X_∞. Vogliamo dimostrare che $\tilde{h}_1$ è continua. Se V è un intorno di x_0 tale che $n > g(x)$ per ogni x in V, sarà sufficiente dimostrare che $\tilde{h}_1|_V$ è continua. Ora $h_1(x) \in X_n$ per ogni x in V, inoltre sappiamo che $h_1|_V\colon V \to X_n$ è continua: siccome X_n è un sottospazio di X_∞, segue che $\tilde{h}_1|_V$ è continua.

Adesso, se j è l'iniezione di X_∞ in X allora $j \circ \tilde{h}_1 = h_1$, quindi $j \circ \tilde{h}_1$ è omotopicamente equivalente all'identità di X. D'altra parte, consideriamo la mappa $\tilde{h}_1 \circ j\colon X_\infty \to X_\infty$. Siccome $\pi_t X_n \subset X_n$ si ottiene che h_t applica ogni X_n in sé e definisce una omotopia di $h_1|_{X_n}$ con l'applicazione identica su X_n. Segue che $h_t \circ j$ definisce una omotopia di $h_1 \circ j$ con l'applicazione identica di X.

□

Teorema 1.9. *Ogni varietà paracompatta M modellata su uno spazio di Hilbert separabile è omotopicamente equivalente al limite induttivo di una successione di varietà di dimensione finita*

$$M_n \subset M_{n+1} \subset \cdots .$$

Dimostrazione. Per il teorema 1.3, M ammette un embedding su una sottovarietà chiusa di uno spazio di Hilbert H. Identifichiamo M con la sua immagine ed indichiamo con $\mathcal{U}$ un intorno tubolare di M in H. Quindi M è omotopicamente equivalente a $\mathcal{U}$. Sia (e_n) una base ortonormale per H ed indichiamo con P_n il proiettore ortogonale di H sul sottospazio H_n generato da $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Dunque $\mathcal{U}$ è omotopicamente equivalente a $\varinjlim \mathcal{U}_n$, in cui $\mathcal{U}_n := \mathcal{U} \cap H_n$ è una sottovarietà aperta dello spazio n-dimensionale H_n.

□

1.3 Contraibilità della sfera in dimensione infinita

In questa sezione proveremo che la sfera unitaria di uno spazio di Hilbert di dimensione infinita è contrattile.

Sia $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio di Hilbert reale di dimensione infinita, separabile. Per fissare le idee riguardiamo H come lo spazio di Hilbert $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ delle successioni reali di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ aventi quadrato sommabile. Consideriamo l'operatore di *shift destro*

$$F\colon H \to H \qquad F(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle x, e_{j-1}\rangle e_j. \tag{1.3.1}$$

Posto

$$x = \langle x, e_0\rangle e_0 + \langle x, e_1\rangle e_1 + \langle x, e_2\rangle e_2 + \langle x, e_3\rangle e_3 + \cdots$$

risulta

$$F(x) = 0e_0 + \langle x, e_0\rangle e_1 + \langle x, e_1\rangle e_2 + \langle x, e_2\rangle e_3 + \cdots, \tag{1.3.2}$$

dunque, in particolare, $\big(\forall\, x \in H \setminus \{0\}\big)$ (i) $F(x) \neq x$ e (ii) $F(x) \neq -x$. Per (i) basti osservare che, se esistesse $x \neq 0$ per cui $F(x) = x$, allora, moltiplicando scalarmente ambo i membri di (1.3.2) per e_k si otterrebbe $\langle F(x), e_k\rangle = \langle x, e_{k-1}\rangle = \langle x, e_k\rangle$. Dunque x avrebbe tutte le componenti uguali, ma ciò è in contraddizione con la convergenza della serie dei quadrati, possibile solo se $x = 0$. Analogamente per (ii) si avrebbe $\langle x, e_{k-1}\rangle = -\langle x, e_k\rangle$, stavolta le componenti sono opposte ognuna alla successiva, e si ottiene la stessa contraddizione se non è $x = 0$.

Si verifica immediatamente che $F\colon H \to H$ è un operatore lineare isometrico (i.e., lineare, iniettivo, e tale che $(\forall\, x \in H)$ $\|Fx\| = \|x\|$). Inoltre, posta $S = \{x \in H : \|x\| = 1\}$ la sfera unitaria di H, $F|_S$ applica S in S.

Definizione 1.10. Uno spazio topologico X è detto *contrattile* (o *contraibile*) se X è omotopicamente equivalente ad un punto p in X, ossia, indicate con $c_p\colon X \to \{p\}$ la mappa costante con valore p e $\iota\colon \{p\} \hookrightarrow X$ l'inclusione di $p \in X$ in X, ($c_p \circ \iota = \mathrm{id}_{\{p\}}$ e) $c_p = \iota \circ c_p\colon X \to X$ è omotopa a $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, scritto $\iota \circ c_p \simeq \mathrm{id}_X$.

Teorema 1.11. *Sia H uno spazio di Hilbert separabile di dimensione infinita e S la sfera unitaria di H. Allora S è contrattile.*

Dimostrazione. Contraiamo dapprima la sfera unitaria $S \subset H$ nel suo equatore (ossia l'insieme $S \cap \langle e_0\rangle^\perp$), e quindi contraiamo facilmente l'equatore nel polo nord con una seconda omotopia. Procediamo con la dimostrazione formale. Sia $\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale completo in H ed F lo shift destro ristretto a S:

$$F\colon S \to S, \qquad F(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle x, e_{j-1}\rangle e_j.$$

Sia $h\colon S \times [0,1] \to S$ l'applicazione definita da

$$h(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(1-2t)x + 2tFx}{\big\|(1-2t)x + 2tFx\big\|} & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\[2ex] \dfrac{(2-2t)Fx + (2t-1)e_0}{\big\|(2-2t)Fx + (2t-1)e_0\big\|} & \text{se } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Siccome $(\forall\, x \in S)$ $\|Fx\| = \|x\| = 1$, $(1-2t)x + 2tFx = 0 \Rightarrow t = 1/4 \Rightarrow Fx = -x, \lightning$. Segue che $(\forall\, x \in S)(\forall\, t \in [0,1/2])$ $(1-2t)x + 2tFx \neq 0$. Analogamente, $(2-2t)Fx + (2t-1)e_0 = 0$ implica $t = 3/4 \Rightarrow Fx = -e_0$ da cui $0 = \langle Fx, e_0\rangle = \langle -e_0, e_0\rangle = -1, \lightning$. Dunque (1.3.3) definisce correttamente la mappa h. Chiaramente h è continua, $h(\cdot,0) = \mathrm{id}_S$, mentre $h(\cdot,1) = c_{e_0}$, dunque c_{e_0} e id_S sono omotope e h è una mappa che realizza questa omotopia. Segue che S è contrattile. $\square$

1.3.1 Sul teorema di Brouwer in dimensione infinita

Proposizione 1.12. *Sia H uno spazio di Hilbert separabile di dimensione infinita e sia B la palla unitaria chiusa. Allora esiste un'applicazione continua $G\colon B \to B$ priva di punti fissi.*

Dimostrazione. Nelle notazioni della dimostrazione del teorema 1.11 precedente, sia $G\colon B \to B$ definita da

$$G(x) \overset{\text{def}}{:=} \left(1 - \|x\|^2\right)^{\frac{1}{2}} e_0 + F(x) = \left(1 - \|x\|^2\right)^{\frac{1}{2}} e_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} \langle x, e_{j-1}\rangle e_j. \tag{1.3.4}$$

Chiaramente G è continua, e $\|G(x)\|^2 = \left(1 - \|x\|^2\right) + \|F(x)\|^2 = 1$. Inoltre G e priva di punti fissi. Infatti, se esistesse x in B tale che $G(x) = x$ allora, essendo

$$\begin{aligned} G(x) &= \left(1 - \|x\|^2\right)^{\frac{1}{2}} e_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} \langle x, e_{j-1}\rangle e_j \\ &= \left(1 - \|x\|^2\right)^{\frac{1}{2}} e_0 + \langle x, e_0\rangle e_1 + \langle x, e_1\rangle e_2 + \langle x, e_2\rangle e_3 + \cdots \end{aligned}$$

dovrebbe essere

$$\begin{cases} \left(1 - \|x\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \langle x, e_j\rangle & \text{per ogni } j \in \mathbb{N} \\ \|x\|^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} \langle x, e_j\rangle^2 \le 1 \end{cases}$$

da cui

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \langle x, e_j\rangle^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(1 - \|x\|^2\right) \le 1. \tag{1.3.5}$$

Distinguiamo due casi: se $\|x\| \neq 1$ allora la serie 1.3.5 è una serie a termini costanti, dunque è divergente, contraddizione. D'altra parte, se $\|x\| = 1$ allora $G(x) = F(x)$ e per quanto si è già osservato F è priva di punti fissi eccezion fatta che per $x = 0$.

□

Osservazione 1.13. Nelle notazioni precedentemente introdotte, un'altra mappa $G\colon B \to B$ priva di punti fissi in B è la seguente:

$$G(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}\|x\|\right) e_0 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\|x\|\right) \frac{F(x)}{\|x\|} & \text{se } x \neq 0; \\ e_0 & \text{se } x = 0. \end{cases} \tag{1.3.6}$$

Per prima cosa osserviamo che (i) se $\|x\| = 1$ allora $G(x) = F(x)$, i.e., l'operatore di shift destro definito in (1.3.1). Inoltre (ii) $\|G(x)\|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\|x\|\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\|x\|\right) \frac{\|F(x)\|^2}{\|x\|^2} = 1$, quindi, precisamente, $G(B) \subset S \subset B$. Infine da (i) e da (ii) segue che

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}^+) \qquad G^n(x) = F^{n-1} \circ G(x). \tag{1.3.7}$$

Infatti, procedendo per induzione, per $n = 2$, $G^2(x) = G\big(G(x)\big) = F\big(G(x)\big)$, in cui l'ultima uguaglianza segue dalla proprietà (ii) e dunque dalla proprietà (i), inoltre, se $n > 2$ allora

$$G^n(x) = G^{n-1} \circ G(x) = \left(F^{n-2} \circ G\right) \circ G(x) = F^{n-1} \circ G(x).$$

Supponiamo ora che esista x in B tale che $G(x) = x$. Allora dovrebbe essere

$$\begin{cases} F \circ G(x) = G^2(x) = G(x) = x \\ F \circ G(x) = F(x) \end{cases} \rightsquigarrow \; F(x) = x \;\Leftrightarrow\; x = 0.$$

D'altra parte $G(0) = e_0 \neq 0$, contraddizione. Segue che G non ha punti fissi.

Un altro esempio di una mappa di B in B priva di punti fissi è

$$G_s(x) = s(1 - \|x\|)e_0 + F(x),$$

in cui $s \in]0, 1[$ è fissato. Si verifica inoltre facilmente che G_s è lipschitziana con costante di Lipschitz $\sqrt{1 + s^2}$.

1.4 La sfera è un retratto di deformazione della palla chiusa

In questa sezione proveremo che la sfera unitaria è un retratto forte di deformazione della palla unitaria chiusa.

Definizione 1.14. Sia $A \subset X$ un sottoinsieme di uno spazio topologico X. Una *retrazione* di X su A è una applicazione continua $r\colon X \to A$ la cui restrizione ad A coincida con l'identità di A (i.e., indicata con $\iota\colon A \hookrightarrow X$ l'inclusione di A in X, $r \circ \iota \equiv \mathrm{id}_A\colon A \to A$). In tal caso diremo che A è un *retratto* di X.

A è detto un *retratto di deformazione* di X se esiste una retrazione $r\colon X \to A$ tale che

$$\iota \circ r\colon X \xrightarrow{r} A \xhookrightarrow{\iota} X$$

sia omotopa a $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, scritto $\iota \circ r \simeq \mathrm{id}_X$. Equivalentemente, *$A$ è un retratto di deformazione di X se e solo se A e X sono omotopicamente equivalenti*, la retrazione $r\colon X \to A$ e l'inclusione $\iota\colon A \hookrightarrow X$ essendo le equivalenze di omotopia.

Si osservi che un sottoinsieme A di X è un retratto di deformazione di X se e solo se esiste un'omotopia $R\colon X \times I \to X$ tale che:

1. $R(x, 0) \in A$ per ogni x in X, $R(a, 0) = a$ per ogni a in A;
2. $R(x, 1) = x$ per ogni x in X.

Precisamente, posta $(\forall\, x \in X)\ r(x) := R(x, 0)$, allora $r\colon X \to A$ è una retrazione e R è un'omotopia tra r e id_X.

Osservazione 1.15. Dalla sezione precedente sappiamo che esiste una mappa priva di punti fissi $G\colon B \to B$ (B essendo la palla unitaria chiusa di H). Questa fornisce subito una *retrazione* di B su S, basta considerare infatti per ogni x in B il raggio avente origine in $G(x)$ e passante per il punto x (la retta per $G(x)$ e x essendo univocamente determinata poiché $G(x) \neq x$). Si definisce quindi $r(x)$ come l'unico punto di questo raggio appartenente a S e distinto da $G(x)$.

Corollario 1.16. *La sfera unitaria di uno spazio di Hilbert separabile di dimensione infinita è contraibile.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che S è contrattile, i.e. esiste una omotopia $h\colon S \times [0, 1] \to S$ tale che (i) $h(\cdot, 0) = \mathrm{id}_S$, e (ii) $h(\cdot, 1)$ è una costante. Sia $r\colon B \to S$ la retrazione di B su S definita nell'osservazione 1.15. Allora l'applicazione $h\colon S \times [0, 1] \to S$ definita ponendo

$$h(x, t) := r\big((1 - t)x\big)$$

soddisfa ambo le richieste (i) e (ii). □

Nel seguito (cfr. osservazione 1.27) forniremo una ulteriore dimostrazione della contraibilità della sfera.

Definizione 1.17. Un sottoinsieme A di X è detto un *retratto forte di deformazione* se esiste una retrazione $r\colon X \to A$ per cui $\iota \circ r$ sia omotopa relativamente ad A all'identità di X, scritto $\iota \circ r \simeq_A \mathrm{id}_X$. In altri termini, A è un retratto forte di deformazione di X se e solo se esiste un'omotopia $R\colon X \times I \to X$ tale che:

1. $R(x, 0) \in A$ per ogni x in X, $R(a, t) = a$ per ogni a in A *e t in I;*
2. $R(x, 1) = x$ per ogni x in X.

Naturalmente, un retratto forte di deformazione è anche un retratto di deformazione. Intuitivamente, un sottospazio A è un retratto forte di deformazione di X se X può essere deformato con continuità fino a farlo coincidere con A, mantenendo A fisso durante il processo di deformazione.

Proposizione 1.18. *La sfera unitaria di uno spazio di Hilbert reale separabile di dimensione infinita è un retratto di deformazione forte della palla unitaria chiusa.*

Dimostrazione. Si consideri la mappa r definita nell'osservazione 1.15. Indicata con $\iota\colon S \hookrightarrow B$ l'inclusione, proviamo che $\iota \circ r$ è omotopa relativamente ad S all'identità di B. Costruiamo in modo standard una omotopia $R\colon B \times [0,1] \to B$ tra l'identità di B e la retrazione r ponendo:

$$R(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} (1-t)r(x) + tx$$

Dalla proprietà di convessità di B segue intanto che, effettivamente, l'immagine di R è contenuta in B, inoltre R è chiaramente continua.

Osserviamo che, per $t = 0$, $R(\cdot, 0) = r$, e, per $t = 1$, $R(\cdot, 1) = \mathrm{id}_B$. Infine, per ogni x in S, $r(x) = x$, quindi, per ogni t in I $R(x,t) = (1-t)x + tx = x$. Dunque R deforma B in S relativamente a S ed S è un retratto di deformazione forte di B. $\square$

1.5 Il teorema di Bessaga

Scopo primario di questa sezione è provare un caso speciale del teorema di embedding aperto (teorema 2.78), dimostreremo cioè che la sfera unitaria di uno spazio di Hilbert di dimensione infinita è diffeomorfa all'intero spazio.

Vediamo intanto alcuni fatti preliminari. Sia H uno spazio di Hilbert. Indicata con $B_O(1) \subset H$ la palla unitaria aperta di H, esiste un omeomorfismo da H *su* $B_O(1)$, per esempio

$$v \in H \longmapsto \frac{v}{\left(1+\|v\|^2\right)^{1/2}} \in B_O(1), \tag{1.5.1}$$

la mappa inversa essendo

$$w \in B_O(1) \longmapsto \frac{w}{\left(1-\|w\|^2\right)^{1/2}} \in H. \tag{1.5.2}$$

Dunque H e $B_O(1)$ sono omeomorfi. Tutto ciò continua ad essere vero anche nel caso degli spazi di Banach, con la stessa dimostrazione si prova cioè che uno spazio di Banach e la sua palla unitaria aperta sono omeomorfi. Nel caso degli spazi di Hilbert, il fatto che la norma discenda da un prodotto scalare permette di concludere inoltre che il funzionale $\|\cdot\|^2$ è di classe C^∞, e quindi la palla unitaria aperta di uno spazio di Hilbert e lo spazio di Hilbert stesso sono diffeomorfi con un diffeomorfismo di classe C^∞. Proveremo dunque che $\|\cdot\|^2$ è di classe C^∞ (il differenziale essendo quello secondo Fréchèt), e, come si vedrà, si sfrutterà fin dall'inizio il fatto che $\|\cdot\|$ sia deducibile da una prodotto scalare. Indicato con $\langle\cdot,\cdot\cdot\rangle_H$ il prodotto scalare su H,

$$\begin{aligned} F \overset{\text{def}}{=} \|\cdot\|^2 = \langle \mathrm{id}_H, \mathrm{id}_H\rangle \colon H \to \mathbb{R}^+; \quad \mathrm{id}_H \colon H \to H;& \\ F' \colon H \to \mathcal{L}(H,\mathbb{R}); \quad (\mathrm{id}_H)' \colon H \to \mathrm{End}(H); \quad F' = 2\big\langle (\mathrm{id}_H)', \mathrm{id}_H\big\rangle;& \\ F'(x)(h) = \big(F'(x)\big)(h) = 2\big\langle (\mathrm{id}_H)'(x), \mathrm{id}_H\big\rangle(h) = 2\big\langle \mathrm{id}_H(x), \mathrm{id}_H\big\rangle(h) = 2\big\langle x, h\big\rangle.& \end{aligned}$$

Dunque $F'(x)\colon h \to 2\big\langle h, x\big\rangle$ è un funzionale lineare e continuo quindi F è di classe C^1. Il funzionale F ammette derivata di Fréchèt indipendente dal punto in cui è calcolata (dunque, in particolare è continua), segue che a partire dalla derivata terza di F tutte le derivate di Fréchèt in x, per ogni x in X, sono nulle: F è quindi banalmente differenziabile infinite volte con continuità.

Per gli spazi di Banach basti solo pensare che esistono spazi separabili per i quali la norma non è Fréchèt differenziabile in alcun punto (per esempio $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$). Inoltre, se uno spazio di Banach ha la proprietà che $\|\cdot\|^2$ è differenziabile due volte secondo Fréchèt in zero, allora esso è isomorfo a uno spazio di Hilbert (se $f(x) = \|x\|^2$ è differenziabile due volte secondo Fréchèt in 0 allora $df_0 = 0$ ed il polinomio di Taylor T di grado 2 è una forma quadratica. Esso soddisfa $f(x)-T(x) = o(\|x\|^2)$. Dunque, per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, $\|x\| = \varepsilon \Rightarrow f(x) - T(x) \le \frac{1}{2}\|x\|^2$. Quindi $T(x) \ge \frac{1}{2}\|x\|^2$ e perciò $x \mapsto (T(x))^{1/2}$ è una norma hilbertiana equivalente).

Osservazione 1.19. Chiaramente, se $a > 0$, allora ogni palla di raggio a è isomorfa alla palla unitaria per mezzo della moltiplicazione per lo scalare a (o a^{-1}).

Osservazione 1.20. Nelle notazioni introdotte sopra, per ogni $x \neq 0$, $F'(x) = 2\big\langle x, \cdot\big\rangle \colon H \to \mathbb{R}$ è surgettivo. Inoltre il suo nucleo è il complemento ortogonale del sottospazio generato da x, e quindi è complementato. Segue che (cfr. teorema C.27) la sfera unitaria S in uno spazio di Hilbert è una sottovarietà.

Osservazione 1.21. Sia x_0 in S un punto arbitrario. Posto $A := \{x_0\} \cup \{x \in S \,:\, (x_1 - x_0) > 1/2\}$, considereremo su S l'atlante $\{(S_y, \varphi_y)\}_{y\in A}$, in cui $S_y := \{x \in H : \langle x, y\rangle > 0\}$, e, definito H_y come

$$H_y := \{x \in H \,:\, \langle x, y\rangle = 0\},$$

$\varphi_y \colon S_y \to H_y$ è la proiezione ortogonale della semisfera S_y sul sottospazio H_y. Si verifica facilmente che questo atlante è compatibile con la struttura di varietà differenziabile di S ereditata da H.

1.5.1 Il contributo di Bessaga

Sia $\big(H, \langle\cdot,\cdot\cdot\rangle\big)$ un arbitrario spazio di Hilbert di dimensione infinita; denotiamo con $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\cdot\rangle$. Sia S la sfera unitaria di H; Klee, [Kl 53], ha dimostrato che S è omeomorfa ad H (tale risultato è falso in dimensione finita). Proveremo in questa sezione il seguente risultato più forte:

Teorema 1.22 (Bessaga). *Dotiamo S della sua struttura di sottovarietà di classe C^∞ indotta da H. Allora esiste un diffeomorfismo di classe C^∞ f da S su H:*

$$f\colon S \twoheadrightarrow H.$$

Per provare questo teorema sono necessari i seguenti risultati intermedi:

Lemma 1.23. *Sia $\omega(\cdot)$ una norma in H, di classe C^∞ su $H\setminus\{O\}$, con $\omega(x) \leqslant \|x\|$. Allora esiste un diffeomorfismo di classe C^∞ h_2 di H su H che applica la palla unitaria chiusa $\{x \in H : \|x\| \leqslant 1\}$ sull'insieme $\{x \in H : \omega(x) \leqslant 1\}$.*

Dimostrazione. Sia $\lambda(t)$ una funzione reale non decrescente di classe C^∞ definita per $t > 0$, tale che $\lambda(t) = 0$ per $t \leq 1/2$ e $\lambda(t) = 1$ per $t \geq 1$. Sia

$$h_2(x) = \left(\lambda\big(\|x\|\big)\frac{\|x\|}{\omega(x)} + 1 - \lambda\big(\|x\|\big)\right)x$$

se $x \neq 0$ e $h_2(0) = 0$. Si verifica che (1) h_2 è una applicazione iniettiva da H su H; (2) h_2 trasforma la palla unitaria chiusa $\{x \in H : \|x\| \leqslant 1\}$ sull'insieme $\{x \in H : \omega(x) \leqslant 1\}$; (3) h_2 è di classe C^∞; (4) usando un argomento di funzione implicita ([Di 69] teoremi 10.2.1 e 10.2.2) si conclude che h_2^{-1} è di classe C^∞.

□

Proposizione 1.24. *Esiste un diffeomorfismo di classe C^∞ h da H su $H \setminus \{O\}$,*

$$h\colon H \twoheadrightarrow H \setminus \{O\},$$

tale che $h(x) = x$ su $\big\{x \in H : \|x\| \geqslant 1/2\big\}$.

Dimostrazione. Si faccia riferimento al capitolo VI.2 del testo [Be 75] di Bessaga-Pełczyński. □

Proposizione 1.25. *Sia x_0 in S. Allora esiste un diffeomorfismo di classe C^∞ g da S su $S\setminus\{x_0\}$:*

$$g\colon S \twoheadrightarrow S \setminus \{x_0\}.$$

Dimostrazione. Sia

$$g(x) := \begin{cases} x & \text{se } \langle x, x_0\rangle < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \varphi_{x_0}^{-1} \circ h \circ \varphi_{x_0}(x) & \text{se } \langle x, x_0\rangle \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

in cui h è definito nella proposizione 1.24. Ovviamente g è iniettivo e $g(S) = S \setminus \{x_0\}$. Si verifica facilmente che, nelle notazioni introdotte nell'osservazione 1.21,

- se $A \ni y \neq x_0$, allora $\varphi_y \circ g \circ \varphi_y^{-1}$ è l'identità su S;
- $\varphi_{x_0}^{-1} \circ g \circ \varphi_{x_0}$ e $\varphi_{x_0}^{-1} \circ g^{-1} \circ \varphi_{x_0}$ sono di classe C^∞.

Dunque g è un diffeomorfismo di classe C^∞. □

Siamo pronti per la dimostrazione del teorema di Bessaga:

Dimostrazione del Teorema 1.22 di Bessaga. Sia P l'iperpiano tangente a S nel punto $-x_0$, i.e.,

$$P = \{x \in H \ : \ \langle x + x_0, x_0 \rangle = 0\}.$$

Denotiamo con $\pi\colon S \setminus \{x_0\} \twoheadrightarrow P$ la proiezione stereografica dal punto x_0 sull'iperpiano P. Si verifica facilmente che P è un diffeomorfismo di classe C^∞ tra $S \setminus \{x_0\}$ e P. Quindi la mappa $f_1(x) = \pi\big(g(x)+x_0\big)$ è un diffeomorfismo di classe C^∞ da S su H_{x_0}. Per completare la dimostrazione è sufficiente ricordare che ogni spazio di Hilbert di dimensione infinita è isomorfo ad ognuno dei suoi sottospazi di codimensione uno (cfr. osservazione G.26). □

Corollario 1.26. *Esiste un diffeomorfismo di classe C^∞, u da H su H, $u\colon H \twoheadrightarrow H$, tale che, nelle notazioni introdotte nell'osservazione 1.21, $u(S) = H_{x_0} := \{x \in H \ : \ \langle x, x_0 \rangle = 0\}$.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\twoheadrightarrow (0,\infty), \\ f_1\colon S &\twoheadrightarrow H_{x_0}, \\ h\colon H &\twoheadrightarrow H \setminus \{O\}, \\ w_1\colon H &\twoheadrightarrow H_{x_0} \times (-\infty,\infty), \\ w_2\colon S \times (0,\infty) &\twoheadrightarrow H \setminus \{O\}. \end{aligned}$$

Posto $u := h^{-1} \circ w_2 \circ (f_1^{-1} \times \exp) \circ w_1$, si verifica facilmente che u è un diffeomorfismo di classe C^∞ soddisfacente la richiesta del corollario. □

Osservazione 1.27. Un corollario ovvio del teorema di Bessaga è la contraibilità della sfera hilbertiana in dimensione infinita. Infatti, per il teorema di Bessaga (basterebbe il sopra citato teorema di Klee) la sfera Hilbertiana S è omeomorfa all'intero spazio di Hilbert H, d'altra parte ogni spazio vettoriale topologico reale è contraibile (nell'origine) in modo ovvio e quindi S è contraibile.

In particolare abbiamo tre dimostrazioni della contraibilità della sfera unitaria: questa che segue subito dal teorema di Bessaga, quella di cui nel corollario 1.16, e quella più elementare –ma in un certo senso meno elegante– fornita dal teorema 1.11.

Osservazione 1.28. Uno spunto per una possibile nuova dimostrazione del teorema di Bessaga potrebbe essere il seguente. Supponiamo di disporre di una funzione reale liscia f definita sulla sfera unitaria S di H, spazio di Hilbert reale di dimensione infinita e separabile, la quale abbia le seguenti proprietà:

(i) $f(x) > 0$ per ogni x diverso da x_0 e $f(x_0) = 0$;

(ii) f verifica la condizione di Palais-Smale;

(iii) l'unico punto critico di f è x_0 (dunque è un punto di minimo).

Se si disponesse di una tale funzione f seguirebbe che S è diffeomorfa C^∞ ad H: un diffeomorfismo essendo prodotto facilmente mediante il flusso gradiente di f (equivalentemente, nelle ipotesi dette, si avrebbe che la varietà instabile di x_0 coincide con tutta la varietà S, ma una varietà instabile di un flusso gradiente è sempre diffeomorfa al suo tangente, che qui è H).

Sicuramente, a posteriori, una siffatta funzione su S deve esistere, poiché una analoga esiste su H (per esempio la norma al quadrato) e dunque la si trasporta su S tramite il diffeomorfismo tra S ed H (con qualche accorgimento per quel che riguarda la condizione di Palais-Smale). Inoltre una tale f deve essere illimitata (altrimenti ammetterebbe anche un punto di massimo in virtù della condizione di P-S).

L'articolo di Palais [Pa 66], ma soprattutto quelli di Kuiper-Burghelea [Ku-Bu 69] e di Moulis [Mo 68] e [Mo 70] costituiscono delle utili fondamenta per queste idee.

Osservazione 1.29. La proposizione 1.24 resta valida quando $(H, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato di dimensione infinita, a condizione che $\|\cdot\|$ sia di classe C^∞ su $H \setminus \{O\}$. In particolare, la proposizione 1.24 si può applicare agli spazi ℓ^{2p}, per ogni $p \in \mathbb{N}^+$.

1.5.2 Alcune estensioni nella generalità Banach

Nel seguito assumeremo che E sia uno spazio di Banach separabile di dimensione infinita che ammetta partizioni dell'unità di classe C^r ($r \geq 1$). Non richiederemo inoltre che E ammetta una base. Indicheremo con $C_b^r(E)$ lo spazio delle funzioni $\psi\colon E \to \mathbb{R}$ di classe C^r aventi supporto limitato.

Lemma 1.30. *Esiste una sottovarietà di classe C^r chiusa e limitata T di E di codimensione uno tale che ogni semiretta in E con origine in O interseca T esattamente in un punto.*

Dimostrazione. Consideriamo l'operatore

$$s\colon \psi \in C_b(E) \longmapsto \big(s(\psi)\colon E \setminus \{O\} \to \mathbb{R}\big)$$

definito da

$$[s(\psi)](e) :\overset{\text{def}}{=} \int_1^{+\infty} \psi(te)\, dt. \tag{1.5.3}$$

Si osservi che, siccome $s(\psi)$ è definito su $E \setminus \{O\}$, dunque in (1.5.3) è $e \neq O$, l'integrale a secondo membro è l'integrale di una funzione reale nella variabile reale t (si è ristretto la funzione ψ alla retta $\mathrm{Span}\{e\}$) la quale per ipotesi ha supporto limitato, quindi, effettivamente, l'integrale esteso a $[1, +\infty[$ di detta funzione è un numero reale finito.

Sia $\varphi \in C_b^r(E, [0,1])$ tale che φ sia identicamente uguale ad 1 in un intorno dell'origine. Allora la restrizione di $s(\varphi)$ ad ogni semiretta aperta di $E \setminus \{O\}$ uscente dall'origine è una funzione strettamente decrescente. Dunque $s^2(\varphi) := s\big(s(\varphi)\big)$ è priva di valori critici degeneri su ognuna di queste semirette, ad eccezione dell'origine, o, ciò che è lo stesso, tutti i punti di $(0, \infty)$ sono valori regolari per la restrizione di $s^2\varphi$ ad ogni semiretta aperta uscente dall'origine.

Consideriamo quindi $y \in (0, \infty)$, per esempio $y = 1/2$, e poniamo $T := (s^2\varphi)^{-1}(1/2)$. Allora T soddisfa le proprietà richieste in virtù del teorema C.27 e della proposizione C.29.

□

La seguente proposizione generalizza l'analoga proposizione 1.24 agli spazi di Banach:

Proposizione 1.31. *Esiste un diffeomorfismo di classe C^r, $h\colon (E \setminus \{O\}) \to E$, avente supporto limitato.*

Teorema 1.32. *Esiste una sfera S in E ed una involuzione di classe C^r i di E che applica l'esterno di S nella parte interna di S.*

Il teorema 1.32 segue dalla proposizione 1.31, la cui dimostrazione si trova in [Be 75]. Precisamente, nelle notazioni del lemma 1.30, per ottenere il teorema 1.32 basterà scegliere una sfera S centrata nell'origine di E il cui disco contenga T. La riflessione rispetto a T definisce quindi una involuzione di classe C^r j di $E \setminus \{O\}$. Basterà dunque definire $i\colon E \to E$ ponendo $i := h \circ j \circ h^{-1}$.

1.6 Il gruppo generale lineare di uno spazio di Hilbert

Se E uno spazio di Banach, denoteremo con $\mathrm{End}(E)$ lo spazio vettoriale degli endomorfismi lineari e continui di E con la topologia indotta dalla norma operatoriale. Il gruppo *generale lineare* di E, $\mathrm{GL}(E)$ è il sottospazio topologico di $\mathrm{End}(E)$ i cui punti sono gli operatori che ammettono inverso in $\mathrm{End}(E)$:

$$\mathrm{GL} := \mathrm{GL}(E) \overset{\text{def}}{=} \big\{g \in \mathrm{End}(E) \,:\, \exists\, g^{-1} \in \mathrm{End}(E)\big\}.$$

Un elemento h di GL è detto *ortogonale* (o unitario) se, per ogni x in E, $\|h(x)\| = \|x\|$:

$$O = O(E) = \big\{g \in \mathrm{GL} \,:\, (\forall\, x \in E) \quad \|g(x)\| = \|x\|\big\}.$$

Gli elementi unitari di GL costituiscono un sottogruppo, il gruppo delle unità di E. GL è un sottoinsieme aperto di $\mathrm{End}(E)$. Supponiamo che B appartenga a $\mathrm{End}(E)$ e che $\|I - B\| < 1$, dunque la serie

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} (I-B)^n$$

è convergente. Poiché $SB = BS = \big[I - (I-B)\big]S = \sum_{n=0}^{\infty}(I-B)^n - \sum_{n=1}^{\infty}(I-B)^n = I$, segue che $\{B \,:\, \|B - I\| < 1\} \subset \mathrm{GL}(E)$. Sia ora A in $\mathrm{GL}(E)$ e supponiamo che $\|A - B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Allora $\|I - BA^{-1}\| = \|(A-B)A^{-1}\| < 1$. Quindi BA^{-1} ammette inversa in $\mathrm{End}(E)$ data dalla serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(I - BA^{-1})^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\big[(A-B)A^{-1}\big]^n.$$

Segue che B ammette inversa in $\mathrm{End}(E)$ data da

$$B^{-1} = A^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\big[(A-B)A^{-1}\big]^n. \tag{1.6.1}$$

La formula 1.6.1 mostra che

$$\big\|B^{-1} - A^{-1}\big\| = \Big\|A^{-1}\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\big[(A-B)A^{-1}\big]^n\Big\| \le \dfrac{\|A^{-1}\|^2\|A-B\|}{1 - \|A^{-1}\|\|A-B\|}.$$

Si conclude quindi che GL è un sottoinsieme aperto di $\mathrm{End}(E)$, infatti se GL contiene un operatore A allora contiene la sfera di operatori $\{B \,:\, \|B - A\| < \|A^{-1}\|^{-1}\}$.

Inoltre l'operatore di inversione $\mathcal{I}\colon B \in \mathrm{GL} \longmapsto B^{-1} \in \mathrm{GL}$ è un omeomorfismo di GL su GL rispetto alla topologia indotta dalla norma operatoriale. Segue che GL è al tempo stesso un gruppo topologico e una varietà differenziabile di dimensione infinita modellata sullo spazio di Banach $\mathrm{End}(E)$. Verifichiamo in dettaglio che l'operatore di inversione è una mappa differenziabile su GL.

Se A in $\mathrm{End}(E)$ è fissato, la traslazione sinistra $L_A\colon \mathrm{End}(E) \to \mathrm{End}(E)$ e la traslazione destra $R_A\colon \mathrm{End}(E) \to \mathrm{End}(E)$ rispettivamente definite da $L_A(B) = AB$ e $R_A(B) = BA$ sono trasformazioni lineari, e quindi applicazioni differenziabili sul sottoinsieme aperto GL di $\mathrm{End}(E)$. Formalmente:

$$\begin{aligned} d\mathcal{I}_A(U) &= \lim_{t\to 0}\frac{(A+tU)^{-1} - A^{-1}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{A^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\big[(A-(A+tU))A^{-1}\big]^n - A^{-1}}{t} \\ &= -A^{-1}\lim_{t\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}(-t)^{n-1}(UA^{-1})^n = -A^{-1}UA^{-1}, \end{aligned}$$

dunque $d\mathcal{I}_A = -L_{A^{-1}} \circ R_{A^{-1}}$ e le operazioni di gruppo sono effettivamente applicazioni differenziabili su GL.

Osservazione 1.33. Lo spazio tangente alla varietà GL nell'identità I, $T_I\mathrm{GL}$, si identifica in modo naturale con lo spazio di Banach $\mathrm{End}(E)$. Inoltre è ben definita la mappa esponenziale

$$\exp\colon \mathrm{End}(E) \longrightarrow \mathrm{GL}(E) \qquad \exp(A) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

$\big($la serie converge assolutamente per ogni A in $\mathrm{End}(E)\big)$. Se A e B sono elementi di $\mathrm{End}(E)$ tali che

$$[A, B] := AB - BA = O,$$

allora si verifica facilmente che

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B).$$

In particolare $\exp(-A) = \big(\exp(A)\big)^{-1}$, dunque $\exp\big(\mathrm{End}(E)\big) \subset \mathrm{GL}$. La mappa esponenziale fornisce un omeomorfismo di un intorno di O in $\mathrm{End}(E)$ con un intorno di I in GL, per cui è ben definito per ogni A in GL tale che $\|A - I\| < 1$

$$\log(A) := -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(I - A)^n}{n}.$$

Lo spazio tangente all'elemento neutro, $T_I\mathrm{GL} = \mathrm{End}(E)$, considerato con la sua struttura di spazio vettoriale e con l'operazione $[\cdot,\cdot]\colon T_I\mathrm{GL} \times T_I\mathrm{GL} \to T_I\mathrm{GL}$, è un'algebra di Banach di Lie.

Sia H uno spazio di Hilbert reale ed $\mathcal{S} \subset \mathrm{End}(H)$ la sottoalgebra di Lie degli operatori antisimmetrici (i.e. tali che $S^* = -S$). Allora $(\exp S)^* = \exp(S^*) = \exp(-S) = (\exp(S))^{-1}$ e quindi $\exp(\mathcal{S})$ è un insieme di operatori ortogonali. Viceversa, se $A = \exp T$ è ortogonale, allora T deve essere antisimmetrico. Dunque possiamo considerare $\mathcal{S}$ come l'algebra (di Banach) di Lie del gruppo di Lie infinito dimensionale O delle trasformazioni ortogonali su H.

Osservazione 1.34. Probabilmente la differenza più ovvia tra l'algebra $\mathrm{End}(H)$ e la sua analoga in dimensione finita è l'esistenza nella prima di un ideale bilatero non banale. L'insieme $\mathcal{F}$ di tutti gli operatori aventi rango di dimensione finita, per esempio, è un tale ideale. Inoltre, esso è contenuto in ogni ideale bilatero. La sua chiusura $\mathcal{C}$ rispetto alla metrica indotta dalla norma (l'insieme degli operatori compatti) è perciò un ideale bilatero chiuso minimale. Questi fatti sono provati in [Ri 55].

Se H è separabile, allora $\mathcal{C}$ è anche un ideale massimale [Cal 41], e perciò è l'unico ideale bilatero chiuso in $\mathrm{End}(H)$.

Proposizione 1.35. *L'insieme $\mathcal{K}$ di tutti gli elementi di $\mathrm{GL}(H)$ della forma $I + K$, in cui K è un operatore compatto, è un sottogruppo chiuso di* GL.

Dimostrazione. Se A, B sono operatori compatti, allora $A+B$ e AB sono ancora operatori compatti. Segue che, se $I + A$ e $I + B$ sono elementi di $\mathcal{K}$ allora $(I + A)(I + B) = I + (A + B + AB)$ è ancora un elemento di $\mathcal{K}$. Inoltre, se $(I + K)^{-1} = I + T$ allora $(I + K)(I + T) = I + K + T + KT = I$, cosicché $T = -(K + KT)$ è un operatore compatto ogni volta che K lo è. Dunque $\mathcal{K}$ è un gruppo. Ora, siccome $\mathcal{C}$ è un sottospazio chiuso di $\mathrm{End}(H)$, tale è anche la classe laterale $I + \mathcal{C}$. Dunque $\mathcal{K} = \mathrm{GL}(H) \cap (I + \mathcal{C})$ è un chiuso nella topologia relativa su $\mathrm{GL}(H)$. □

Proposizione 1.36. *L'esponenziale applica $\mathcal{C}$ in $\mathcal{K}$, e fa corrispondere omeomorficamente a un intorno di O in $\mathcal{C}$ un intorno di I in $\mathcal{K}$.*

Dimostrazione. Se A è compatto, $\exp(A) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$, dunque $\exp(A) - I$ è il limite di una serie convergente di operatori compatti, quindi è esso stesso compatto. Segue che $\exp(\mathcal{C}) \subset \mathcal{K}$.

Inoltre, in un intorno di I, abbiamo una mappa inversa definita da

$$\log(I + A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} A^n,$$

dunque si vede che se A è compatto tale deve essere anche $\log(I + A)$. □

È noto dall'analisi funzionale che se H è uno spazio di Hilbert reale di dimensione infinita, allora i gruppi O e GL sono connessi (Putnam e Wintner provarono questo risultato con gli strumenti forniti dalle risoluzioni spettrali in [PW 51] e [PW 52]).

Kuiper [Ku 65] ha dimostrato di più, precisamente egli ha provato che GL e quindi O ha lo stesso tipo di omotopia di un singolo punto, è cioè uno spazio contraibile.

Teorema 1.37 (Kuiper). *Il gruppo generale lineare di uno spazio di Hilbert reale di dimensione infinita H è contraibile rispetto alla topologia indotta dalla norma di H.*

Arlt [Arl 66] ha dimostrato che anche $\mathrm{GL}(c_0)$ è contraibile e Neubauer [Neu 67] estese questo risultato ad una più ampia classe di spazi di successioni. Tra gli esempi in negativo citiamo quello fornito da Douady [Dou 65] il quale provò che $\mathrm{GL}(c_0 \times \ell^2)$ non è neppure connesso. Altri interessanti esempi e controesempi si trovano in [Neu 67].

Forniremo adesso la prova di un teorema enunciato da Jänich in [Jan 65], che costituisce un ingrediente fondamentale della più tecnica dimostrazione del teorema di Kuiper.

Teorema 1.38. *Sia H uno spazio di Hilbert separabile e H_0, H_1 sottospazi chiusi di H di dimensione infinita tali che $H = H_0 + H_1$. Supponiamo inoltre che H_0 e H_1 siano mutuamente ortogonali, e cioè che per ogni x in H_0 e y in H_1 risulti $\langle x, y\rangle = 0$. Sia V il sottospazio di $\mathrm{GL}(H)$ costituito dagli operatori invertibili la cui restrizione ad H_0 sia l'identità di H_0 e che applicano H_1 su H_1:*

$$V := \big\{ g \in \mathrm{GL}(H) \ : \ g|_{H_0} = \mathrm{id}_{H_0} \in \mathrm{GL}(H_0),\ g(H_1) = H_1 \big\}.$$

Allora V è contraibile nell'identità di H, $\mathrm{id}_H \colon H \to H$, precisamente (cfr. definizione 1.10) l'inclusione di V in $\mathrm{GL}(H)$, $\iota_V \colon V \hookrightarrow \mathrm{GL}(H)$, è omotopa alla mappa costante che applica tutti gli elementi di V nell'identità di H, $c_{\mathrm{id}_H} \colon V \longrightarrow \{\mathrm{id}_H\} \subset V$.

Dimostrazione. Sia

$$H_0 = H_2 + H_3 + \cdots$$

una decomposizione di H_0 in una somma di infiniti sottospazi di dimensione infinita mutuamente ortogonali. Per esempio, se $(e_i)_{i\geq 1}$ è una base ortonormale per H_0, indichiamo con S_n $(n \geq 2)$ il sottoinsieme di $\{e_i\}_{i\geq 1}$ costituito dai vettori e_i tali che la decomposizione in fattori primi di i consta esattamente di $n-1$ fattori primi distinti. Per convenzione poniamo $e_1 \in S_2$ ed indichiamo con H_n il sottospazio chiuso di H_0 generato dai vettori e_j appartenenti a S_n. In particolare otteniamo una decomposizione ortogonale di H come $H = H_1 + H_0 = H_1 + H_2 + H_3 + \cdots$.

Data una applicazione lineare limitata $f \colon H \to H$, allora chiaramente f è determinata dal valore che essa assume su ciascuno degli H_i. Sia $\pi_n \colon H \to H_n$ il proiettore ortogonale su H_n, i.e., la mappa che ignora le componenti dei vettori della base che non appartengono ad H_n. Allora f è determinata dalla matrice infinita di elementi

$$f_{ij} := \pi_j\big(f|_{H_i}\big),$$

in cui ciascuna componente f_{ij} è essa stessa una applicazione lineare da H_i a H_j.

In particolare, se g è un elemento di V allora

$$\begin{cases} g_{ij} = 0 & \text{se } i \neq j, \\ g_{ii} = 1 & \text{se } i > 1, \\ g_1 := g_{11} = g|_{H_1} \end{cases}$$

i.e., g è determinata dai suoi termini diagonali (gli altri essendo tutti nulli):

$$g = [g_1, 1, 1, 1, 1, \ldots].$$

Si osservi che l'elemento h di GL descritto da

$$\begin{cases} h_{ij} = 0 & \text{se } i \neq j, \\ h_{ii} = g_1^{-1} g_1 & \text{se } i > 1 \\ h_{11} = g_1 \end{cases} \qquad \text{i.e.,} \qquad h = \big[g_1, g_1^{-1}g_1, 1, g_1^{-1}g_1, 1, \ldots\big]$$

coincide evidentemente con g.

Esibiremo nel seguito due omotopie che deformeranno successivamente attraverso elementi di GL ogni elemento $g \in V$ in $c_{\mathrm{id}_H}(g) = \mathrm{id}_H \in \mathrm{GL}$. Precisamente, definiremo una prima omotopia da $g = h$ a h', in cui h' è data dalla matrice infinita

$$\begin{cases} h'_{ij} = 0 & \text{se } i \neq j, \\ h'_{2i,2i} = g_1^{-1} & \text{se } i \geq 1, \\ h'_{2i+1,2i+1} = g_1 & \text{se } i \geq 1, \\ h'_{11} = g_1 \end{cases} \qquad \text{i.e.,} \qquad h' = [g_1, g_1^{-1}, g_1, g_1^{-1}, g_1, \ldots]$$

e quindi definiremo una seconda omotopia da h' a h'', essendo

$$\begin{cases} h''_{ij} = 0 & \text{se } i \neq j, \\ h''_{2i-1,2i-1} = g_1 g_1^{-1} & \text{se } i \geq 1, \\ h''_{2i,2i} = 1 & \text{se } i \geq 1, \end{cases} \qquad \text{i.e.,} \qquad h'' = [g_1 g_1^{-1}, 1, g_1 g_1^{-1}, 1, g_1 g_1^{-1}, \ldots] = [1, 1, 1, 1, 1, \ldots].$$

Una omotopia da h a h' è la seguente, applicata ad ogni coppia di elementi consecutivi della diagonale di h (gli altri essendo tutti zero) a partire dal secondo elemento:

$$\theta \in [0, \pi/2] \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.6.2}$$

La mappa 1.6.2 realizza una omotopia tra $[g_1^{-1} g_1, 1]$ $(\theta = 0)$ e $[g_1^{-1}, g_1]$ $(\theta = \pi/2)$. Infatti, quando θ varia in $[0, \pi/2]$,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

va da $\left(\begin{smallmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ a $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ g_1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Così, quando θ va da 0 a $\pi/2$,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

va da $\left(\begin{smallmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ a $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_1 \end{smallmatrix}\right)$. Si deduce quindi che per θ in $[0, \pi/2]$, (1.6.2) realizza una omotopia tra $\left(\begin{smallmatrix} g_1^{-1} g_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} g_1^{-1} & 0 \\ 0 & g_1 \end{smallmatrix}\right)$.

È facile dimostrare che gli operatori lineari che deformano h in h' al variare di θ in $]0, \pi/2[$ sono tutti continui. Inoltre è standard riparametrizzare questa trasformazione, parametrizzata da 0 a $\pi/2$, in una usuale omotopia parametrizzata tra 0 e 1.
Allo stesso modo si determina una omotopia da h' a h'', stavolta applicata ad ogni coppia di elementi consecutivi della diagonale di h', a partire dal primo:

$$\theta \in [0, \pi/2] \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta - 1 \\ 1 - \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & 1 - \sin\theta \\ \sin\theta - 1 & \cos\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.6.3}$$

La mappa 1.6.3 realizza una omotopia tra $[g_1, g_1^{-1}]$ $(\theta = 0)$ e $[1, 1]$ $(\theta = \pi/2)$. Come prima, si dimostra facilmente che gli operatori lineari che deformano h' in h'' al variare di θ in $]0, \pi/2[$ sono tutti continui; inoltre si può riparametrizzare questa trasformazione in una usuale omotopia parametrizzata tra 0 e 1.

Riassumendo, abbiamo deformato successivamente

$$g = [g_1, 1, 1, 1, 1, \ldots] = h = [g_1, g_1^{-1} g_1, 1, g_1^{-1} g_1, 1, \ldots]$$

in

$$h' = [g_1, g_1^{-1}, g_1, g_1^{-1}, g_1, \ldots]$$

con una prima omotopia, e quindi abbiamo deformato

$$h' = \left[g_1, g_1^{-1}, g_1, g_1^{-1}, g_1, \ldots\right]$$

nell'identità

$$h'' = \left[g_1 g_1^{-1}, 1, g_1 g_1^{-1}, 1, g_1 g_1^{-1}, \ldots\right] = [1, 1, 1, 1, 1, \ldots]$$

con una seconda omotopia. Segue che ι_V e c_{id_H} sono omotope, come desiderato.

□

Come già detto, il teorema 1.37 di Kuiper è una conseguenza del teorema 1.38. Viceversa, si osservi che il teorema 1.38 è interamente riassorbito dal più generale teorema di Kuiper: infatti da quest'ultimo segue in particolare che ogni mappa $f\colon V \to \mathrm{GL}$ è omotopa a una mappa costante.

Può essere interessante consultare l'appendice 3 dell'articolo [AS 03] di Atiyah-Segal per l'esposizione di una possibile generalizzazione del teorema di Kuiper.

Capitolo 2

Embedding aperti di varietà di dimensione infinita

Nel seguito indicheremo con H uno spazio di Hilbert reale, separabile, di dimensione infinita, inoltre denoteremo con M una varietà modellata su H siffatto e assumeremo sempre che essa sia connessa, separabile, di Hausdorff, paracompatta e differenziabile infinite volte, a meno che non sia altrimenti specificato. Tutte le varietà e le applicazioni saranno sempre assunte di classe C^∞. Precisamente, quando nel seguito ci riferiremo ad uno spazio di Hilbert H oppure ad una varietà M senza ulteriori specifiche, allora H ed M dovranno essere sempre intesi come sopra.

Scopo di questo capitolo è principalmente quello di fornire una dimostrazione chiara e dettagliata del seguente enunciato: *Esiste un embedding aperto di M in H.*

2.1 Introduzione

Definizione 2.1. Sia H uno spazio di Hilbert. Una *bandiera* in H è una successione di sottospazi lineari di dimensione finita di H

$$\{O\} = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_n \subset H_{n+1} \subset \cdots \subset H,$$

tale che (i) $\dim H_n = n$ e (ii) la riunione $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ è densa in H.

Osservazione 2.2. Chiaramente H e più in generale un qualsiasi spazio di Banach dotato di una base di Schauder ammette una bandiera nel senso della definizione 2.1. Fissata una base Hilbertiana $(e_i)_{i\geq 1}$ di H, nel seguito indicheremo con H_n il sottospazio generato dai primi n vettori della base. Ovviamente H_n è un sottospazio *chiuso* di H, trattandosi infatti di un sottospazio di dimensione finita. Denoteremo con H^n la chiusura in H del sottospazio generato da $\{e_i\}_{i>n}$:

$$H^n = \overline{\mathrm{Span}}\left\{e_{n+j} : j \in \mathbb{N}^+\right\}.$$

Si ricordi che uno spazio di Hilbert di dimensione infinita è *separabile* se e solo se è linearmente isometrico a ℓ^2 (teorema G.28, appendice G). Dunque, a meno che non sia altrimenti specificato supporremo per fissare le idee che H sia ℓ^2 e che $(e_i)_{i\geq 1}$ sia la base canonica.

Osservazione 2.3. Nelle notazioni introdotte, per ogni n in $\mathbb{N}$, chiaramente $H = H_n \oplus H_n^\perp$. Inoltre evidentemente $H = H_n \oplus H^n$ e $H^n = H_n^\perp$.

Lemma 2.4. *Gli spazi H/H_n e H^n sono toplinear-isomorfi.*

Dimostrazione. Sia $\pi^n\colon H \to H^n$ il proiettore canonico, ossia la mappa avente come effetto la "cancellazione" delle prime n coordinate. Evidentemente π^n è lineare, suriettivo e continuo. Inoltre il nucleo di π^n è chiaramente H_n, dunque gli spazi H/H_n ed H^n sono vettorialmente isomorfi. L'isomorfismo indotto $H/H_n \to H^n$ è ovviamente continuo, la continuità dell'isomorfismo inverso segue dal fatto che π^n è una mappa aperta. □

Osservazione 2.5. Come caso particolare della definizione C.24, diremo che $f\colon M \to H$ è trasversa al sottospazio H_n di H se per ogni p in M con $f(p) \in H_n$ risulta $df_p(T_pM) + H_n = H$.

Il seguente risultato è un caso particolare della proposizione C.25:

Proposizione 2.6. *Sia m in $\mathbb{N}$ fissato e $f\colon M \to H$ una applicazione trasversa a H_m. Per ogni x in M tale che $f(x) \in H_m$, il prodotto di composizione $\pi^m \circ df_x = d(\pi^m \circ f)_x$ è surgettivo ed il suo nucleo è complementato.*

$$T_xM \xrightarrow{df_x} H \cong H_m \times H^m \xrightarrow{\pi^m} H^m \cong H/H_m$$

Lemma 2.7. *Sia F un sottospazio chiuso di H. Allora, per ogni n in $\mathbb{N}$, $F(n) := H_n + F$ è un sottospazio chiuso di H.*

Dimostrazione. Per $n = 1$ proviamo che $F(1) = F + \text{Span}\{e_1\}$ è chiuso in H. Siccome $F \subset H$ è un chiuso, H/F è uno spazio normato. Consideriamo il proiettore $\pi\colon H \to H/F$, allora

$$\text{Span}\{\pi(e_1)\} \subset H/F$$

è un chiuso poiché si tratta di uno spazio vettoriale di dimensione finita di uno spazio normato. Inoltre $\pi\colon H \to H/F$ è continua, dunque la preimmagine $\pi^{-1}\big(\text{Span}\{\pi(e_1)\}\big) = \text{Span}\{e_1\} + F$ è chiusa in H.

Un ovvio argomento di induzione su n permette di concludere che $F(n) = H_n + F$ è un sottospazio chiuso di H, per ogni n in $\mathbb{N}$. □

Lemma 2.8. *Sia F un sottospazio chiuso di codimensione finita di H. Allora esiste N in $\mathbb{N}$ tale che $H = H_N + F$, in altri termini F è trasverso a H_N per qualche N.*

Dimostrazione. Posto $F(n) = H_n + F$ consideriamo il sottospazio $G(n) := F(n)/F \subset H/F$. Esiste N in $\mathbb{N}$ tale che, per ogni i, $G(N+i) = G(N)$ ([1]). Ciò significa che, per ogni i, $F(N+i) = F(N)$, quindi $(\forall\, i)\ e_i \in F(N)$ (infatti $\text{Span}\{e_j\}_{j=1}^{N+i} = H_{N+i} \subset H_{N+i} + F = F(N+i) = F(N)$), da cui segue che $F(N)$ è denso in H, perché contiene la riunione degli H_n. Infine, siccome per il lemma 2.7 $F(N) \subset H$ è un sottoinsieme chiuso, si conclude che $F(N) = H$. □

Siccome per ogni n in $\mathbb{N}$ il proiettore canonico π^n ha come effetto la cancellazione delle prime n coordinate, π^n converge fortemente all'operatore nullo, scritto

$$\pi^n \rightrightarrows O \in \text{End}(H),$$

ossia, per ogni x in H, $\pi^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ricordiamo inoltre il seguente importante teorema:

Teorema 2.9 (delle proiezioni). *Sia H uno spazio di Hilbert qualsiasi ed F un sottospazio chiuso di H. Allora esiste un'unica coppia di operatori $P, Q\colon H \to H$ tali che:*

(i) $\text{rk}\,(P) = F$, $\text{rk}\,(Q) = F^\perp$;

(ii) *$x = Px + Qx$ per ogni $x \in H$;*

(iii) *$x = Px$ per ogni $x \in F$, $x = Qx$ per ogni $x \in F^\perp$;*

(iv) *P e Q sono operatori lineari e continui;*

[1] Infatti, per ogni n in $\mathbb{N}$, (i) $F(n) \subset F(n+1)$ dunque $(G(n))_n$ è una successione ascendente di sottospazi di H/F, (ii) lo spazio H/F ha dimensione finita perché, per ipotesi, F ha codimensione finita. Segue che la successione $(G(n))_n$ si stabilizza.

(v) *se* $F \neq \{O\}$ *allora* $\|P\|_{\mathrm{End}(H)} = 1$*, e se* $F \neq H$ *allora* $\|Q\|_{\mathrm{End}(H)} = 1$*.*

Gli operatori P*,* Q *sono detti proiettori ortogonali su* F *e su* $F^{\perp}$ *rispettivamente.*

Osservazione 2.10. In particolare, consideriamo il caso in cui nel teorema 2.9 sia $F := H_n$, $P := \pi_n$ e $Q := \pi^n$. I proiettori ortogonali $\pi_n \colon H \to H_n$ e $\pi^n \colon H \to H^n$ soddisfano la relazione $\pi_n + \pi^n = I$. Inoltre, per ogni n in $\mathbb{N}^+$, per il teorema delle proiezioni risulta $\|\pi_n\| = 1 = \|\pi^n\|$.

2.1.1 La categoria *Layer*

Definizione 2.11. Sia M una varietà ed H uno spazio vettoriale. Una applicazione $\alpha \colon M \to H$ sarà detta *localmente di rango finito* se ogni punto p in M ammette un intorno U_p per cui $\alpha(U_p)$ sia contenuto in un sottospazio di dimensione finita di H.

Osservazione 2.12. Se $\alpha \colon M \to H$ di classe C^1 è localmente di rango finito allora la funzione che ad ogni punto p in M associa il numero intero (positivo) $\dim \operatorname{rk} d\alpha_p$ è localmente limitata.

Definizione 2.13. Siano H uno spazio di Hilbert e $U \subset H$ un sottoinsieme aperto. Indicata con I in $\mathrm{End}(H)$ l'applicazione identica, una mappa $G \colon U \subset H \to H$ è detta *di tipo* $\mathcal{L}(I)$ se è una perturbazione di rango localmente finito di I, i.e. se G ammette una decomposizione della forma $G = I + \alpha$ in cui $\alpha \colon U \to H$ è una applicazione localmente di rango finito. Inoltre, diremo che G è *di tipo* $\mathcal{L}_n(I)$ se $\alpha := (G - I)$ assume i propri valori in H_n.

Più in generale, se H_1, H_2 sono spazi di Hilbert e A è un elemento dello spazio $\mathcal{L}(H_1, H_2)$, una applicazione (in generale non lineare) $G \colon U \subset H_1 \to H_2$ sarà detta *di tipo* $\mathcal{L}(A)$ se è una perturbazione di rango localmente finito di A.

Definizione 2.14 (Varietà layer). Sia M una varietà modellata su uno spazio di Hilbert H. Un *atlante layer* su M è un atlante $\{(U_i, \varphi_i)\}_i$ su M tale che, ogni volta che la composizione è definita, il cambiamento di carta $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ è una applicazione di tipo $\mathcal{L}(I)$. Una varietà con un atlante layer sarà detta una *varietà layer* ed in tal caso le relative carte saranno dette *carte layer*.

Data una H-varietà M dimostreremo nel seguito l'esistenza di un particolare atlante layer su M associato ad una mappa $f \colon M \to H$ Fredholm di indice zero. La costruzione di un tale atlante –detto *layer forte*– sarà approntata nella dimostrazione della proposizione 2.44. In particolare, per il seguito possiamo assumere l'esistenza di una struttura layer su M nel senso della definizione 2.14.

Definizione 2.15 (Morfismo layer). Una mappa tra varietà layer M ed N modellate su uno stesso spazio di Hilbert H è detta una *applicazione di tipo* $\mathcal{L}(I)$ se è rappresentata come una applicazione di tipo $\mathcal{L}(I)$ nelle carte layer di M ed N.

Più in generale, una mappa tra varietà layer M ed N sarà detta un *morfismo di tipo* $\mathcal{L}(A)$ o, più semplicemente, un *morfismo layer* se è rappresentata come una $\mathcal{L}(A)$-mappa nelle carte layer di M ed N.

La collezione delle varietà layer e dei morfismi layer costituisce una categoria. Introduciamo altre due definizioni che si riveleranno particolarmente utili nella parte finale di questo capitolo (sezioni 2.6 e 2.7), quando dimostreremo l'annunciato teorema di embedding aperto.

Definizione 2.16. Siano H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita, ed X_1, X_2 spazi topologici. Un morfismo di fibrati $\tau \colon X_1 \times H \to X_2 \times H$ sarà detto un *morfismo di fibrati di tipo* $\mathcal{L}(I)$ (brevemente un $\mathcal{L}(I)$-*morfismo di fibrati*) se (i) τ è della forma

$$(x, v) \longmapsto \big(\tau_0(x), v + \alpha(x)[v]\big),$$

in cui, per ogni x in X_1, $\alpha(x)$ è un elemento di $\mathrm{End}(H)$, ed inoltre (ii) esiste un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ di X_1 ed una collezione $\{F_i\}_{i \in I}$ di sottospazi di H di dimensione finita tale che

$$(\forall\, i \in I)\ \big(\forall\, (x, v) \in U_i \times H\big) \qquad \alpha(x)[v] \in F_i.$$

Definizione 2.17. Un *fibrato layer* su M è il dato di un fibrato vettoriale $\pi\colon X \to M$ modellato su uno spazio di Hilbert H, e di una collezione di banalizzazioni $\{(U_\alpha, \chi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ con U_α aperto in M,

$$\chi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times H,$$

tale che, quando definita, la composizione

$$\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}\colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times H \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times H$$

è un morfismo di fibrati di tipo $\mathcal{L}(I)$.

Introduciamo adesso un'altra importante nozione utile per la prova del teorema di embedding aperto: la nozione di filtrazione.

2.1.2 Filtrazioni

Definizione 2.18 (Filtrazione). *Sia M una varietà modellata su uno spazio di Hilbert separabile H. Una filtrazione di M è una successione crescente (M_n) di sottovarietà chiuse di dimensione finita di M tale che l'unione $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ è densa in M.*

Esempio 2.19. Presentiamo nel seguito alcuni esempi elementari di filtrazioni:

(i) Se $H = \ell^2$, indicata come consueto con $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base ortonormale canonica di ℓ^2 e con H_n lo spazio vettoriale generato dall'insieme $\{e_1, \ldots, e_n\}$, allora $(H_n)_n$ è una bandiera in H, e costituisce una filtrazione di Fredholm.

(ii) Consideriamo $\mathcal{S} = \mathcal{S}_H = \{x \in H : \|x\| = 1\}$ la sfera unitaria di $H = \ell^2$ e, per ogni n in $\mathbb{N}$, sia $\mathcal{S}^n = \mathcal{S} \cap H_{n+1}$ la n-sfera unitaria in H_{n+1}. Allora

$$\mathcal{S}^1 \subset \mathcal{S}^2 \subset \cdots \subset \mathcal{S}^n \subset \cdots \subset \mathcal{S}$$

costituisce una filtrazione.

Per avere un'idea di come si possa costruire una filtrazione in generale, descriviamo brevemente una procedura su cui torneremo nel seguito aggiungendo tutti i dettagli necessari. Sia $(H_n)_n$ una bandiera in H come nell'esempio 2.19 (i) di cui sopra. Scopo della sezione 2.2 sarà la costruzione di una mappa $f\colon M \to H$ Fredholm di indice zero, trasversa ad ognuno dei sottospazi H_n. Definito per ogni n in $\mathbb{N}$ $M_n := f^{-1}(H_n)$, allora, per ogni n, M_n risulterà una sottovarietà di M di dimensione n e $M_n \subset M_{n+1}$. In particolare, la successione $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ risulterà una filtrazione di M e sarà chiamata per ovvie ragioni una *filtrazione di Fredholm*. Scopo delle sezioni 2.2 e 2.3 sarà sostanzialmente quello di descrivere con tutti i dettagli questa procedura.

2.1.3 Spray layer

Le basi della topologia differenziale e della geometria richieste per affrontare al meglio le problematiche riguardanti le costruzioni che verranno esposte nel seguito furono stabilite nei primi anni sessanta del secolo scorso, ed in un certo senso il lavoro di Ambrose, Palais e Singer *Spray* [APS 60] costituisce la pietra angolare di questa teoria. Si rimanda il lettore all'appendice F per le definizioni e le proprietà basilari degli spray oppure al testo di Lang [Lan 01] per una esposizione più dettagliata ed organica. Nel seguito ci proponiamo di raffinare la nozione di spray definendo una classe di spray particolarmente utile per i nostri scopi: gli *spray layer*. In particolare, essi renderanno possibile la costruzione di una filtrazione di Fredholm in cui ogni sottovarietà M_n sia totalmente geodetica, inoltre la mappa esponenziale associata ad uno spray layer nelle carte di un opportuno atlante di M risulterà un morfismo layer. Questa costruzione culminerà nel teorema 2.45.

Sia (V, φ) una carta per M e $\varphi(V) = U$ il corrispondente sottoinsieme aperto del modello di Hilbert H. Indicizzeremo gli oggetti geometrici con "U" per indicare i corrispondenti rappresentati nella carta data. Per esempio, il rappresentate ξ_U di un campo di vettori su U è una applicazione $\xi_U : U \to H$. Similmente, se S è un fissato campo di vettori del second'ordine su M (cfr. definizione F.1), indicheremo con $S_U : U \times H \to H \times H$ la rappresentazione locale di S su TU:

$$S_U(x, v) = \big(v, s_U(x, v)\big).$$

$$\begin{tikzcd} TTM \arrow[r, squiggly, "\text{loc}"] & U \times H \times (H \times H) \\ TM \arrow[r, squiggly, "\text{loc}"] & U \times H \arrow[u, "\mathrm{Id}_{U\times H} \times S_U"'] \end{tikzcd}$$

A tale proposito si ricordi che S_U rappresenta uno spray se e solo se la sua *parte principale* $s_U : U \times H \to H$ è omogenea di grado due rispetto alla seconda variabile (cfr. proposizione F.9). Per questa ragione s_U è detta anche la *parte quadratica* dello spray nella carta assegnata.

Siano S ed $\mathcal{A}$ rispettivamente uno spray ed un atlante layer su M. Consideriamo una carta locale (V, ψ) compatibile con tutte le carte di $\mathcal{A}$. Indicata con (U, φ) una qualsiasi carta di $\mathcal{A}$, poiché (V, ψ) e (U, φ) sono compatibili, identificati per semplicità di notazione U e V con le rispettive immagini in H tramite φ e ψ, in accordo con la definizione 2.14 di varietà layer, esiste un diffeomorfismo h da U su V della forma $h = (I + k)$, in cui k è una mappa localmente di rango finito. Per la formula F.3.8 di cambiamento di variabile per la parte quadratica di uno spray (si consulti la sottosezione F.3.2 in appendice per la sua deduzione esplicita) risulta

$$s_V\big(h(x), h'(x)(v)\big) = h''(x)(v, v) + h'(x) \circ s_U(x, v). \tag{2.1.1}$$

In particolare $h'(x) = I + k'(x)$ e $h''(x) = k''(x)$. Inoltre, posto (y, w) in $V \times H$ con $y = h(x)$ e $w = h'(x)(v)$ $\big($se e solo se $v = (h^{-1})'(y)(w)\big)$, l'equazione 2.1.1 assume la forma

$$\begin{aligned} s_V(y, w) = s_V\big(h(x), h'(x)(v)\big) &= h''(x)(v, v) + h'(x) \circ s_U(x, v) \\ &= k''(x)(v, v) + s_U(x, v) + k'(x) \circ s_U(x, v), \end{aligned}$$

da cui si deduce che, essendo k una mappa localmente di rango finito, se s_U è localmente di rango finito allora tale è anche s_V.

Definizione 2.20 (Spray layer). Sia M una varietà modellata su uno spazio di Hilbert H. Uno spray S su M è detto uno *spray layer* se esiste un atlante layer $\mathcal{A} = \{(U_a, \varphi_a)\}_{a \in A}$ su M tale che, per ogni a in A, indicata con S_a la rappresentazione locale di S nella carta (U_a, φ_a),

$$S_a : (x, v) \in \varphi_a(U_a) \times H \longmapsto \big(v, s_a(x, v)\big) \in H \times H,$$

SL. $s_a : \varphi_a(U_a) \times H \longrightarrow H$ è localmente di rango finito in x

(i.e., per ogni x in $\varphi_a(U_a)$ esiste $x \in \boldsymbol{U_x} \subset \varphi_a(U_a)$ tale che $s_a(U_x \times H) \subset H_n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$).

Proposizione 2.21. *Ogni H-varietà layer M ammette uno spray layer.*

Dimostrazione. Indicato con $\mathcal{A} = \{(U_a, \varphi_a)\}_{a \in A}$ un atlante layer su M, poiché M è supposta paracompatta, senza ledere la generalità, a meno di un raffinamento possiamo supporre che $\{U_a\}_a$ sia un ricoprimento *localmente finito* di M: sia $\{\mu_a\}$ una partizione dell'unità di classe C^∞ subordinata a $\{U_a\}_a$. Nelle notazioni della definizione 2.20, per ogni a in A lo spray banale S_a su $\varphi_a(U_a)$ definito ponendo

$$S_a : (x, v) \in \varphi_a(U_a) \times H \longmapsto S_a(x, v) :\overset{\text{def}}{=} \big(v, O\big) \in H \times H$$

è certamente layer. Incolliamo dunque spray banali siffatti secondo la partizione dell'unità $\{\mu_a\}$ ottenendo così una mappa globale $S : TM \to T(TM)$. La mappa così ottenuta è invero uno *spray*, infatti la collezione di tutti gli spray costituisce un insieme convesso, dunque in ogni punto della varietà la somma che definisce S è uno spray perché combinazione convessa di spray. Più precisamente, S è uno spray *layer*, infatti la somma che definisce S è localmente finita, i.e. nell'intorno di ogni punto di M solo un numero finito di addendi è non nullo, e poiché ciascuno di essi soddisfa la condizione **SL** anche la loro somma soddisfa certamente **SL**. $\square$

Proposizione 2.22. *Se S è uno spray layer su una varietà layer M, la corrispondente mappa esponenziale* $\exp\colon \mathcal{E} \to M$ *è un morfismo layer.*

Dimostrazione. È sufficiente verificare la proposizione localmente su una carta layer. Sia dunque U un sottoinsieme aperto di H. Per come è definita la mappa esponenziale, se (x, v) appartiene al dominio della mappa esponenziale allora $\exp(x, v) = \sigma(1)$, in cui σ è soluzione del problema

$$\begin{cases} \sigma''(t) = s_U\big(\sigma(t), \sigma'(t)\big) \\ \sigma'(0) = v \\ \sigma(0) = x. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Siccome S è uno spray layer, a meno di restringere U si può supporre che $s_U(U \times H)$ sia contenuto in H_n, per qualche n in $\mathbb{N}$. H si decompone quindi nel prodotto $H_n \times H^n$, ed in questa decomposizione si può senz'altro scrivere $\sigma(t) = \big(\sigma_1(t), \sigma_2(t)\big)$. Le equazioni differenziali per σ assumono quindi la forma

$$\begin{cases} \sigma_1''(t) = s_U\big(\sigma(t), \sigma'(t)\big) \\ \sigma_1'(0) = v_1 \\ \sigma_1(0) = x_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_2''(t) = 0 \\ \sigma_2'(0) = v_2 \\ \sigma_2(0) = x_2, \end{cases}$$

in cui $x = (x_1, x_2), v = (v_1, v_2) \in H_n \times H^n$. Dunque $\sigma_2(t) = x_2 + tv_2$, e quindi

$$\begin{aligned} \sigma(t) = \big(\sigma_1(t), \sigma_2(t)\big) = \big(\sigma_1(t), x_2 + tv_2\big) &= (x_1 + tv_1, x_2 + tv_2) + \big(\sigma_1(t) - x_1 - tv_1, O\big) \\ &= \qquad x + tv + \alpha(x_1, v_1, t), \end{aligned}$$

in cui si è posto $\alpha(x_1, v_1, t) := \big(\sigma_1(t) - x_1 - tv_1, O\big) \simeq \sigma_1(t) - x_1 - tv_1 + O = \sigma_1(t) - x_1 - tv_1 \in H_n$. Questo mostra che $\exp(x, v) = x + v + \alpha(x, v, 1)$: dunque α rappresenta exp come una mappa di tipo $\mathcal{L}(A)$ (vedi definizione 2.15), essendo $A\colon H \times H \to H$ l'addizione, e la mappa esponenziale è un morfismo layer. □

2.2 Mappe di Fredholm di indice zero proprie e limitate

Sia M una varietà modellata su uno spazio di Hilbert H e $\tau\colon TM \to M$ la mappa di fibrazione del fibrato tangente ad M. Fissata una struttura Riemanniana su M, consideriamo la mappa esponenziale associata allo spray Riemanniano. Esiste un intorno aperto V della sezione zero in TM sul quale ha senso considerare l'applicazione $G\colon V \subset TM \to M \times M$ definita ponendo

$$G := \tau \times \exp\colon v \longmapsto G(v) \stackrel{\text{def}}{=} \big(\tau v, \exp_{\tau v}(v)\big). \tag{2.2.1}$$

Sarà comodo esprimere questa mappa con diverse notazioni. Se $U \times H$ è una carta che banalizza localmente TM, nella carta i punti del fibrato tangente saranno rappresentati con (x, v), in cui x appartiene a U e v appartiene a $T_xM \cong H$; scriveremo quindi

$$G(x, v) = \big(x, \exp_x(v)\big).$$

Lemma 2.23. *La mappa G è un diffeomorfismo locale sulla sezione nulla, specificatamente, per ogni $x_0 \in M$, indicato con O_{x_0} il vettore nullo dello spazio tangente $T_{x_0}M$, G è un diffeomorfismo locale in (x_0, O_{x_0}).*

Dimostrazione. In una carta locale, il differenziale di G calcolato nel punto (x_0, O_{x_0}) è

$$dG_{(x_0, O_{x_0})} = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ \mathrm{id} & \mathrm{id} \end{pmatrix}, \tag{2.2.2}$$

infatti, indicate con G_1, G_2 le due componenti di G, $G_1(x, v) = x$, $G_2(x, v) = \exp_x(v)$, denotate con h_{ij} le componenti della matrice Jacobiana di G nel punto (x_0, O_{x_0}), risulta $h_{11} = \frac{\partial(x \mapsto x)}{\partial x}(x_0) = \mathrm{id}$;

$h_{12} = \frac{\partial(x \mapsto x)}{\partial v}(x_0) = 0$; $h_{21} = \frac{\partial(x \mapsto \exp_x O_x)}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial(x \mapsto x)}{\partial x}(x_0) = \mathrm{id}$; infine, identificando $T_{O_{x_0}}(T_{x_0}M)$ con $T_{x_0}M$, $h_{22} = \frac{\partial(v \mapsto \exp_{x_0}(v))}{\partial v}(O_{x_0}) = d(\exp_{x_0})_{O_{x_0}} \circ \left(\frac{\partial(v \mapsto v)}{\partial v}(O_{x_0})\right) = \mathrm{id}_{T_{x_0}M} \circ \mathrm{id} = \mathrm{id}$.
Si tratta di un operatore invertibile, ed il lemma segue dal noto teorema della mappa inversa. □

Teorema 2.24. *Sia M una varietà paracompatta di classe C^∞, modellata su uno spazio di Hilbert separabile H. Allora esiste una mappa C^∞ di M in H Fredholm di indice zero.*

Dimostrazione. Fissiamo una struttura Riemanniana su M. Sia $\mathcal{E} \subset TM$ il dominio della mappa esponenziale associata allo spray Riemanniano su M. Per $x \in M$ poniamo $\mathcal{E}_x = \mathcal{E} \cap T_xM$ e $\exp_x = \exp|_{\mathcal{E}_x}$. Sia $G\colon \mathcal{E} \to M \times M$ definita come in (2.2.1):

$$G\colon v \in \mathcal{E} \longmapsto G(v) = \big(x, \exp_x(v)\big) \in M \times M.$$

Se $x \in M$, per il lemma 2.23 esiste un intorno U_x di x e un intorno N_x di (x, O_x) in $\mathcal{E} \cap TU_x$ tale che $G|_{N_x}$ è un diffeomorfismo su $U_x \times U_x$:

$$G|_{N_x}\colon N_x \subset \mathcal{E} \cap TU_x \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow U_x \times U_x \subset M \times M. \tag{2.2.3}$$

A meno di comporre con una traslazione, possiamo supporre che in una carta l'immagine diffeomorfa dell'intorno U_x sia un intorno aperto U' di $O \in H$. Denoteremo con $u' \in U'$ l'immagine di $u \in U_x$ mediante questa carta.

Per il teorema di Kuiper, esiste una mappa $g\colon TM \to M \times H$ che realizza l'isomorfismo tra i due fibrati TM e $M \times H$. Indicata con $\pi_2\colon M \times H \to H$ la proiezione sul secondo fattore, si consideri l'applicazione $h\colon U' \times U' \to H$ definita ponendo

$$h\colon (u', v') \in U' \times U' \longmapsto h(u', v') \stackrel{\text{def}}{=} \pi_2 \circ g \circ G^{-1}(u, v) \in H. \tag{2.2.4}$$

Essa è chiaramente di classe C^∞, inoltre, per costruzione

$$d[h(O, \cdot\,)]_O = \frac{\partial h}{\partial v'}(O, O) \in \Phi_0(H). \tag{2.2.5}$$

Infatti, se $v \in TM$, $g(v) = \big(g_1(v), g_2(v)\big) \in M \times H$, quindi

$$dg_{G^{-1}(O,O)}\colon T_{G^{-1}(O,O)}(TM) \longrightarrow T_{g(G^{-1}(O,O))}(M \times H), \tag{2.2.6}$$

inoltre, localmente in $G^{-1}(O, O)$, TM (letto in una banalizzazione locale) è della forma $U \times H$ ($U \subset M$) e di conseguenza g è della forma $g = g(u, h)$, segue che (2.2.6) si può scrivere come

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

in cui, in particolare, $g_{22} = \frac{\partial g_2}{\partial h}(G^{-1}(O,O))$. Indicate con $p_2\colon T_{g_1(G^{-1}(O,O))}M \times H \longrightarrow H$ e con $\iota_2\colon \{O\} \times H \to H \times H$ rispettivamente le applicazioni di proiezione sul secondo fattore e di inclusione, essendo nota la forma del differenziale di G (cfr. equazione 2.2.2), si ottiene

$$\begin{aligned} d[h(O, \cdot\,)]_O &= p_2 \circ d\big(g \circ G^{-1}\big)_{(O,O)} \circ \iota_2 \\ &= p_2 \circ dg_{G^{-1}(O,O)} \circ dG^{-1}{}_{(O,O)} \circ \iota_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ -\mathrm{id} & \mathrm{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = g_{22}. \end{aligned}$$

Infine, $g_{22} = \frac{\partial g_2}{\partial h}(G^{-1}(O,O))$ è evidentemente un elemento di $\Phi_0(H)$ infatti, per definizione di isomorfismo di fibrati, la restrizione di g a ciascuna fibra di TM è un isomorfismo lineare, quindi

$$\frac{\partial g_2}{\partial h}(G^{-1}(O,O)) = g_2(G^{-1}(O,O)) = g|_{g_1(G^{-1}(O,O))} \in \Phi_0(H).$$

(la prima uguaglianza segue dalla linearità della restrizione di g alle fibre di TM, l'appartenenza alla classe $\Phi_0(H)$ dovuta al fatto che la restrizione di g alle fibre di TM è un isomorfismo).

Per la continuità di $\partial h/\partial v' \colon U' \times U' \to \mathrm{End}(H)$, essendo $\Phi_0(H)$ localmente convesso ($\Phi_0(H)$ è un aperto di $\mathrm{End}(H)$, che è localmente convesso in quanto spazio normato), siccome per quanto si è appena dimostrato $\partial h/\partial v'(O,O) \in \Phi_0(H)$, esiste un intorno aperto $V' \times V'$ di (O,O) in $U' \times U'$ tale che l'inviluppo convesso dell'insieme $\partial h/\partial v'(V' \times V')$ (immagine di $V' \times V'$ mediante $\partial h/\partial v'$) sia contenuto in $\Phi_0(H)$:

$$\exists\, (O,O) \in \boldsymbol{V' \times V'} \subset U' \times U' \quad \text{tale che} \quad \mathrm{conv}\big(\partial h/\partial v'(V' \times V')\big) \subset \Phi_0(H). \tag{2.2.7}$$

Sia V_x il sottoinsieme aperto di M corrispondente a V', e sia $\{V_x\}_{x \in M}$ il risultante ricoprimento aperto di M ottenuto facendo variare x in M. Sia $\{V_a\}_{a \in A}$ un ricoprimento aperto localmente finito di M con la proprietà che per ogni a in A esiste x in M per cui $\overline{V}_a \subset V_x$.

Per ogni $x \in M$ fissato, per la proprietà di locale finitezza del ricoprimento aperto $\{V_a\}_{a \in A}$, esiste un intorno Q_x di x intersecante solo un cardinale finito di elementi V_a del ricoprimento. Inoltre, se V_a è un tale aperto allora uno solo dei seguenti tre casi si verifica: (i) $x \notin V_a$, (ii) $x \in \partial V_a$ oppure (iii) $x \notin \overline{V}_a$, ossia $x \in M \setminus \overline{V}_a$. Siano dunque

$$V_{a_1}, \dots, V_{a_n},\; V_{b_1}, \dots, V_{b_m},\; V_{c_1}, \dots, V_{c_k}$$

gli elementi di $\{V_a\}_{a \in A}$ che intersecano Q_x, ove, per ogni i, $x \in V_{a_i}$, $x \in \partial V_{b_i}$ e $x \notin \overline{V}_{c_i}$. Si scelga un intorno aperto W_x di x tale che

$$W_x \subset \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i} \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{k} \Big(M \setminus \overline{V}_{c_j} \Big) \right) \cap Q_x. \tag{2.2.8}$$

In particolare si ha che, per ogni $a \in A$,

$$W_x \cap V_a \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{V}_a, \tag{2.2.9}$$

infatti, se fosse $(W_x \cap V_a \neq \varnothing) \wedge \big(x \notin \overline{V}_a\big)$ allora da $x \notin \overline{V}_a$, per la (2.2.8) risulterebbe $W_x \subset M \setminus \overline{V}_a$ da cui seguirebbe $W_x \cap V_a = \varnothing$, contraddizione. Sia $\{W_b\}_{b \in B}$ un raffinamento aperto localmente finito di $\{W_x\}_{x \in M}$ che copra M, ossia tale che $\bigcup_{b \in B} W_b = M$. Per ogni $b \in B$, esiste un unico $x(b) \in M$ tale che $W_b \subset W_{x(b)}$.

Sia $\{\mu_b\}$ una partizione dell'unità di classe C^∞ subordinata al ricoprimento localmente finito $\{W_b\}_{b \in B}$ (una tale partizione esiste perché, per ipotesi, M è una varietà paracompatta modellata su uno spazio di Hilbert, cfr. [Lan 01] corollario 3.8, pag. 38). Per $y \in M$ poniamo

$$f(y) :\overset{\text{def}}{=} \sum_{b \in B} \mu_b(y)\, \pi_2 \circ g \circ G^{-1}\big(x(b), y\big). \tag{2.2.10}$$

Per prima cosa occorre verificare la buona definizione della mappa 2.2.10, e cioè che per ogni $b \in B$ e per ogni $y \in M$, $(x(b), y)$ appartiene al dominio di definizione di G^{-1}.

Sia $y \in M$. Siccome $\{V_a\}_{a \in A}$ è un ricoprimento di M, esiste $a \in A$ tale che $y \in V_a$. D'altra parte anche $\{W_b\}_{b \in B}$ è un ricoprimento di M, quindi esiste $b \in B$ tale che $y \in W_b \subset W_{x(b)}$. Dunque $V_a \ni y \in W_{x(b)}$, segue che $W_{x(b)} \cap V_a \neq \varnothing$ e quindi, per quanto si è già osservato (cfr. eq. 2.2.9)

$$x(b) \in \overline{V}_a. \tag{2.2.11}$$

Supponiamo che $\mu_b(y) \neq 0$ per $b = b_1, \dots, b_k \in B$. Allora, essendo la partizione dell'unità *subordinata* a $\{W_b\}_{b \in B}$, $y \in \bigcap_{i=1}^{k} W_{b_i}$; d'altra parte $W_{b_i} \subset W_{x(b_i)}$, dunque $y \in \bigcap_{i=1}^{k} W_{x(b_i)}$; inoltre ($\{V_a\}_{a \in A}$ è un ricoprimento di M) esiste $a \in A$ tale che $y \in V_a$. Dunque $V_a \ni y \in \bigcap_{i=1}^{k} W_{x(b_i)}$, e per la (2.2.11)

$$\forall\, i \in \{1, \dots, k\} \qquad x(b_i) \in \overline{V}_a. \tag{2.2.12}$$

Siccome $\overline{V}_a \subset V_x$ per qualche $x \in M$, essendo $V' \subset U'$ e quindi $V_x \subset U_x$, si ha che per ogni i in $\{1, \ldots, k\}$,

$$\big(x(b_i), y\big) \in U_x \times U_x, \tag{2.2.13}$$

e quindi (cfr. 2.2.3), per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$, G^{-1} è definita su $(x(b_i), y)$ e la (2.2.10) definisce correttamente la nostra mappa f. Chiaramente f definita dalla (2.2.10) è di classe C^∞.

Verifichiamo che f è Fredholm di indice zero. Nella carta V' corrispondente a V_x, il differenziale di f nel punto y' di V' è (cfr. eq. (2.2.4))

$$df_{y'} = \sum_{i=1}^{k} \mu_{b_i}(y')\, d\big[h\big(x'(b_i), \cdot\,\big)\big]_{y'} + \sum_b \pi_2 \circ g \circ G^{-1}\big(x'(b), y'\big)\ d(\mu_b)_{y'}[\,\cdot\,]. \tag{2.2.14}$$

Il primo termine è in $\Phi_0(H)$ perché $(\forall\, i \in \{1, \ldots, k\})$ $(x'(b_i), y') \in V' \times V'$, dunque per la (2.2.7)

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_{b_i}(y')\, d\big[h\big(x'(b_i), \cdot\,\big)\big]_{y'} = \sum_{i=1}^{k} \mu_{b_i}(y')\, \frac{\partial h}{\partial v'}(x'(b_i), y') \in \operatorname{conv}\big(\partial h / \partial v'(V' \times V')\big) \subset \Phi_0(H).$$

Il secondo termine

$$w \in H \longmapsto \sum_b \pi_2 \circ g \circ G^{-1}\big(x'(b), y'\big)\ d(\mu_b)_{y'}[w] \in \mathbb{R}$$

è un operatore di rango finito. Quindi $df_{y'}$ è un operatore lineare Fredholm di indice zero. Segue che f è una C^∞-Φ_0-mappa.

□

Osservazione 2.25. La formula 2.2.10 che definisce la mappa f congiuntamente con l'equazione 2.2.13 suggeriscono che, a meno di scegliere banalizzazioni locali per TM in un intorno della sezione nulla con carte banalizzanti sufficientemente piccole (si osservi che la mappa G applica la sezione nulla di TM nella diagonale $\Delta \subset M \times M$, inoltre essa assume i propri valori in un intorno di Δ), nella dimostrazione appena conclusa si può fare a meno di invocare il teorema di Kuiper e quindi della mappa di banalizzazione *globale* $g\colon TM \to M \times H$.

Dunque, in particolare, con questa osservazione la dimostrazione del teorema 2.24 che abbiamo presentato ben si adatta anche al caso in cui la varietà sia modellata su uno spazio di Banach reale di dimensione infinita, dotato di una base di Schauder e di partizioni dell'unità di classe C^∞ (si ricordi che per gli spazi di Banach non c'è un analogo del teorema di Kuiper). Nella generalità Banach, in particolare, anziché fissare una struttura Riemanniana all'inizio della dimostrazione avremmo avuto cura di considerare uno spray, la cui esistenza (cfr. teorema F.8) è garantita dall'esistenza di partizioni dell'unità sulla varietà.

Osservazione 2.26. Come caso particolare del corollario G.7, si ha che, per ogni x in M, l'immagine $df_x(T_xM)$ di T_xM mediante df_x è un sottospazio chiuso di $T_{f(x)}H = H$.

Ogni mappa di Fredholm è localmente propria, come provato nel teorema E.10. Mostreremo adesso come ottenere a partire da una mappa di Fredholm di indice zero una mappa propria Fredholm di indice zero.

Lemma 2.27. *Sia M uno spazio metrico, H uno spazio di Hilbert, ed $f\colon M \to H$ una applicazione continua propria. Se $k\colon M \to H$ è una mappa continua tale che la chiusura di $k(M)$ in H è un sottoinsieme compatto* ([2]) *allora $f + k\colon M \to H$ è una mappa propria.*

Dimostrazione. Sia $K \subset H$ un compatto. Si deve provare che, posta $g := f + k$, $g^{-1}(K) \subset M$ è un insieme compatto. Per questo scopo osserviamo che

$$g^{-1}(K) \subset f^{-1}\big(K - \overline{k(M)}\,\big), \tag{2.2.15}$$

[2] Una mappa con questa proprietà è chiaramente una mappa compatta, infatti $(\forall B \subset M)$ $\overline{k(B)} \subset \overline{k(M)}$: ora $\overline{k(B)}$ è un chiuso, $\overline{k(M)}$ è compatto per ipotesi, dunque $\overline{k(B)}$ è un compatto perché chiuso in un compatto. In particolare questo può essere ripetuto quando B è limitato.

infatti

$$x \in g^{-1}(K) \Leftrightarrow f(x) \in K - k(x) \Rightarrow f(x) \in K - k(M) \Rightarrow f(x) \in K - \overline{k(M)} \Rightarrow x \in f^{-1}\big(K - \overline{k(M)}\,\big),$$

da cui, essendo $K - \overline{k(M)}$ un compatto ($\psi\colon M \times M \to H$ definita ponendo $\psi(x,y) := x - y$ è chiaramente una mappa continua, $K \times \overline{k(M)}$ è un compatto, dunque $\psi(K \times \overline{k(M)}) = K - \overline{k(M)}$ è un compatto), siccome per ipotesi f una mappa propria, si ottiene che $f^{-1}\big(K - \overline{k(M)}\,\big) \subset M$ è un compatto. D'altra parte $g^{-1}(K)$ è un chiuso perché g è continua e K è un compatto di uno spazio di Hausdorff, dunque un chiuso. Segue che $g^{-1}(K)$ è un compatto essendo un chiuso in un compatto. □

Proposizione 2.28. *Sia M una varietà modellata su uno spazio di Hilbert H ed $f\colon M \to H$ una mappa di classe C^∞ Fredholm di indice zero. Allora esiste una mappa $\alpha\colon M \to H$, di classe C^∞ con immagine di dimensione finita, tale che $(f + \alpha)\colon M \to H$ sia una mappa propria.*

Dimostrazione. Sia $w \in H$ un elemento di norma unitaria e H_1 il sottospazio di H generato da w. Sia $P\colon H \to H_1$ il proiettore corrispondente allo splitting di H come $H_1 \times H_1^\perp$, essendo $H_1^\perp$ il sottospazio di H perpendicolare ad H_1.

La mappa $(f - Pf)\colon M \to H$ è ancora una mappa di Fredholm e quindi, in particolare, è localmente propria. Sia $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento aperto star-finito di M, tale che, per ogni i, $f - Pf$ sia propria su $\overline{U}_i$.

Sia $(\mu_i)_i$ una partizione dell'unità di classe C^∞ subordinata a $\{U_i\}_i$. Definiamo $\beta\colon M \to H$ mediante $\beta(x) := \big(\sum_i 2^i\mu_i(x)\big)w$ e poniamo $\alpha := \beta - Pf$ e $g := f + \alpha\colon M \to H$. Sia $K \subset H$ un sottoinsieme compatto di H e supponiamo che $g(x) \in K$ per qualche $x \in M$. Siccome K è compatto, $P(K)$ è un sottoinsieme compatto di H_1, dunque esiste k in $\mathbb{N}$ tale che $\|y\| < 2^k$ per ogni $y \in P(K)$.

Segue che, essendo $(f - Pf)(M) \subset H_1^\perp$, per ogni x in M tale che $g(x) \in K$, risulta $\sum_i 2^i\mu_i(x) < 2^k$ ([3]). Indicato con $j(x)$ il più piccolo intero i per cui $x \in U_i$, allora $2^{j(x)} \leq \sum_i 2^i\mu_i(x)$, infatti

$$2^{j(x)} = \sum_i 2^{j(x)}\mu_i(x) \leq \sum_i 2^i\mu_i(x) < 2^k,$$

quindi $j(x) < k$, e perciò $g^{-1}(K) \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$ ([4]). Ma $f - Pf$ è propria su $\bigcup_{i=1}^k \overline{U}_i$, dunque per il lemma 2.27 $g = (f - Pf) + \beta$ è propria su $\bigcup_{i=1}^k \overline{U}_i$ (β è continua e la chiusura di $\beta\big(\bigcup_{i=1}^k \overline{U}_i\big)$ è un compatto di H, dunque le ipotesi del lemma sono verificate). Quindi $g^{-1}(K)$ è compatto e $g = f + \alpha\colon M \to H$ è una mappa propria. □

Osservazione 2.29. Enunciato e dimostrazione della proposizione 2.28 non cambiano quando in luogo di H si consideri uno spazio di Banach reale E di dimensione infinita, dotato di una base di Schauder e di partizioni dell'unità di classe C^∞. Nella dimostrazione, indicato con E_1 lo spazio generato da un elemento di norma unitaria di E, in luogo di $H_1^\perp$ basterà considerare un qualsiasi sottospazio complementare chiuso di E_1 (un tale sottospazio esiste in virtù del corollario G.5).

Corollario 2.30. *Sia M una varietà modellata su uno spazio di Hilbert H. Allora esiste una mappa propria di classe C^∞ di M in H Fredholm di indice zero.*

Dimostrazione. Nelle notazioni del teorema 2.24 e della proposizione 2.28, proviamo che la mappa $g = f + \alpha\colon M \to H$ soddisfa tutte le proprietà richieste. Basterà verificare che si tratta di una mappa Fredholm di indice zero. Ma ciò è ovvio, infatti f è Fredholm di indice zero e $\alpha\colon M \to H_1$

[3] Infatti $g(x) \in K \Rightarrow Pg(x) \in P(K) \Rightarrow \|Pg(x)\| < 2^k$. D'altra parte $Pg(x) = P(f+\alpha)(x) = P(f - Pf + \beta)(x) = P(f - Pf)(x) + P\beta(x)$, inoltre (i) $(f - Pf)(M) \subset H_1^\perp \Rightarrow P(f - Pf)(x) = 0$ (infatti $P(f - Pf)(x) = Pf(x) - PPf(x) = Pf(x) - Pf(x) = 0$) e (ii) $P\beta(x) = P(\sum_i 2^i\mu_i(x)w) = \sum_i 2^i\mu_i(x)w$ (infatti $\sum_i 2^i\mu_i(x)w \in H_1$) per cui, in conclusione, $Pg(x) = \sum_i 2^i\mu_i(x)w$, da cui, essendo $\|Pg(x)\| < 2^k$ e $\|w\| = 1$ segue che $\sum_i 2^i\mu_i(x) < 2^k$.

[4] Infatti se $x \in g^{-1}(K) \Leftrightarrow g(x) \in K$ è tale che $x \in U_{j(x)}$ allora abbiamo provato che $2^{j(x)} < 2^k$, i.e., $j(x) < k$, dunque $x \in \bigcup_{i=1}^k U_i$, i.e., $g^{-1}(K) \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$.

è la mappa di classe C^∞ definita nella proposizione precedente, $H_1 \subset H$ essendo un sottospazio di H di dimensione uno. Dunque per ogni fissato y in M, $d\alpha_y \in \mathcal{L}(T_y M, H_1)$ è un operatore lineare limitato di rango finito e quindi $\operatorname{ind}(df_y + d\alpha_y) = \operatorname{ind}(df_y) = 0$. □

Sia $f_0 \colon M \to H$ la mappa Fredholm di indice zero fornita dal teorema 2.24. Componendo col diffeomorfismo $\varphi\colon H \to B_O(1)$ dato da

$$v \in H \mapsto \frac{v}{\left(1 + \|v\|^2\right)^{1/2}} \in B_O(1),$$

si ottiene una mappa Fredholm di indice zero e limitata $f_1 := \varphi \circ f_0 \colon M \to H$. Consideriamo dunque la mappa f_2 ottenuta dalla mappa f_1 come indicato dalla proposizione 2.28: otteniamo così una applicazione $f_2 \colon M \to H$ Fredholm di indice zero, propria e con immagine limitata salvo che lungo una direzione (spazio vettoriale di dimensione uno). Mostreremo adesso come ottenere a partire da f_2 una mappa Fredholm di indice zero, propria e limitata. Per questo scopo sarà conveniente riguardare il modello di Hilbert separabile H della nostra varietà M come lo spazio $L^2(\mathbb{R})$ delle funzioni reali a quadrato sommabile.

Proposizione 2.31. *Sia H uno spazio di Hilbert reale, separabile, di dimensione infinita. Allora esiste una applicazione di classe C^∞, propria, Fredholm di indice zero e limitata da un cilindro chiuso C di H $\big($indicato con w un elemento di H di norma unitaria, $C = \langle w \rangle \times \big(\,\overline{\langle w \rangle^\perp \cap B_O(\varepsilon)}\,\big)\big)$ a valori in H.*

Dimostrazione. Riguardiamo H come lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ e denotiamo come consueto con $\|\cdot\|_2$ la relativa norma indotta. Consideriamo la funzione $f(x) = e^{-x^2}$. Allora chiaramente $f \in L^2(\mathbb{R})$. Sia w in $L^2(\mathbb{R})$ una fissata funzione tale che $\|w\|_2 = 1$, e denotiamo con $\langle w \rangle^\perp$ l'iperpiano ortogonale al sottospazio generato da w. Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ e $B_O(\varepsilon) \subset L^2(\mathbb{R})$ la palla aperta di raggio ε e centro l'origine. Poniamo $D_\varepsilon := \langle w \rangle^\perp \cap B_O(\varepsilon)$.

Consideriamo la curva $\sigma\colon \mathbb{R} \to L^2(\mathbb{R})$ definita ponendo

$$\sigma(s) :\overset{\text{def}}{=} f(\,\cdot - s).$$

Dunque $\sigma(s)(x) = f(\,\cdot - s)(x) = f(x - s) = e^{-(x-s)^2}$, quindi, effettivamente, $(\forall\, s)\ \sigma(s) \in L^2(\mathbb{R})$. In particolare risulta $\sigma(0) = f$ e, come si verifica facilmente, $\dot\sigma(s) = -f'(\cdot - s)$.

Indichiamo con $u = \langle u, w \rangle w + u - \langle u, w \rangle w$ il generico elemento di $\langle w \rangle \times D_\varepsilon$. Chiaramente $\big\langle u - \langle u, w \rangle w, w \big\rangle = 0$, dunque converremo di porre $u_\perp := u - \langle u, w \rangle w$. In particolare, siccome $u \in \langle w \rangle \times D_\varepsilon$, deve essere $\|u_\perp\|_2 < \varepsilon$. Nelle notazioni introdotte, consideriamo l'applicazione $\psi\colon \langle w \rangle \times D_\varepsilon \to L^2(\mathbb{R})$ definita da

$$\psi(u) :\overset{\text{def}}{=} \sigma\big(\langle u, w \rangle\big) + u_\perp. \tag{2.2.16}$$

L'immagine $\psi(\langle w \rangle \times D_\varepsilon) \subset L^2(\mathbb{R})$ è invero contenuta in una palla aperta $B_O(R)$, in cui $R \in \mathbb{R}^+$ è opportuno, infatti

$$\begin{aligned}\big\|\psi(u)\big\|_2 &= \big\|\sigma\big(\langle u, w \rangle\big) + u_\perp\big\|_2 \le \\ &\le \big\|\sigma\big(\langle u, w \rangle\big)\big\|_2 + \|u_\perp\|_2 = \|f\|_2 + \|u_\perp\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-x^2}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} + \|u_\perp\|_2 < 2 + \varepsilon,\end{aligned}$$

e quindi sarà sufficiente scegliere $R = \varepsilon + 2$.

Proveremo adesso che se ε è sufficientemente piccolo allora la restrizione di ψ a $\langle w \rangle \times \overline{D}_\varepsilon$ è una mappa propria. Per semplificare le notazioni, introduciamo per ogni s in $\mathbb{R}$ l'operatore di *traslazione orizzontale*:

$$\mathcal{T}_s \colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \qquad \mathcal{T}_s(v) :\overset{\text{def}}{=} v(\,\cdot - s).$$

Consideriamo un sottoinsieme compatto K di $L^2(\mathbb{R})$. Dobbiamo trovare condizioni su ε affinché

$$\big(\psi|_{\langle w\rangle\times\overline{D}_\varepsilon}\big)^{-1}(K) = \psi^{-1}(K)\cap\big(\langle w\rangle\times\overline{D}_\varepsilon\big) \tag{2.2.17}$$

sia un sottoinsieme compatto di $\langle w\rangle\times\overline{D}_\varepsilon$, equivalentemente, dobbiamo determinare ε affinché ogni successione di punti di $(\psi|_{\langle w\rangle\times\overline{D}_\varepsilon})^{-1}(K)$ ammetta una successione estratta convergente ad un punto di $(\psi|_{\langle w\rangle\times\overline{D}_\varepsilon})^{-1}(K)$. Sia $\{(s_h w, u_h)\}_h \subset \langle w\rangle\times\overline{D}_\varepsilon$ una successione di punti $(\psi|_{\langle w\rangle\times\overline{D}_\varepsilon})^{-1}(K)$. Dunque

$$\big\{\psi(s_h w, u_h)\big\}_h = \big\{\mathcal{T}_{s_h} f + u_h\big\}_h \subset K, \tag{2.2.18}$$

e poiché K è compatto, (2.2.18) ammette una sottosuccessione convergente ad un vettore v in K.

Se fosse $\lim_h s_h = +\infty$ allora (cfr. osservazione 2.32 pag. 31) $(\mathcal{T}_{s_h} f)_h$ convergerebbe debolmente a zero (scritto $\mathcal{T}_{s_h} f \rightharpoonup 0$) da cui seguirebbe $u_h \rightharpoonup v$ e quindi (cfr. proposizione G.9 pag. 115)

$$\|v\| \le \liminf_{h\to+\infty} \|u_h\| \le \varepsilon.$$

Si avrebbe quindi

$$\|f\| - \varepsilon \le \|\mathcal{T}_{s_h} f\| - \|u_h\| \le \|\mathcal{T}_{s_h} f + u_h\| \xrightarrow[h\to+\infty]{} \|v\| \le \varepsilon$$

da cui $\|f\| \le 2\varepsilon$. Segue che, posto $\varepsilon < \frac{1}{2}\|f\|_2$, (s_h) è necessariamente limitata, e quindi, a meno di passare ad una sottosuccessione, $s_h \to \bar{s} \in \mathbb{R}$, dunque $\mathcal{T}_{s_h} f \to \mathcal{T}_{\bar{s}} f$. Inoltre, da $\mathcal{T}_{s_h} f + u_h \to v$ si deduce che $u_h \to v - \mathcal{T}_{\bar{s}} f$. Riassumendo, se $\varepsilon < \frac{1}{2}\|f\|_2$, per esempio $\varepsilon < \frac{1}{2}$, allora, a meno di passare ad una sottosuccessione possiamo supporre che

$$(s_h w, u_h) \xrightarrow[h\to+\infty]{} (\bar{s}\, w, v - \mathcal{T}_{\bar{s}} f).$$

Infine, $(\bar{s}\, w, v - \mathcal{T}_{\bar{s}} f) \in \big(\psi|_{\langle w\rangle\times\overline{D}_\varepsilon}\big)^{-1}(K)$ infatti (cfr. eq. 2.2.17): (i) $\big\{(s_h w, u_h)\big\}_h \subset \langle w\rangle\times\overline{D}_\varepsilon$, (i′) $\langle w\rangle\times\overline{D}_\varepsilon$ è chiuso, quindi $(\bar{s}\, w, v - \mathcal{T}_{\bar{s}} f) \in \langle w\rangle\times\overline{D}_\varepsilon$; inoltre (ii)

$$\psi\big(\bar{s}\, w, v - \mathcal{T}_{\bar{s}} f\big) = \mathcal{T}_{\bar{s}} f + v - \mathcal{T}_{\bar{s}} f = v \in K,$$

quindi $(\bar{s}\, w, v - \mathcal{T}_{\bar{s}} f) \in \psi^{-1}(K)$. In definitiva, fissato comunque $\varepsilon < \frac{1}{2}\|f\|_2$,

$$\psi|_{\langle w\rangle\times\overline{D}_\varepsilon} \colon \langle w\rangle\times\overline{D}_\varepsilon \to L^2(\mathbb{R})$$

è una mappa propria. Calcoliamo il differenziale di ψ, in cui, ricordiamo,

$$\psi\colon u \in \langle w\rangle\times\big(\langle w\rangle^\perp \cap B_O(\varepsilon)\big) \longmapsto \sigma\big(\langle u, w\rangle\big) + u - \langle u, w\rangle w \;\in\; B_O(\varepsilon + 2).$$

Per ogni $u \in \langle w\rangle\times\big(\langle w\rangle^\perp \cap B_O(\varepsilon)\big)$, $d\psi_u\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ è dato da

$$\begin{aligned} d\psi_u &= \langle \mathrm{id}, w\rangle\, \dot{\sigma}\big(\langle u, w\rangle\big) + \mathrm{id} - \langle \mathrm{id}, w\rangle w \\ &= \mathrm{id} + \langle \mathrm{id}, w\rangle\big[\dot{\sigma}\big(\langle u, w\rangle\big) - w\big]. \end{aligned}$$

Ora

$$v \in L^2(\mathbb{R}) \longmapsto \langle v, w\rangle\big[\dot{\sigma}\big(\langle u, w\rangle\big) - w\big] \in \mathrm{Span}\big(\dot{\sigma}\big(\langle u, w\rangle\big) - w\big) \subset L^2(\mathbb{R})$$

è evidentemente un operatore di rango finito (uno), dunque, per l'osservazione B.6, $d\psi_u$ è un operatore Fredholm lineare di indice zero, in quanto perturbazione compatta dell'identità.

□

Osservazione 2.32. *Scopo della presente osservazione è provare in dettaglio l'implicazione*

$$s_h \xrightarrow[h\to+\infty]{} +\infty \implies \mathcal{T}_{s_h} f \rightharpoonup 0.$$

Ricordiamo che in un generico spazio normato X, una successione (x_n) di X converge debolmente ad un punto x in X se

$$\forall\, \phi \in X^*, \quad \phi(x_n) \to \phi(x).$$

Negli spazi di Hilbert, in virtù del teorema G.20 di Riesz, ogni siffatto funzionale ϕ è rappresentato da uno ed un solo elemento dello spazio di Hilbert stesso, per cui

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{s_h} f \rightharpoonup 0 &\iff \forall\, g \in L^2(\mathbb{R}), \quad \big\langle \mathcal{T}_{s_h} f, g \big\rangle_2 \xrightarrow[h\to+\infty]{} \langle 0, g\rangle = 0 \\
&\iff \forall\, g \in L^2(\mathbb{R}), \quad \lim_{h\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}_{s_h} f(x)\, g(x)\, dx = 0 \\
&\iff \forall\, g \in L^2(\mathbb{R}), \quad \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2}\, g(t)\, dt = 0.
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Quest'ultimo è l'integrale di convoluzione della gaussiana $G(x) = e^{-x^2}$ con la funzione $g \in L^2(\mathbb{R})$, per definizione di convoluzione infatti:

$$G * g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2}\, g(t)\, dt.$$

Esistono risultati generali sulla convoluzione da cui il limite 2.2.19 segue subito: invocando il teorema G.29 di cui nell'appendice G si dimostra che se p, $q > 1$ sono esponenti coniugati (in particolare $p = q = 2$), $f \in L^p(\mathbb{R})$ $\big($in particolare $f(x) = G(x) = e^{-x^2} \in L^2(\mathbb{R})\big)$ e $g \in L^q(\mathbb{R})$ (nel nostro caso $g \in L^2(\mathbb{R})\big)$, allora la convoluzione

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt$$

esiste ed è una funzione continua e nulla all'infinito. Nell'appendice G, esempio G.30, si è fornita a titolo di esempio un'altra motivazione che giustifica il limite 2.2.19, senza fare ricorso alla teoria della convoluzione.

Teorema 2.33. *Esiste una mappa di classe C^∞, Fredholm di indice zero, limitata e propria $f\colon M \to H$.*

Dimostrazione. Nelle notazioni introdotte nelle dimostrazioni delle proposizioni 2.28 e 2.31, l'immagine di f_2 è contenuta nel cilindro aperto $\langle w\rangle \times D_1 := \langle w\rangle \times \big(\langle w\rangle^\perp \cap B_O(1)\big)$. A meno di comporre f_2 con una mappa radiale, per esempio

$$(sw, u) \in \langle w\rangle \times \langle w\rangle^\perp \longmapsto \left(sw, \frac{\varepsilon u}{(1+\|u\|^2)^{1/2}}\right), \tag{2.2.20}$$

possiamo supporre che l'immagine di f_2 sia contenuta nel cilindro chiuso $\langle w\rangle \times \overline{D}_\varepsilon$ fornito dalla proposizione precedente, in modo tale che il prodotto di composizione $\psi \circ f_2$ sia ben definito ([5]). Posta $f := \psi \circ f_2$, f soddisfa tutte le richieste dell'enunciato del teorema.

□

Corollario 2.34. *Esiste una mappa di classe C^∞, Fredholm di indice zero, limitata e propria $f\colon M \to H$ trasversa ad H_n per ogni n in $\mathbb{N}$.*

[5] Si osservi che, a meno che l'immagine di f_2 non sia già contenuta in $\langle w\rangle \times \overline{D}_\varepsilon$, in generale è necessario comporre con una mappa radiale del tipo indicato in (2.2.20), infatti, come è esplicitato dalla dimostrazione della proposizione 2.31, è $\varepsilon < \frac{1}{2}\|f\|_2 < 3/4$

Premettiamo una osservazione:

Osservazione 2.35. Riguardiamo la coppia (H, H_n) come $(H_n \times H^n, H_n \times \{O\})$, $O \in H^n$, essendo $H_n \times \{O\} \subset H_n \times H^n$. Osserviamo che $f\colon M \to H_n \times H^n$ *è trasversa a* $H_n \times \{O\} \subset H_n \times H^n$ *se e solo se* O *in* H^n *è un valore regolare per* $f_n := \pi^n \circ f$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f_n"'] & H_n \times H^n \arrow[r, "\pi^n"] & H^n. \end{tikzcd}$$

Per provare quest'ultimo asserto si noti che, fissato p in M, risulta $f_n(p) = \pi^n\big(f(p)\big) = O$ se e solo se $f(p) \in H_n \times \{O\}$. Dunque, essendo p arbitrario, basterà provare che un p siffatto è un punto regolare per f_n se e solo se $f \pitchfork_{\{p\}} (H_n \times \{O\})$, in simboli:

$$\begin{aligned} d(\pi^n \circ f)_p\big(T_pM\big) = T_O H^n &\iff df_p(T_pM) + T_{f(p)}(H_n \times \{O\}) = T_{f(p)}(H_n \times H^n) \\ &\iff \\ \pi^n\big(df_p(T_pM)\big) = H^n &\iff df_p(T_pM) + H_n \oplus \{O\} = H_n \oplus H^n. \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

Ora $df_p(T_pM) \subset H_n \times H^n$, segue che $df_p(T_pM) + H_n \oplus \{O\} = H_n \oplus H^n$ sse $\pi^n\big(df_p(T_pM)\big) = H^n$, e questo prova la (2.2.21) e dunque l'asserto.

Il corollario 2.34 segue dal teorema 2.33 e dal seguente lemma:

Lemma 2.36. *Sia* $f\colon M \to H$ *una mappa di classe* C^∞*, Fredholm di indice zero. Per ogni* p *in* H*, si consideri* $f_p(x) := f(x) + p$*. Sia*

$$H_f = \big\{ p \in H : f_p \text{ è trasversa a } H_n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \big\}.$$

Allora H_f *è residuale in* H*.*

Dimostrazione. Sia $\pi^n\colon H \to H^n$ la proiezione canonica, allora chiaramente $\ker(\pi^n) = H_n$. Posta

$$f_n := \pi^n \circ f\colon M \to H^n,$$

f_n è di classe C^∞, Fredholm di indice n ([6]), quindi, per il teorema di Sard-Smale (cfr. teorema C.26), i valori regolari V_n di f_n sono residuali in H^n. Dunque $U_n := (\pi^n)^{-1}(V_n)$ è un insieme residuale in H. Se $p \in U_n$, allora $O \in H^n$ è un valore regolare per $\pi^n \circ f_{(-p)}\colon M \to H^n$, quindi (in virtù dell'osservazione 2.35 precedente) $f_{(-p)}$ è trasversa a H_n. Dunque

$$H_f^n = \{p \in H \ : \ f_p \text{ è trasversa a } H_n\}$$

è residuale in H e $H_f = \bigcap_{n \geq 1} H_f^n$ è residuale in H. □

Dimostrazione del Corollario 2.34. Sia $f\colon M \to H$ una mappa di classe C^∞ fornita dal teorema 2.33, Fredholm di indice zero, limitata e propria.
Siccome uno spazio è di Baire se e solo se ogni sottoinsieme residuale è un denso dell'intero spazio, poiché gli spazi di Hilbert sono completi e dunque di Baire, nelle notazioni del lemma 2.36, $H_f \subset H$ in quanto residuale è denso, dunque in particolare è non vuoto. Sia p in H_f. Allora per come è stato costruito H_f si ha che $f_p = f + p$ è trasversa ad H_n per ogni n, inoltre, chiaramente, f_p è una mappa di classe C^∞, Fredholm di indice zero, limitata e propria perché tale è f. □

Osservazione 2.37. La dimostrazione che abbiamo appena fornito per il teorema 2.33 sfrutta pesantemente la nozione di ortogonalità: in particolare non si può adattare la dimostrazione della proposizione 2.31 alla generalità della varietà di Banach e per questo si deve procedere diversamente.

[6] Per ipotesi f è una Φ_0-mappa, inoltre per il teorema B.7, $\operatorname{ind}(\pi^n \circ f) = \operatorname{ind}(\pi^n) = \dim\ker(\pi^n) - 0 = n$.

Nella parte introduttiva della tesi, precisamente nella sezione 1.5, si è parlato del teorema di Bessaga, teorema che si dimostra nella generalità degli spazi di Hilbert. D'altra parte, i remarks all'articolo originale [Be 66] suggeriscono se non la possibilità di estendere questo teorema alla generalità degli spazi di Banach almeno la possibilità di estendere alcune costruzione intermedie utili per dimostrare il teorema di Bessaga, come osservato nella sottosezione 1.5.2. Scopo di questa osservazione è sfruttare queste generalizzazioni per dimostrare il teorema 2.33 nel caso di varietà modellate su uno spazio di Banach reale E di dimensione infinita, dotato di una base di Schauder (e_i) e di partizioni dell'unità di classe C^∞.

Sia M una varietà modellata su uno spazio di Banach siffatto E ed $f_1 \colon M \to E$ una mappa Fredholm di indice zero (cfr. osservazione 2.25) che può essere assunta propria (in virtù del corollario 2.30) ma non surgettiva[7].

L'immagine $f_1(M) \subsetneq E$ è un chiuso per la proposizione E.7; dunque $E \setminus f_1(M)$ è un aperto non ridotto al vuoto. Sia $B \subset E \setminus f_1(M)$ una palla aperta avente centro in un punto p. Indichiamo con S il bordo di B. In virtù della proposizione 1.31 che generalizza un risultato di Bessaga agli spazi di Banach, esiste un diffeomorfismo di classe C^r $\phi \colon E \twoheadrightarrow E \setminus \{p\}$. Sia j un'inversione di centro p costruita come nel teorema 1.32, che lascia fissa la sfera S e scambia l'interno e l'esterno di S. Consideriamo l'applicazione

$$f_2 :\overset{\text{def}}{=} \phi^{-1} \circ j \circ \phi \circ f_1.$$

Si verifica che $f_2 \colon M \to E$ è l'applicazione cercata, Fredholm di indice zero, limitata e propria. Infine, indicato con $E_n = \operatorname{Span}\{e_1, \dots, e_n\}$, si può ripetere lo stesso argomento utile per dimostrare il corollario 2.34, modificando f_2 con una piccola traslazione per ottenere una mappa che sia in più trasversa ad E_n per ogni n.

2.3 Filtrazioni di Fredholm

Il seguente teorema è il primo passo di cruciale importanza per molte delle costruzioni che verranno presentate nel seguito, inoltre, insieme alle costruzioni di cui nella sezione precedente, rende rigoroso quanto avevamo anticipato subito dopo la definizione 2.18, ove avevamo introdotto la nozione di filtrazione.

Teorema 2.38 (K.K. Mukherjea-Quinn). *Sia $f \colon M \to H$ una mappa di classe C^∞, Fredholm di indice zero, trasversa a H_n per ogni n in $\mathbb{N}$. Posto per ogni n in $\mathbb{N}$ $M_n = f^{-1}(H_n)$, la successione $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una filtrazione di M. Precisamente:*

(i) $M_n \subset M_{n+1}$, *M_n è chiusa,* $\dim M_n = n$.

(ii) *Il fibrato normale di M_n in M, $\mathcal{N}(M_n) \to M_n$ ([8]), è naturalmente isomorfo al pull-back tramite f del fibrato normale di H_n in H ([9]):*

$$\mathcal{N}(M_n) = f^*\big(\mathcal{N}(H_n)\big);$$

specificatamente, in ogni punto x di M_n il differenziale di f induce un isomorfismo tra le corrispondenti fibre dei due fibrati normali: $\boldsymbol{(T_x M_n)^\perp} \cong T_xM/T_xM_n \cong_{\boldsymbol{df_x}} H/H_n \cong H^n = \boldsymbol{H_n^\perp}$.

(iii) $M_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ *è un denso di M.*

Dimostrazione. Chiaramente, da $H_n \subset H_{n+1}$ segue che, per ogni n in $\mathbb{N}$, $M_n \subset M_{n+1}$. Inoltre il sottoinsieme M_n è un chiuso di M perché H_n è chiuso in H ed f è di classe C^∞, dunque in

[7] Infatti la composizione di applicazioni proprie è propria, e la composizione di mappe Fredholm di indice zero è Fredholm di indice zero: dunque possiamo considerare come f_1 la mappa prodotto di composizione della mappa fornita dal corollario 2.30 e della mappa della proposizione G.31 di piega in dimensione infinita.

[8] Si ricordi che $\mathcal{N}(M_n) = \coprod_{p \in M_n} \mathcal{N}_p(M_n)$, ove $\mathcal{N}_p(M_n) = T_pM/T_pM_n \cong (T_pM_n)^\perp$.

[9] il fibrato normale di H_n in H, $\mathcal{N}(H_n) \to H_n$, è il fibrato banale su H_n la cui fibra costante è $H/H_n \cong H^n = H_n^\perp$.

particolare è continua. Infine, per la proposizione C.29 pag. 73, M_n è una sottovarietà di M tale che $\dim M_n = \operatorname{ind}(f) + \dim H_n = 0 + n = n$.

Posta come nell'osservazione 2.35 $f_n := \pi^n \circ f$, poiché f è trasversa a H_n segue che O è un valore regolare per f_n, dunque, per ogni x in M_n, per il teorema C.27

$$\ker(\pi^n \circ df_x) = \ker\big(d(\pi^n)_{f(x)} \circ df_x\big) = \ker d(f_n)_x \overset{\text{th}}{=} T_x\big(f_n^{-1}(O)\big) = T_x M_n,$$

in cui l'ultima uguaglianza è vera essendo

$$f_n^{-1}(O) := (\pi^n \circ f)^{-1}(O) = f^{-1} \circ (\pi^n)^{-1}(O) = f^{-1}(H_n) =: M_n.$$

Inoltre, π^n applica $df_x(T_xM)$ *su* H/H_n, infatti $f \pitchfork H_n$, dunque, essendo x in M_n, risulta che $df_x(T_xM) + H_n = H$ e quindi $df_x(T_xM) \supset H^n$. Il teorema di omomorfismo fornisce quindi un isomorfismo tra T_xM/T_xM_n e H/H_n, isomorfismo che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
T_xM \arrow[r, "df_x"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H \arrow[r, two heads, "\pi^n"] & \frac{H}{H_n} \\
\frac{T_xM}{T_xM_n} \arrow[urr, dashed, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

Verifichiamo che $M_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ è un denso di M. Innanzitutto ricordiamo che, essendo l'unione $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ densa in H, se F è un sottospazio chiuso di H di codimensione finita, in virtù del lemma 2.8 esiste n_0 tale che $n \geq n_0 \Rightarrow H_n + F = H$. Sia x in M ed $U \subset M$ un intorno aperto di x. Proveremo che $U \cap M_n \neq \varnothing$ purché n sia grande abbastanza, da cui seguirà certamente la tesi. Per il teorema di rappresentazione locale [Ab-Ro 67] esiste un sottoinsieme aperto $V \subset U$ ed un diffeomorfismo

$$\alpha\colon V \to V_1 \times V_2 \subset F_1 \times F_2 = H$$

tale che per $i = 1, 2$ (a) V_i è una palla nel sottospazio F_i di H, in cui F_1 ha dimensione finita ed F_2 ha codimensione finita; (b) $F_2 = \operatorname{Im}(df_x)$, $\alpha(x) = f(x)$; (c) $f \circ \alpha^{-1}(x_1, x_2) = \big(\eta(x_1, x_2), x_2\big)$.

Sia n abbastanza grande in modo tale che $H_n \cap (V_1 \times V_2) \neq \varnothing$ e $H_n + F_2 = H$. Indichiamo con F un complementare di $H_n \cap F_2$ in H_n. Possiamo trovare un diffeomorfismo

$$\beta\colon V \to W_1 \times W_2 \subset F \times F_2$$

in modo tale che $\beta(x) = f(x)$ e $f \circ \beta^{-1}$ sia della forma $f \circ \beta^{-1}(x_1, x_2) = \big(\bar{\eta}(x_1, x_2), x_2\big)$. Sia $y_2 \in W_2$ tale che $y_2 \in H_n$. Allora $\beta^{-1}(y_1, y_2) \in M_n$ per ogni y_1 in W_1. Dunque $U \cap M_n \neq \varnothing$.

□

Osservazione 2.39. La dimostrazione appena conclusa resta immutata nella sostanza quando in luogo di H si consideri uno spazio di Banach reale E di dimensione infinita, dotato di una base di Schauder e di partizioni dell'unità di classe C^∞.

Una filtrazione costruita come nel teorema precedente sarà detta anche una *filtrazione di Fredholm.*

Teorema 2.40. *Esiste una mappa di classe C^∞, Fredholm di indice zero, limitata e propria $f\colon M \to H$ trasversa ad H_n per ogni n in $\mathbb{N}$. In particolare, tutte le sottovarietà $M_n = f^{-1}(H_n)$ sono compatte.*

Dimostrazione. Per il corollario 2.34 sappiamo che una tale mappa f esiste, resta da dimostrare che le sottovarietà M_n sono compatte: poiché f è limitata si ha che $f(M) \subset \overline{B}_O(R)$, ove $\overline{B}_O(R)$ denota una palla chiusa di centro O e raggio R abbastanza grande, dunque, per ogni n

$$M_n = f^{-1}(H_n) = f^{-1}\big(H_n \cap \overline{B}_O(R)\big).$$

D'altra parte

$$H_n \cap \overline{B}_O(R) = \Big\{x \in H_n \times O^n \ : \ \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i^2 \leq R^2\Big\}$$

è un sottoinsieme chiuso e limitato di H_n, spazio vettoriale di dimensione finita, dunque (per il teorema di Heine-Borel) $H_n \cap \overline{B}_O(R)$ è un sottoinsieme compatto di H_n, e quindi è un compatto di H. Segue che, essendo $f\colon M \to H$ una mappa propria, M_n è una sottovarietà compatta. □

2.4 Filtrazioni di Fredholm totalmente geodetiche

Fissiamo una mappa di classe C^∞, Fredholm di indice zero, limitata e propria $f\colon M \to H$ trasversa ad H_n per ogni n in $\mathbb{N}$, ed una filtrazione di Fredholm (M_n) costruita come nel teorema 2.38 precedente.

Notazione. Se $U \subset M$ è un sottoinsieme, indicheremo con $n(U)$ il più piccolo intero n in $\mathbb{N}$ tale che $U \cap M_n \neq \varnothing$:

$$n(U) \overset{\text{def}}{:=} \min\big\{n \in \mathbb{N} \ : \ U \cap M_n \neq \varnothing\big\}.$$

Definizione 2.41 (Atlante layer forte). Un *atlante layer-forte per f* è un atlante numerabile $\{(\varphi_j, W_j)\}_{j\geq 1}$ su M avente le seguenti proprietà:

(i) $\{W_j\}_{j\geqslant 1}$ è un ricoprimento numerabile star-finito di M;

(ii) per ogni coppia di indici i, j tali che $W_i \cap W_j \neq \varnothing$, il cambiamento di coordinate $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ è una mappa di tipo $\mathcal{L}_{n(W_i)}(I)$ sul suo insieme di definizione, e cioè, scritto

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} = \big(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} - I\big) + I,$$

per ogni x in $\varphi_j(W_j \cap W_i)$ risulta $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x) - x \in H_{n(W_i)}$;

(iii) $f \circ \varphi_j^{-1}\colon \varphi_j(W_j) \longrightarrow H$ è una mappa di tipo $\mathcal{L}_{n(W_j)}(I)$, i.e., scritto

$$f \circ \varphi_j^{-1} = \big(f \circ \varphi_j^{-1} - I\big) + I,$$

per ogni x in $\varphi_j(W_j)$ risulta $\big(f \circ \varphi_j^{-1}(x) - x\big) \in H_{n(W_j)}$.

Osservazione 2.42. La proprietà (iii) della definizione 2.41 precedente implica la seguente proprietà:

(iii)′ Per ogni $n \geqslant n(W_j)$ e per ogni $z \in H$ risulta $\varphi_j^{-1}(z + H_n) = W_j \cap f^{-1}(z + H_n)$.

Infatti: ($\subset$) Siano $n \geq n(W_j)$ e $z \in H$ fissati. Sia w in W_j tale che $\varphi_j(w) \in z + H_n$. Dobbiamo provare che $f(w) \in z + H_n$. Sia $x \in H_n$ tale che $\varphi_j(w) = z + x$, i.e., $w = \varphi_j^{-1}(z + x)$. Per la proprietà (iii), $f(w) = f \circ \varphi_j^{-1}(z + x) = \big(f \circ \varphi_j^{-1}(z + x) - I(z + x)\big) + z + x \in H_{n(W_j)} + E_n + z = z + H_n$.

($\supset$) Siano $n \geq n(W_j)$ e $z \in H$ fissati. Sia $w \in W_j$ tale che $f(w) \in z + H_n$; dunque, posto $\varphi_j(w) = x$, si ha che $f \circ \varphi_j^{-1}(x) = f(w) \in z + H_n$. D'altra parte $f \circ \varphi_j^{-1}(x) = (f \circ \varphi_j^{-1}(x) - x) + x$, dunque $x \in z - (f \circ \varphi_j^{-1}(x) - x) + H_n$, ed essendo $(f \circ \varphi_j^{-1}(x) - x) \in H_{n(W_j)} \subset H_n$, si ha che $x \in z + H_n$. Dunque $w = \varphi_j^{-1}(x) \in \varphi_j^{-1}(z + H_n)$ e anche l'inclusione " $\supset$ " è dimostrata. ⌟

Osservazione 2.43. Dalla proprietà (iii)′ stabilita nell'osservazione 2.42, indicata con (W_j, φ_j) una carta layer-forte per M si ha che per ogni $n \geq n(W_j)$, $\varphi_j(W_j \cap M_n) \subset H_n$, dunque, per ogni $p \in W_j \cap M_n$,

$$d(\varphi_j)_p\big(T_p M_n\big) = T_{\varphi_j(p)} H_n = H_n,$$

o, ciò che è lo stesso, $T_p M_n = d(\varphi_j^{-1})_{\varphi_j(p)}(H_n)$.

Proposizione 2.44. *Sia $f\colon M \to H$ una mappa Fredholm di indice zero trasversa ad H_n per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste un atlante layer forte per f.*

Dimostreremo la proposizione 2.44 stabilendo i passi $1 - 3$ seguenti:

Passo 1. Ogni x in M ha un intorno aperto U_x tale che per ogni y in U_x e $n \geqslant n(U_x)$ (si ricordi che $n(U_x) = \min\{n \in \mathbb{N} : U_x \cap M_n \neq \varnothing\}$), df_y è trasverso ad H_n.

Dimostrazione. Per l'osservazione 2.26, $df_x(T_xM)$ è un sottospazio chiuso di $T_{f(x)}H \cong H$. Siccome f è Fredholm di indice zero, in particolare si ha che $\dim \operatorname{coker}(df_x) = \dim H/df_x(T_xM) < \infty$, dunque $df_x(T_xM)$ è un sottospazio chiuso di codimensione finita di H e per il lemma 2.8 esiste n tale che df_x sia trasverso a H_n, i.e., esiste H_n per cui $df_x(T_xM)+H_n = H$. Sia n_0 il più piccolo $n \in \mathbb{N}$ per cui $df_x(T_xM)+H_n = H$. Allora $x \notin M_{n_0-1}$, infatti se fosse $x \in M_{n_0-1}$ allora sarebbe $f(x) \in H_{n_0-1}$ e siccome per ipotesi f è trasversa a H_{n_0-1} risulterebbe $df_x(T_xM) + T_{f(x)}H_{n_0-1} = T_{f(x)}H$, ossia $df_x(T_xM) + H_{n_0-1} = H$, contro l'ipotesi di minimalità di n_0.

Sia U_x un intorno aperto di x tale che per ogni $y \in U_x$, $df_y(T_yM)+H_{n_0} = H$ e $U_x \cap M_{n_0-1} = \varnothing$. Allora $n_0 \leq n(U_x) = \min\{n \in \mathbb{N} : U_x \cap M_n \neq \varnothing\}$ ([10]). Chiaramente, se $n \geq n_0$, e dunque in particolare se $n \geq n(U_x)$, allora, essendo per ogni i, $H_i \subset H_{i+1}$, da $df_y(T_yM) + H_{n_0} = H$ segue $df_y(T_yM) + H_n = H$. Per cui, in definitiva, si è determinato un intorno aperto U_x di x tale che per ogni $y \in U_x$ e per ogni $n \geq n(U_x)$, $df_y(T_yM) + H_n = H$. □

Passo 2. Esiste un atlante $\{(\theta_i, U_i)\}_{i\geqslant 1}$ soddisfacente le condizioni (i) e (iii).

Dimostrazione. Per ogni x in M, sia U_x un intorno scelto come nel passo precedente. Consideriamo $\pi^m \circ f\colon U_x \to H^m$, ove $m = n(U_x) = \min\{n \in \mathbb{N} : U_x \cap M_n \neq \varnothing\}$. Siccome per ipotesi f è trasversa ad H_m, per la proposizione 2.6, il differenziale $d(\pi^m \circ f)_x$ è surgettivo ed il suo nucleo è un addendo diretto, ammette cioè complementare chiuso in T_xU_x. Quindi, cfr. definizione C.18, $\pi^m \circ f$ è una sommersione in x, e perciò, restringendo U_x se necessario, esiste una carta $\theta_x\colon U_x \to H_m \times H^m$ per cui la composizione $\pi^m \circ f \circ \theta_x^{-1}$ coincide identicamente con la proiezione π^m, i.e., il seguente diagramma è commutativo:

$$
\begin{tikzcd}
U_x \arrow[r, "\theta_x"] \arrow[d, "\pi^m\circ f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_m \times H^m \arrow[dl, bend left, "\pi^m"] \\
H^m &
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
U_x \arrow[d, "\pi^m\circ f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \theta_x(U_x) \arrow[l, "\theta_x^{-1}"'] \arrow[dl, bend left, "\pi^m"] \\
H^m &
\end{tikzcd}
$$

Osserviamo adesso che $f\circ\theta_x^{-1}\colon \theta_x(U_x) \to H_m \times H^m$ è chiaramente della forma $(u,v) \mapsto \big(f_1(u,v), v\big)$, dunque la carta (θ_x, U_x) soddisfa evidentemente ($H_m \times H^m \cong H_m \oplus H^m$) la proprietà (iii).

$$
\begin{tikzcd}
U_x \arrow[d, "f"'] & \theta_x(U_x) \arrow[l, "\theta_x^{-1}"'] \arrow[dd, bend left, "\pi^m"] \\
H \cong H_m \times H^m \arrow[d, "\pi^m"'] & \\
H^m &
\end{tikzcd}
$$

Chiaramente $f|_{\overline{W}_j}$ è una mappa propria perché per ipotesi $f\colon M \to H$ è una mappa propria.

Infine, per ottenere l'atlante richiesto basterà estrarre un raffinamento numerabile star-finito $(U_i)_{i\geq 1}$ di $(U_x)_{x\in X}$, avente per carte le opportune restrizioni delle carte θ_x, come indicato nel lemma A.9. □

[10] Infatti $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : U_x \cap M_n \neq \varnothing\}+1 \Rightarrow U_x \cap M_{n_0-1} \neq \varnothing$, $\lightning$, dunque $n_0 \neq \min\{n \in \mathbb{N} : U_x \cap M_n \neq \varnothing\}+1$. Se $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : U_x \cap M_n \neq \varnothing\} + 2$ allora $U_x \cap M_{n_0-2} \neq \varnothing$, e siccome, per ogni n, $M_n \subset M_{n+1}$, risulterebbe $U_x \cap M_{n_0-1} \neq \varnothing$, $\lightning$. Per induzione risulta quindi $n_0 \neq \min\{n \in \mathbb{N} : U_x \cap M_n \neq \varnothing\} + m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ per cui $n_0 - m \in \mathbb{N}$. Segue che $n_0 < \min\{n \in \mathbb{N} : U_x \cap M_n \neq \varnothing\} + 1$, ossia $n_0 \leq \min\{n \in \mathbb{N} : U_x \cap M_n \neq \varnothing\}$.

Passo 3. Esiste un raffinamento dell'atlante di cui al passo precedente che soddisfa anche la condizione (ii).

Dimostrazione. Scegliamo raffinamenti $(V_i)_{i\geq 1}$ e $(W_j)_{j\geq 1}$ del ricoprimento $(U_i)_{i\geq 1}$ come nel lemma A.10: sia dunque $(V_i)_{i\geq 1}$ un raffinamento shrunk di $(U_i)_{i\geq 1}$ e $(W_j)_{j\geq 1}$ un raffinamento star-finito di $(V_i)_{i\geq 1}$ tale che

$$W_j \subset V_{i(j)} \Rightarrow \mathrm{St}(W_j) \subset U_{i(j)}.$$

Definiamo $\varphi_j \colon W_j \to H$ mediante $\varphi_j := \theta_{i(j)}|_{W_j}$. Dunque $\{(\varphi_j, W_j)\}_j$ soddisfa ancora (i) e (iii). Verificheremo che, quando è definita, $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ è una $\mathcal{L}_{n(W_i)}(I)$-mappa, e cioè, posto

$$n(W_i) = \min\{n \in \mathbb{N} : W_i \cap M_n \neq \varnothing\},$$

risulta $\big(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x) - I(x)\big) \in H_{n(W_i)}$ per ogni x in $\varphi_j(W_i \cap W_j)$.

Supponiamo che $W_j \cap W_{j'} \neq \varnothing$ e poniamo $n(j) := n(U_{i(j)}) = \min\{n \in \mathbb{N} : U_{i(j)} \cap X_n \neq \varnothing\}$. È possibile scegliere α_j e $\alpha_{j'}$ in modo tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dr, bend left, "I+\alpha_j"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
W_j \cap W_{j'} \arrow[ur, bend left, "\varphi_j"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, bend right, "\varphi_{j'}"'] & {} & E \\
 & E \arrow[ur, bend right, "I+\alpha_{j'}"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] &
\end{tikzcd}$$

basta porre infatti $\alpha_j := f \circ \varphi_j^{-1} - I$ e $\alpha_{j'} := f \circ \varphi_{j'}^{-1} - I$. Allora α_j e $\alpha_{j'}$ hanno valori rispettivamente in $H_{n(j)}$ e $H_{n(j')}$, infatti, per la proprietà (iii), $\big(f \circ \varphi_j^{-1}(x) - I(x)\big) \in H_{n(j)}$ ed analogamente $\big(f \circ \varphi_{j'}^{-1}(x) - I(x)\big) \in H_{n(j')}$. Ora $n(j), n(j') \leq n(W_j)$, l'ultima disuguaglianza dovuta al fatto che, per costruzione, $W_j \subset \mathrm{St}(W_{j'}) \subset U_{i(j')}$.

Si ha che $(I + \alpha_j)\varphi_j = (I + \alpha_{j'})\varphi_{j'}$, da cui $\varphi_j \circ \varphi_{j'}^{-1} = I + \alpha_{j'} - \alpha_j(\varphi_j \circ \varphi_{j'}^{-1})$ ([11]). Segue che $\varphi_j \circ \varphi_{j'}^{-1}$ è una $\mathcal{L}_{n(W_j)}(I)$-mappa, infatti, essendo $n(j), n(j') \leq n(W_j)$, le immagini di α_j e $\alpha_{j'}$ che sono contenute in $H_{n(j)}$ e $H_{n(j')}$ rispettivamente, sono contenute a maggior ragione in $H_{n(W_j)}$, per cui da $\varphi_j \circ \varphi_{j'}^{-1} - I = \alpha_{j'} - \alpha_j(\varphi_j \circ \varphi_{j'}^{-1})$ segue che per ogni x in $\varphi_{j'}(W_j \cap W_{j'})$ $\big(\varphi_j \circ \varphi_{j'}^{-1}(x) - I(x)\big) \in H_{n(W_j)}$, e anche la proprietà (ii) è soddisfatta. $\square$

Fissata una mappa di classe C^∞ $f \colon M \to H$ Fredholm di indice zero, propria e trasversa ad H_n per ogni n in $\mathbb{N}$ fornita dal corollario 2.34, ed una filtrazione di Fredholm $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ costruita come nel teorema 2.38 precedente, consideriamo un atlante layer forte $\{(\varphi_j, W_j)\}_{j\geq 1}$ su M associato ad f, costruito come nella proposizione 2.44.

Teorema 2.45. *Sia $\{(\varphi_j, W_j)\}_{j\geq 1}$ un atlante layer forte per M. Allora esiste uno spray su M relativamente al quale tutte le sottovarietà M_n sono totalmente geodetiche. Inoltre, indicato con $\mathcal{E}_j \subset \varphi_j(W_j) \times H$ il dominio della mappa esponenziale di detto spray nella carta (φ_j, W_j), l'esponenziale* $\exp \colon \mathcal{E}_j \longrightarrow \varphi_j(W_j)$ *è della forma $(x, v) \mapsto x + v + \gamma_j(x, v)$, in cui $\gamma_j(x, v)$ è un elemento di $H_{n(W_j)}$, ove, si ricordi, $n(W_j) = \min\{n \in \mathbb{N} : W_j \cap M_n \neq \varnothing\}$.*

Dimostrazione. Si consideri su ciascuna carta (φ_j, W_j) lo spray banale come indicato nella dimostrazione della proposizione 2.21 e quindi si incolli spray banali siffatti utilizzando una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{W_j\}_{j\geq 1}$. Per la proprietà (iii)$'$ della definizione 2.41 di atlante layer forte si ha che $\varphi_j(W_j \cap M_{n(W_j)}) = H_{n(W_j)}$, quindi, su ogni carta (φ_j, W_j) la parte quadratica dello spray globale così costruito ha immagine contenuta in $H_{n(W_j)}$. Il teorema è quindi dimostrato invocando la proposizione 2.22, dalla cui prova segue che la mappa esponenziale è della forma richiesta e che le sottovarietà M_n sono totalmente geodetiche. $\square$

[11] Infatti $(I + \alpha_j)\varphi_j = (I + \alpha_{j'})\varphi_{j'}$ implica $(I + \alpha_j)\varphi_j \circ \varphi_{j'}^{-1} = (I + \alpha_{j'})\varphi_{j'} \circ \varphi_{j'}^{-1} = (I + \alpha_{j'})$ se e solo se $\varphi_j \circ \varphi_{j'}^{-1} = (I + \alpha_{j'}) - \alpha_j \circ \varphi_j \circ \varphi_{j'}^{-1}$.

2.5 Filtrazioni di Fredholm augmentate

Le filtrazioni di Fredholm possono essere raffinate ulteriormente: scopo primario di questa sezione è la costruzione di una classe speciale di intorni aperti delle sottovarietà M_n la cui unione costituisca un ricoprimento di M. Precisamente, equipaggiata M con un atlante layer forte come nella proposizione 2.44, dimostreremo il seguente importante teorema:

Teorema. Sia $(M_n)_{n\geq 0}$ una filtrazione di Fredholm totalmente geodetica di M. Allora esiste una famiglia $(Z_n)_{n\geq 0}$ di intorni aperti totalmente geodetici delle sottovarietà M_n tale che

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad Z_n \subset Z_{n+1} \qquad \text{e} \qquad M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n.$$

La costruzione che ci permetterà di ottenere intorni aperti siffatti culminerà nel teorema 2.65. Per dimostrare questo risultato avremo bisogno di introdurre alcuni strumenti topologici che ci permetteranno di semplificare notevolmente le dimostrazioni.

2.5.1 Introduzione

Nelle ipotesi della sezione precedente, in cui, in particolare, f è una Φ_0-mappa trasversa per ogni n alla sottovarietà H_n, consideriamo il seguente lemma:

Lemma 2.46. *Sia $\{(W_j, \varphi_j)\}_{j\in\mathbb{N}^+}$ un atlante layer-forte per la nostra mappa $f\colon M \to H$ Fredholm di indice zero, propria, limitata e trasversa a H_n per ogni n in $\mathbb{N}$. Poniamo per ogni n in $\mathbb{N}$*

$$Y_n := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{W_j : W_j \cap M_n \neq \varnothing\},$$

in modo tale che $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ $Y_n \subset Y_{n+1}$. Con queste notazioni ed in questa generalità, esiste un morfismo di fibrati $S\colon M \times H \to TM$ tale che, posto

$$S_n := S|_{Y_n\times H^n}\colon Y_n \times H^n \to TY_n,$$

risulta

(1). $S_n|_{Y_n\times H^{n+1}} = S_{n+1}|_{Y_n\times H^{n+1}}$;

(2). S_n è un'iniezione di fibrati;

(3). Se $W_j \cap M_n \neq \varnothing$, allora

$$(d\varphi_j) \circ S_n|_{W_j\times H^n}\colon W_j \times H^n \xrightarrow{S_n} TW_j \xrightarrow{d\varphi_j} d\varphi_j(W_j) \cong \varphi_j(W_j) \times H,$$

è della forma $(x, v) \mapsto \big(\varphi_j(x), \beta_j(x)v + v\big)$, in cui $\beta_j(x) \in \mathcal{L}(H^n, H)$ ha immagine in $H_{n(W_j)}$.

Osservazione 2.47. Per ogni n in $\mathbb{N}$, Y_n è costituito dall'insieme delle carte che "vedono" M_n. Chiaramente i sottoinsiemi Y_n sono aperti in M.

Osservazione 2.48. *Per ogni n in $\mathbb{N}$ risulta $M_n \subset Y_n$.* Infatti, se $p \in M_n$ allora, essendo $\{W_j\}$ un ricoprimento di M, esiste j in $\mathbb{N}$ per cui $p \in W_j$. Dunque $W_j \cap M_n \neq \varnothing$ e quindi, per come è definito Y_n, $Y_n \supset W_j \ni p$.

Dimostrazione. Sia $(\mu_j)_{j\geq 1}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $(W_j)_{j\geq 1}$ di M. Per ogni j, sia $S^j\colon W_j \times H \to TW_j$ definita da $S^j(x, v) := (d(\varphi_j)_x)^{-1}(v)$,

$$\varphi_j\colon W_j \subset M \xrightarrow{\cong} H, \quad x \in W_j \quad d(\varphi_j)_x\colon T_xW_j \xrightarrow{\cong} H, \quad S^j(x,\cdot\,) = \big(d(\varphi_j)_x\big)^{-1}\colon H \to T_xW_j.$$

Quindi si definisca $S\colon M \times H \to TM$ mediante $S(x, v) = \sum_j \mu_j(x)S^j(x, v)$.

(1): Siccome $H_n \subset H_{n+1}$ e perciò $H^{n+1} \subset H^n$, si ha che $Y_n \times H^{n+1} \subset Y_n \times H^n$. Inoltre, da $M_n \subset M_{n+1}$ segue che per ogni n in $\mathbb{N}$ $Y_n \subset Y_{n+1}$ e quindi $Y_n \times H^{n+1} \subset Y_{n+1} \times H^{n+1}$. Dunque

$$S_n|_{Y_n \times H^{n+1}} := \big(S|_{Y_n \times H^n}\big)|_{Y_n \times H^{n+1}} = S|_{Y_n \times H^{n+1}} = \big(S|_{Y_{n+1} \times H^{n+1}}\big)|_{Y_n \times H^{n+1}} =: S_{n+1}|_{Y_n \times H^{n+1}}.$$

Verifichiamo la proprietà *(2)* secondo cui S_n è un'iniezione di fibrati, ossia, in altri termini, S_n è un morfismo di fibrati la cui restrizione ad ogni fibra è un'applicazione lineare iniettiva. Fissato x in Y_n consideriamo

$$S_{n,x} := S_n|_{\{x\} \times H^n} \colon \{x\} \times H^n \to T_x Y_n$$

e verifichiamo che il suo nucleo è ridotto al solo vettore nullo, i.e.,

$$\ker S_{n,x} = \Big\{ v \in H^n \ : \ S(x,v) = \sum\nolimits_{i=1}^{h} \mu_{j(i)}(x) \, \big(d(\varphi_{j(i)})_x\big)^{-1}(v) = O \Big\} = \{O\}.$$

Ora $\mu_j \geq 0$, dunque la somma di cui sopra si annulla se e solo se per ogni i, $\big(d(\varphi_{j(i)})_x\big)^{-1}(v) = O$, se e solo se $v = O$.

Verifichiamo la proprietà *(3)*: supponiamo che $W_j \cap M_n \neq \varnothing$ (dunque $W_j \subset Y_n$), ed indichiamo con $j(1), \ldots, j(p)$ gli indici che occorrono nell'unione che definisce $\mathrm{St}(W_j)$ (si ricordi che $\{W_j\}_{j \geq 1}$ è un ricoprimento numerabile *star-finito*). Allora per $(x,v) \in W_j \times H^n \subset Y_n \times H^n$, essendo $(\mu_j)_{j \geq 1}$ *subordinata* al ricoprimento $\{W_j\}_{j \geq 1}$,

$$\begin{aligned}
(d\varphi_j) \circ S_n(x,v) &= (d\varphi_j) \circ S_{|Y_n \times H^n}(x,v) = (d\varphi_j) \circ \sum\nolimits_{i=1}^{p} \mu_{j(i)}(x) \, S^{j(i)}(x,v) \\
&= d(\varphi_j)_x \circ \sum\nolimits_{i=1}^{p} \mu_{j(i)}(x) \, \big(d(\varphi_{j(i)})_x\big)^{-1}(v) = \sum\nolimits_{i=1}^{p} \mu_{j(i)}(x) \, d(\varphi_j)_x \circ \big(d(\varphi_{j(i)})_x\big)^{-1}(v) \\
&= \sum\nolimits_{i=1}^{p} \mu_{j(i)}(x) \, d(\varphi_j)_x \circ d\big(\varphi_{j(i)}^{-1}\big)_{\varphi_{j(i)}(x)}(v) = \sum\nolimits_{i=1}^{p} \mu_{j(i)}(x) \, d\big(\varphi_j \circ \varphi_{j(i)}^{-1}\big)_{\varphi_{j(i)}(x)}(v).
\end{aligned}$$

Per la proprietà (ii) della definizione di atlante layer forte si ha che per ogni $y \in \varphi_{j(i)}(W_{j(i)} \cap W_j)$, $\varphi_j \circ \varphi_{j(i)}^{-1}(y) \in H_{n(W_j)} + I(y)$, e quindi

$$d\big(\varphi_j \circ \varphi_{j(i)}^{-1}\big)_{\varphi_{j(i)}(x)} \colon v \in \big\{\varphi_{j(i)}(x)\big\} \times H^n \longmapsto d\big(\varphi_j \circ \varphi_{j(i)}^{-1}\big)_{\varphi_{j(i)}(x)} v \in \big\{\varphi_j(x)\big\} \times \big(H_{n(W_j)} + v\big),$$

da cui, essendo $H_{n(W_j)}$ uno spazio vettoriale, la proprietà *(3)* segue.

□

2.5.2 Estensione degli omeomorfismi ed intorni standard

Definizione 2.49. Un'applicazione continua $f \colon X \to Y$ è detta un *omeomorfismo locale* se per ogni $x \in X$ esistono aperti $A \subset X$ e $B \subset Y$ tali che $x \in A$, $f(A) = B$ e la restrizione $f|_A \colon A \to B$ è un omeomorfismo.

Definizione 2.50. Siano M, N varietà di classe C^∞; un'applicazione $F \colon M \to N$ si dice un *diffeomorfismo* se è C^∞ e invertibile, con inversa anch'essa C^∞. Un'applicazione $F \colon M \to N$ si dice un *diffeomorfismo locale* se per ogni $m \in M$ esiste un aperto $U \subseteq M$ con $m \in U$ tale che $F(U) \subseteq N$ è aperto e la restrizione $F|_U \colon U \to F(U)$ è un diffeomorfismo.

Lemma 2.51. *Ogni omeomorfismo locale è un'applicazione aperta.*

Dimostrazione. Sia $f \colon X \to Y$ un omeomorfismo locale e sia $V \subset X$ un aperto. Vogliamo dimostrare che $f(V)$ è intorno di ogni suo punto, ossia che per ogni $y \in f(V)$ esiste un aperto $U \subset Y$ tale che $y \in U \subset f(V)$. Sia $x \in V$ tale che $f(x) = y$, per ipotesi esistono aperti $A \subset X$ e $B \subset Y$ tali che $x \in A$, $f(A) = B$ e la restrizione $f|_A \colon A \to B$ è un omeomorfismo. In particolare $y \in f(V \cap A)$, $U = f(V \cap A)$ è aperto in B e quindi anche in Y. □

Consideriamo il seguente teorema:

Teorema 2.52 (Estensione di Dugundji). *Sia X uno spazio metrico e Y uno spazio vettoriale topologico localmente convesso. Sia A un sottoinsieme chiuso di X ed $F\colon A \to Y$ una applicazione continua. Allora F ammette una estensione continua $\widetilde{F}\colon X \to Y$ tale che*

$$\widetilde{F}(X) \subset \operatorname{conv}\big(F(A)\big).$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si faccia riferimento a [Du 66] IX.6, pag. 188, oppure a [Be 75] 2.3, pag. 58. □

Nello scenario delineato da questo risultato, consideriamo il seguente teorema che in un certo senso ne costituisce una generalizzazione. Esso permetterà di rendere più chiare e semplificare molte delle costruzioni che verranno affrontate nel seguito.

Teorema 2.53 (Estensione degli omeomorfismi). *Siano X, Y spazi topologici paracompatti, ed E, F sottospazi chiusi di X, Y rispettivamente. Sia $f\colon X \to Y$ una applicazione continua tale che*

EO (i) *per ogni x in E, f è un omeomorfismo locale in x, ossia, $(\forall\, x \in E)$ esiste un intorno di x $U_x \subset X$ aperto in X tale che la restrizione di f a U_x è un omeomorfismo con l'immagine e l'immagine $f(U_x)$ è aperta in Y;*

EO (ii) *$f|_E\colon E \to F$ è bigettiva (e quindi è un omeomorfismo).*

Allora esistono M intorno aperto di E in X ed N intorno aperto di F in Y tale che $f|_M\colon M \to N$ è un omeomorfismo.

ADDENDUM: *Gli intorni M ed N possono essere scelti chiusi.*

Dimostrazione (ADDENDUM). Poiché X ed Y sono paracompatti, e quindi normali, esistono un intorno $M' \subseteq M$ di E in X, M' chiuso in X, ed un intorno $N' \subseteq N$ di F in Y, N' chiuso in Y; f è un omeomorfismo fra $M'' := M' \cap f^{-1}(N')$ intorno di E chiuso in X e $N'' := f(M'') \subset N$ intorno di F chiuso in Y. □

Poiché in letteratura non si è trovata una dimostrazione completa del teorema 2.53, presenteremo nel seguito una dimostrazione dettagliata:

Dimostrazione. Senza ledere la generalità si può supporre che f sia una mappa aperta. Per la proprietà **EO** (i) esiste $\mathcal{U}$, ricoprimento aperto di E, tale che per ogni U in $\mathcal{U}$, $f(U)$ è aperto in Y e $f|_U\colon U \to f(U)$ è un omeomorfismo.

Poiché X è paracompatto, in virtù di un noto teorema dovuto a Stone [Du 66, 8.3, p. 168], esiste $\mathcal{V}$, raffinamento aperto baricentrico (cfr. def. A.2) del ricoprimento aperto $\mathcal{U} \cup \{X \setminus E\}$ di X.

La famiglia di aperti $\mathcal{T} := \{f(V) \setminus f(E \setminus V)\}_{V \in \mathcal{V}} \cup \{Y \setminus F\}$ è un *ricoprimento* di Y. Infatti se $y \in Y$ si ha che o $y \in Y \setminus F \in \mathcal{T}$ oppure $y = f(x) \in F$ per un $x \in E$; poiché $\mathcal{V}$ è un ricoprimento di E esiste $V \in \mathcal{V}$ tale che $x \in V$ e per **EO** (ii) $f(x) \notin f(E \setminus V)$, quindi $y \in f(V) \setminus f(E \setminus V) \in \mathcal{T}$, e $\mathcal{T}$ è un ricoprimento di Y.

Poiché Y è paracompatto esiste $\mathcal{W}$ ricoprimento aperto di Y che raffina $\mathcal{T}$, $\mathcal{W}$ localmente finito. Per ogni $W \in \mathcal{W}$ tale che $W \cap F \neq \varnothing$ e per ogni $V \in \mathcal{V}$ tale che $W \subseteq f(V) \setminus f(E \setminus V)$, consideriamo l'insieme

$$\mathcal{O}_{V,W} := V \cap f^{-1}\Bigg(W \setminus \bigcup_{\substack{W' \in \mathcal{W} \\ W \cap W' \cap F = \varnothing}} \overline{W'}\Bigg).$$

Gli $\mathcal{O}_{V,W}$ sono *aperti* (perché $\mathcal{W}$ e quindi anche $\{\overline{W}\}_{W \in \mathcal{W}}$ è localmente finita, e unioni di chiusi di famiglie localmente finite sono chiuse) inoltre costituiscono un *ricoprimento* di E: se $x \in E$ allora $f(x) \in F$ ed esiste un $W \in \mathcal{W}$ tale che $f(x) \in W \cap F \neq \varnothing$; poiché $\mathcal{W}$ raffina $\mathcal{T}$ vi è un elemento di

$\mathcal{T}$, necessariamente della forma $f(V)\setminus f(E\setminus V)$ con $V\in\mathcal{V}$, tale che $W\subseteq f(V)\setminus f(E\setminus V)$. Dunque $x\in V$. Si osservi che, se $W'\in\mathcal{W}$ e $W\cap W'\cap F=\varnothing$, essendo $f(x)\in F$, risulta $f(x)\notin\overline{W'}$. Perciò

$$f(x)\in W\setminus\bigcup_{W\cap W'\cap F=\varnothing}\overline{W'}$$

e quindi $x\in\mathcal{O}_{V,W}$. Sia ora $M:=\bigcup\mathcal{O}_{V,W}$. Allora $f|_M$ è iniettiva (e quindi, poiché è aperta, è un omeomorfismo con l'aperto $N:=f(M)$ di Y). Infatti, siano $x_1\in\mathcal{O}_{V_1,W_1}$ e $x_2\in\mathcal{O}_{V_2,W_2}$ tali che $f(x_1)=f(x_2)=y$. Allora

$$y\in W_1\setminus\bigcup_{\substack{W'\in\mathcal{V}\\ W_1\cap W'\cap F=\varnothing}}\overline{W'},$$

e anche $y\in W_2$, quindi $W_1\cap W_2\cap F\neq\varnothing$. Inoltre

$$W_1\cap W_2\cap F\subseteq f(V_1)\cap f(V_2)\cap f(E\setminus V_1)^c\cap f(E\setminus V_2)^c.$$

Perciò $V_1\cap V_2\neq\varnothing$ (se $y\in W_1\cap W_2\cap F\Rightarrow y=f(x)$ con $x\in E$; $x\notin E\setminus V_1$ e $x\notin E\setminus V_2$ e quindi $x\in V_1\cap V_2\neq\varnothing$). Quindi $\exists\, U\in\mathcal{U}$ tale che $\mathcal{O}_{V_1,W_2}\cup\mathcal{O}_{V_2,W_2}\subseteq V_1\cup V_2\subseteq U$ e poiché $f|_U$ è iniettiva segue $x_1=x_2$.

□

Definizione 2.54. Dato un fibrato vettoriale $\beta\colon B\to M$ con struttura Hilbertiana assegnata, se $\rho\colon M\to\mathbb{R}^+$ è una assegnata funzione continua, denoteremo con $B(\rho)$ l'insieme

$$B(\rho):\overset{\text{def}}{=}\big\{v\in B\ :\ \|v\|_{\beta(v)}<\rho\big(\beta(v)\big)\big\},$$

in cui $\|v\|_{\beta(v)}$ denota la norma Hilbertiana[12] di v nella fibra sopra $\beta(v)$. Specificatamente, se $\pi_1\colon M\times H\to M$ è un fibrato Hilbertiano banale su M a fibra costante H, denoteremo con $M\times\rho H$ l'insieme

$$M\times\rho H:=(M\times H)(\rho)=\big\{(x,v)\in M\times H\ :\ \|(x,v)\|_x=\|v\|<\rho(x)\big\},$$

in cui $\|\cdot\|$ denota la norma indotta dal prodotto scalare di H. In particolare, per ogni x in M, $\{x\}\times\rho H=\big\{(x,v)\ :\ v\in H\ \wedge\ \|v\|<\rho_x\big\}$.

Nelle ipotesi e nelle notazioni precedentemente introdotte consideriamo il seguente lemma:

Lemma 2.55. *Esiste una funzione continua $\rho\colon M\to\mathbb{R}^+$ ed un ricoprimento aperto numerabile star-finito $(V_i)_{i\geq 1}$ di M tale che*

(a) la mappa esponenziale è definita su $S(M\times\rho H)$;

(b) per ogni $i\in\mathbb{N}^+$ esiste $j=j(i)$ tale che

$$(\forall\, x\in V_i)\qquad \exp_x\big[S\big(\{x\}\times\rho H\big)\big]\subset W_{j(i)}.$$

Dimostrazione. Sia $\{(W_j,\varphi_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ un atlante numerabile per la nostra varietà M. Fissato $j\in\mathbb{N}$ e $x\in W_j$, per la continuità della mappa esponenziale esiste un intorno $D_j\subset TW_j$ della sezione nulla tale che $\exp(D_j)\subset W_j$.

Indichiamo con $\tau\colon TW_j\to W_j$ la restrizione a TW_j della proiezione $TM\to M$. Sia $\delta\colon W_j\to\mathbb{R}^+$ una funzione continua tale che

$$TW_j(\delta)=\big\{v\in TW_j\ :\ \|v\|_{\tau(v)}<\delta\big(\tau(v)\big)\big\}\subset D_j.$$

Posto $V_x:=\{x'\in W_j\ :\ \delta(x')>\delta(x)/2\}$, allora chiaramente $V_x\subset W_j$ è un sottoinsieme aperto di M, inoltre

$$\exp\big[TV_x\big((1/2)\delta(x)\big)\big]\subset W_j \tag{2.5.1}$$

[12] Si veda la sottosezione C.2.2 per la definizione e le proprietà principali dei fibrati Hilbertiani.

(infatti $v \in TV_x\big((1/2)\delta(x)\big) \Leftrightarrow v \in TV_x$ e $\|v\|_{\tau(v)} < \frac{1}{2}\delta(x)$; d'altra parte, siccome $\tau(v) \in V_x$, risulta $\delta\big(\tau(v)\big) > \frac{1}{2}\delta(x)$ e quindi $\|v\|_{\tau(v)} < \delta\big(\tau(v)\big)$, i.e., $v \in TW_j(\delta)$; infine, siccome per costruzione $TW_j(\delta) \subset D_j$, si ottiene che $\exp\big[TV_x\big((1/2)\delta(x)\big)\big] \subset \exp\big[TW_j(\delta)\big] \subset \exp(D_j)$, ed essendo per costruzione $\exp(D_j) \subset W_j$ si deduce l'equazione 2.5.1.)

Sia $\{V_i\}_{i\geq 1}$ un raffinamento star-finito del ricoprimento aperto $\{V_x\}_{x\in M}$ ([13]). Dunque per ogni i esiste $x = x_i$ tale che $V_i \subset V_{x_i}$. Posto $\delta_i := (1/2)\delta(x_i)$, definiamo $\rho_j := \inf_{i\geq 1}\{\delta_i \,:\, V_j \cap V_i \neq \varnothing\}$. Sia $\{\mu_j\}_{j\geq 1}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{V_j\}_{j\geq 1}$, e definiamo la funzione $\rho\colon M \to \mathbb{R}^+$ ponendo $\rho(x) := \sum_{j\geq 1} \mu_j(x)\rho_j$.

Sia $x \in V_i \subset V_{x_i}$ arbitrario. Allora per qualche $j \in \mathbb{N}^+$ si ha che

$$\exp\big[TV_i(\delta_i \mathit{1})\big] \subset W_j, \tag{2.5.2}$$

infatti $TV_i(\delta_i \mathit{1}) = TV_i\big((1/2)\delta(x_i)\mathit{1}\big)$ e l'inclusione 2.5.2 segue da (2.5.1); inoltre, siccome

$$\rho(x) = \sum\nolimits_{j\geq 1} \mu_j(x)\rho_j \leq \sum\nolimits_{j\geq 1} \mu_j(x)\delta_i = \delta_i,$$

dall'inclusione 2.5.2 si deduce

$$\exp_x\big[T_xV_i(\rho)\big] \subset W_j, \tag{2.5.3}$$

infatti $T_xV_i(\rho) \overset{\text{def}}{=} \big\{v \in T_xV_i \,:\, \|v\|_x < \rho(x)\big\}$ e quindi $v \in T_xV_i(\rho) \Rightarrow \|v\|_x < \rho(x) \leq \delta_i = (1/2)\delta(x_i)$, inoltre $TV_i(\delta_i \mathit{1}) = \{v \in TV_i \,:\, \|v\|_{\tau(v)} < \delta(x_i)/2\}$, da cui $v \in T_xV_i(\rho) \Rightarrow v \in TV_i(\delta_i \mathit{1})$ e quindi per l'equazione 2.5.2 risulta $\exp_x(v) \in W_j$.

Ricordiamo che per (x, v) in $M \times H$ è definita $S(x, v) = \sum_j \mu_j(x)\big(d(\varphi_j)_x\big)^{-1}(v)$, inoltre si ricordi che per definizione $M \times \rho H = \{(x, v) \in M \times H \,:\, \|(x, v)\|_x = \|v\| < \rho(x)\}$, dunque

$$S\big(M \times \rho H\big) = \big\{S(x, v) \,:\, (x, v) \in M \times H \ \text{ e } \ \|v\| < \rho(x)\big\}.$$

Siccome S è una mappa continua, $S(M \times \rho H)$ è un intorno della sezione nulla di TM, inoltre, a meno di scegliere ρ più piccola se necessario, possiamo supporre che $S(M \times \rho H)$ sia contenuto nel dominio della mappa esponenziale.

Per il punto *(b)*, in virtù della relazione 2.5.3 secondo cui, per ogni i fissato e per ogni $x \in V_i$ esiste almeno un indice $j = j(i)$ tale che

$$\exp_x\big(\big\{v \in T_xV_i \,:\, \|v\|_x < \rho(x)\big\}\big) \subset W_{j(i)},$$

a meno di considerare ρ più piccola se necessario e di estrarre un ulteriore raffinamento star-finito di $\{V_i\}_{i\geq 1}$, si può sempre supporre che

$$\exp_x\big[S\big(\{x\} \times \rho H\big)\big] = \exp_x\Big\{\sum\nolimits_j \mu_j(x)\,\big(d(\varphi_j)_x\big)^{-1}(v) \,:\, \|v\| < \rho(x)\Big\} \subset W_{j(i)},$$

e anche la richiesta *(b)* è soddisfatta.

□

Osservazione 2.56. Nella dimostrazione del lemma 2.55, $\{(W_j, \varphi_j)\}$ è un atlante qualunque di M, i.e. non necessariamente layer-forte.

Definizione 2.57 (Applicazione T_n). Nelle notazioni del lemma 2.46, consideriamo la mappa $T_n :\overset{\text{def}}{=} \exp \circ S_n$ definita in un intorno della sezione nulla del fibrato banale $Y_n \times H^n$, intorno applicato da S_n entro il dominio della mappa esponenziale (l'esistenza di un tale intorno è garantita dal punto (a) del lemma 2.55 precedente, basterà infatti intersecare $M \times \rho H$ con $Y_n \times H^n$), a valori in M.

Proposizione 2.58. *T_n subordina un diffeomorfismo fra un intorno aperto di $M_n \times \{0\}$ in $M_n \times H^n$ e un intorno aperto di M_n in M, esistono cioè intorni aperti $U \subset M_n \times H^n$ e $V \subset M$ di $M_n \times \{0\}$ e M_n rispettivamente tali che $T_n|_U \colon U \to V$ è un diffeomorfismo.*

[13]Chiaramente $\{V_x\}_{x\in M}$ è un ricoprimento di M, infatti $(\forall\, x \in M)\ x \in V_x$.

Dimostrazione. Indicati con E ed F i sottospazi chiusi $M_n \times \{0\}$ e M_n di $M_n \times H^n$ ed M rispettivamente, consideriamo l'applicazione $T_n \colon M_n \times H^n \to M$. Chiaramente

$$T_n|_{M_n \times \{0\}} \colon M_n \times \{0\} \to M_n$$

è un omeomorfismo, infatti, per ogni $x \in M_n$ si ha che $T_n(x, 0) = x$. Affinché si possa invocare il teorema 2.53 di estensione degli omeomorfismi occorre verificare la proprietà **EO** (i): per ogni $(x_0, 0)$ in $M_n \times \{0\}$, la restrizione di T_n a un intorno $U_{(x_0,0)} \subset M_n \times H^n$ di $(x_0, 0)$ è un omeomorfismo con l'immagine e l'immagine $T_n(U_{(x_0,0)}) \subset M$ è aperta in M. Proviamo dunque che

EO (i′) T_n è un diffeomorfismo locale in ogni punto (x_0, O) di $M_n \times \{O\}$.

Quest'ultima proprietà è una conseguenza immediata dell'espressione di T_n in una carta locale definita in un intorno di $(x_0, 0)$ in $H_n \times H^n$ a valori in $H = H_n \times H^n$ (cfr. teorema 2.45):

$$(x, v) \mapsto x + v + \alpha(x, v). \tag{2.5.4}$$

Il differenziale della mappa 2.5.4 nel punto (x_0, O) è l'applicazione identica, infatti $d\alpha_{(x_0,O)} = 0$. Dunque, in carte locali, il differenziale di T_n in ogni punto (x_0, O) di $M_n \times \{O\}$ è id: $H \to H$, quindi è invertibile e per il teorema della mappa inversa segue che T_n è un diffeomorfismo locale in (x_0, O) e anche la proprietà **EO** (i′) e quindi la **EO** (i) è verificata.

Sono soddisfatte tutte le ipotesi del teorema 2.53, dunque esistono intorni aperti $U \subset M_n \times H^n$ e $V \subset M$ di $M_n \times \{0\}$ e M_n rispettivamente tali che $T_n|_U \colon U \to V$ è un diffeomorfismo.

□

Definizione 2.59 (Intorno standard). Chiameremo *intorno standard* di M_n in M un intorno aperto $\mathcal{D}_n$ della sezione nulla di $M_n \times H^n$ tale che T_n induca un diffeomorfismo di $\mathcal{D}_n$ con un intorno aperto di M_n in M ([14]). In simboli

$$T_n|_{\mathcal{D}_n} \colon \mathcal{D}_n \xrightarrow{\cong} T_n(\mathcal{D}_n) \qquad \zeta(H^n) \subset \boldsymbol{\mathcal{D}_n} \subset M_n \times H^n, \quad M_n \subset \boldsymbol{T_n(\mathcal{D}_n)} \subset M \quad \textbf{aperti.}$$

L'intorno standard sarà detto *di raggio* r se $\mathcal{D}_n = M_n \times rH^n$, ove $r \colon M_n \to \mathbb{R}^+$ è una funzione continua, in cui, si ricordi, $M_n \times rH^n$ denota l'insieme $\{(x, v) \in M_n \times H^n \;:\; \|v\| < r(x)\}$.

Osservazione 2.60. Gli intorni $\{M_n \times \rho H^n\}_\rho$ ottenuti facendo variare ρ nello spazio delle funzioni continue $M_n \to \mathbb{R}^+$, costituiscono un sistema fondamentale di intorni di $M_n \times \{0\}$ in $M_n \times H^n$.

Proposizione 2.61. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste una funzione continua $r_n \colon M_n \to \mathbb{R}^+$ e un intorno standard di M_n in M di raggio r_n.*

Dimostrazione. Fissato $n \in \mathbb{N}$, un intorno standard di M_n in M di raggio ρ è un intorno aperto di M_n in M diffeomorfo a un intorno aperto $M_n \times \rho H^n$ della sezione nulla di $M_n \times H^n$.

La proposizione 2.58 fornisce intorni aperti $U \subset M_n \times H^n$ e $V \subset M$ rispettivamente di $M_n \times \{0\}$ e M_n tali che $T_n|_U \colon U \to V$ sia un diffeomorfismo.

Inoltre, in virtù dell'osservazione 2.60, esiste una funzione continua $\rho \colon M_n \to \mathbb{R}^+$ in corrispondenza della quale $M_n \times \rho H^n \subset U$. Segue che

$$T_n|_{M_n \times \rho H^n} \colon M_n \times \rho H^n \subset U \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow T_n\big(M_n \times \rho H^n\big) \subset V.$$

Chiaramente $T_n\big(M_n \times \rho H^n\big) \supset M_n$, infatti $T_n\big(M_n \times \rho H^n\big) \supset T_n\big(M_n \times \{0\}\big) = M_n$.

Infine, poiché dalla proprietà (i) del teorema di estensione degli omeomorfismi segue in particolare che T_n è una mappa aperta su un opportuno intorno di $M_n \times \{0\}$ in $M_n \times H^n$, a meno di scegliere ρ più piccola se necessario, si può supporre che

$$T_n\big(M_n \times \rho H^n\big) \subset M$$

sia un aperto. Posto $r_n := \rho$, $\mathcal{D}_n := M_n \times r_n H^n$ è un intorno standard di M_n come richiesto.

□

[14] Si ricordi che T_n è definito su un intorno della sezione nulla di $Y_n \times H^n$ (cfr. definizione 2.57) e che inoltre $\mathcal{D}_n \subset M_n \times H^n \subset Y_n \times H^n$, dunque è possibile considerare la restrizione di T_n a $\mathcal{D}_n$.

Il prossimo obiettivo sarà la costruzione di una funzione globale "r" definita su tutta la varietà M, $r \in C(M, \mathbb{R}^+)$, in modo tale che, per ogni n in $\mathbb{N}$, $\mathcal{D}_n = M_n \times r|_{M_n} H^n$ sia un intorno standard di M_n. Questa costruzione sarà affrontata nella dimostrazione della proposizione 2.63: sfrutteremo alcune delle idee che abbiamo utilizzato per dimostrare la proposizione precedente, inoltre, come è facile intuire, le partizioni dell'unità saranno il mezzo tecnico per definire una funzione continua r globalmente definita sulla varietà.

Prima di affrontare questa costruzione che, seppure tecnica, è veramente molto interessante –si percepisce come tutti gli ingredienti che abbiamo introdotto fino a questo punto si combinino l'uno con l'altro in modo ineccepibile e conclusivo– cercheremo di rispondere alla seguente domanda: fissato x_0 in M, quanto può essere grande $r(x_0)$? Chiaramente la sua grandezza dipende in primo luogo dal raggio della palletta centrata in x_0 su cui la mappa T_n è localmente invertibile. Vedremo come si ottiene la palletta dal teorema di inversione locale e forniremo una stima uniforme in n sul raggio. Precisamente, indicato con x_0 in M un punto generico, determineremo un intorno A_{x_0} *uniforme* in n su cui T_n risulterà iniettiva, cosa che non stupisce dato che le T_n sono tutte molto simili fra loro. Dunque studieremo anche quanto ridurre $r(x_0)$ in modo da ottenere un aperto su cui T_n è iniettiva.

Una risposta esaustiva a tutto questo è contenuta nella dimostrazione del seguente lemma:

Lemma 2.62. *Per ogni punto x_0 in M esiste un intorno A_{x_0} e un numero reale positivo d_{x_0} tale che, per ogni $n \geq 0$,*

$$T_n|_{(A_{x_0} \cap M_n) \times d_{x_0} H^n} \colon (A_{x_0} \cap M_n) \times d_{x_0} H^n \longrightarrow M$$

è un diffeomorfismo con l'immagine.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in M$, $(V_i)_{i \geq 1}$ il ricoprimento fornito dal lemma 2.55, ed i un indice tale che $x_0 \in V_i \subset M$. Per il lemma 2.55 esiste una funzione $\rho \colon M \to \mathbb{R}^+$ tale che la mappa esponenziale è definita su $S\big(M \times \rho H\big)$, e dunque su $S_n\big(V_i \times \rho H_n\big)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. È dunque ben definita la mappa

$$T_n|_{V_i \times \rho H^n} := \exp \circ S_n|_{V_i \times \rho H^n} \colon V_i \times \rho H^n \longrightarrow M. \tag{2.5.5}$$

Indicato con $(\varphi_j, W_j)_{j \geqslant 1}$ un atlante layer-forte di M (costruito per esempio come indicato dalla Proposizione 2.44), in virtù del teorema 2.45, l'espressione locale della mappa (2.5.5) in una carta $(\varphi_{j(i)}, W_{j(i)})$ è, per ogni $n \geq n_0$, $(x, v) \mapsto x + v + \alpha_{j(i)}(x, v)$, in cui $\alpha_{j(i)}(x, v)$ è un elemento di H_{n_0} e abbiamo posto $n_0 = n(W_{j(i)})$.

Si noti che, per ogni $x \in V_i$, $\alpha_{j(i)}(x, O) = O \in H_{n_0}$, infatti:

$$\begin{aligned} T_n(x, O) &= \exp\big(S_n(x, O)\big) = \exp\Big(\sum\nolimits_h \mu_h(x)\big(d(\varphi_h)_x\big)^{-1}(O)\Big) = \exp(O_x) = x \\ &= x + O + \alpha_{j(i)}(x, O), \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

e quindi $\alpha_{j(i)}(x, O) = O$.

Nella carta $(\varphi_{j(i)}, W_{j(i)})$ consideriamo il differenziale parziale di α_i rispetto alla prima variabile (d'ora in poi scriveremo per semplicità di notazione α_i in luogo di $\alpha_{j(i)}$):

$$\alpha_i \colon V_i \times \rho H^n \longrightarrow H_{n_0} \subset \varphi_{j(i)}(W_{j(i)}), \qquad d_1\alpha_i \colon V_i \times \rho H^n \longrightarrow \mathcal{L}(H, H_{n_0}).$$

Allora *(i)* $d_1\alpha_i$ è una mappa continua, inoltre *(ii)* $d_1\alpha_i(x_0, O) = d[\alpha_i(\cdot, O)]_{x_0}$ è l'operatore nullo (cfr. eq. 2.5.6). A meno di identificare i punti della varietà con i punti del modello, esiste un intorno convesso A_{x_0} di x_0 in V_i ed un numero reale $d_{x_0} > 0$ tale che

$$x \in A_{x_0}, \quad \|v\| < d_{x_0} \quad \Longrightarrow \quad 0 < d_{x_0} < \rho(x), \quad \big\|d_1\alpha_i(x, v)\big\| < 1/2. \tag{2.5.7}$$

Proviamo che, per ogni $n \geq n_0$, T_n è iniettivo su $(A_{x_0} \cap M_n) \times d_{x_0} H^n$. Per questo si osservi che se $T_n(x, v) = T_n(y, w)$ allora $x + v + \alpha_i(x, v) = y + w + \alpha_i(y, w)$, in cui $v, w \in H^n \subset H^{n_0}$ sono tali che $\|v\|, \|w\| < d_{x_0}$, $\alpha_i(x, v), \alpha_i(y, w) \in H_{n_0} \subset H_n$ e x, y appartengono all'immagine di $A_{x_0} \cap M_n$ in H mediante la carta locale $\varphi_{j(i)}$.

Si ricordi adesso che per la proprietà (iii)$'$ della Definizione 2.41 di atlante layer forte, per ogni $n \geqslant n_0$ risulta $\varphi_{j(i)}^{-1}(H_n) = W_{j(i)} \cap M_n$, dunque, in particolare, x, y sono punti di H_n e quindi da $H_n \ni x - y + \alpha_i(x,v) - \alpha_i(y,w) = w - v \in H^n$ segue che $w - v = 0 \in H$, i.e., $v = w$ e $x + \alpha_i(x,v) = y + \alpha_i(y,v)$. Proviamo che risulta anche $x = y$. Per questo basti osservare che per il teorema del valor medio di Lagrange (il segmento di estremi x, y è contenuto in A_{x_0}, essendo $x, y \in A_{x_0}$ e quest'ultimo convesso per costruzione)

$$\begin{aligned}\|x-y\| = \|\alpha_i(x,v) - \alpha_i(y,v)\| &\leq \sup_{t\in[0,1]} \left\| d\big[\alpha_i(\cdot,v)\big]_{tx+(1-t)y}(x-y)\right\| \\ &\leq \sup_{t\in[0,1]} \left\| d\big[\alpha_i(\cdot,v)\big]_{tx+(1-t)y}\right\| \|x-y\| \leq \frac{1}{2}\|x-y\|,\end{aligned}$$

in cui l'ultima disuguaglianza segue da (2.5.7). Dunque $x = y$ e quindi la restrizione di T_n a $(A_{x_0} \cap M_n) \times d_{x_0} H^n$ è iniettiva.

Infine, siccome la rappresentazione in carte locali del differenziale di T_n in ogni punto $(x_0, 0)$ di $M_n \times \{O\}$ è id: $H \to H$ (cfr. dim. prop. 2.58), in virtù del più volte citato teorema 2.53 di estensione degli omeomorfismi, a meno di scegliere ρ sufficientemente piccolo, T_n è un diffeomorfismo locale su $M_n \times \rho H^n$. Quest'ultima proprietà insieme alla globale iniettività appena dimostrata permette di concludere che

$$T_n|_{(A_{x_0}\cap M_n)\times d_{x_0}H^n} \colon (A_{x_0} \cap M_n) \times d_{x_0} H^n \longrightarrow M$$

è un diffeomorfismo con l'immagine, come desiderato.

□

Procediamo finalmente con la costruzione di una funzione globale "r" definita su tutta la varietà M, $r \in C(M, \mathbb{R}^+)$, in modo tale che $\mathcal{D}_n = M_n \times r|_{M_n} H^n$ sia un intorno standard di M_n per ogni n in $\mathbb{N}$. Utilizziamo l'ipotesi di esistenza di partizioni dell'unità e incolliamo opportunamente le varie mappe costruite nella proposizione 2.61, in virtù della proprietà di uniformità sancita dal lemma 2.62 precedente.

Proposizione 2.63. *Esiste una funzione continua $r\colon M \to \mathbb{R}^+$ per cui ogni M_n ha un intorno standard in M di raggio $r|_{M_n}$.*

Dimostrazione. Sia $(A_s)_{s\geq 1}$ un raffinamento aperto numerabile star-finito di $(A_x)_{x\in M}$. Per ogni $s \geq 1$, fissato $x_s \in M$ tale che $A_s \subset A_{x_s}$, sia $d\colon M \to \mathbb{R}^+$ una funzione continua tale che, per ogni $s \geq 1$, $d|_{A_s} < d_{x_s}$. Una tale funzione d può essere costruita in questo modo: sia $(\mu_s)_{s\geq 1}$ una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $(A_s)_{s\geq 1}$; posto $m_r := \min\{d_{x_t} : A_t \cap A_r \neq \varnothing\}$, si definisca $d(x) := \sum_{r\geq 1} \mu_r(x)\, m_r/2$. Allora $d\colon M \to \mathbb{R}^+$ è tale che $d|_{A_s} < d_{x_s}$, infatti, preso comunque $x \in A_s$, per ogni $r \geq 1$ tale che $\mu_r(x) \neq 0$ si ha che $x \in \operatorname{supp}(\mu_r) \subset A_r$, dunque $A_s \cap A_r \neq \varnothing$ e $m_r \leq d_{x_s}$. Segue che $d(x) \leq (d_{x_s}/2) \sum_{r\geq 1} \mu_r(x) = d_{x_s}/2$.

Per il lemma A.10, esiste un raffinamento shrunk $(B_s)_{s\geq 1}$ di $(A_s)_{s\geq 1}$ ed un raffinamento star-finito $(C_t)_{t\geq 1}$ di $(B_s)_{s\geq 1}$, tale che, indicato con $s(t)$ l'indice in corrispondenza del quale $C_t \subset B_{s(t)}$, risulta $\operatorname{St}(C_t) \subset A_{s(t)}$.

Ora, come indicato dal lemma 2.55, esiste una funzione continua $r\colon M \to \mathbb{R}^+$ ed un ricoprimento aperto star-finito $(D_u)_{u\geq 1}$ di M tale che per ogni u esiste $t = t(u)$ per cui

$$T_n(D_u \times rH^n) = T_n\big(\{(x,v) \in D_u \times H^n \ : \ \|v\| < r(x)\}\big) \subset C_{t(u)} \tag{2.5.8}$$

per $n \geq n\big(C_{t(u)}\big) = \min\{n \in \mathbb{N} : C_{t(u)} \cap M_n \neq \varnothing\}$. Si osservi che, (i) in virtù dell'Osservazione 2.56, non è richiesto che $(C_t)_{t\geq 1}$ sia un atlante *layer-forte* per M; (ii) come si desume dalla dimostrazione del lemma 2.55, il ricoprimento $(D_u)_{u\geq 1}$ costituisce un raffinamento di $(C_t)_{t\geq 1}$; inoltre, (iii) se r è una funzione che soddisfa (2.5.8), allora ogni altra funzione $s < r$ soddisfa a maggior ragione (2.5.8), dunque, senza ledere la generalità, si potrà supporre $r < d$.

Siano $(x,v), (y,w) \in M_n \times rH^n$ tali che $T_n(x,v) = T_n(y,w)$. Se scegliamo indici u, u' in modo tale che $x \in D_u$ e $y \in D_{u'}$ ([15]), allora $T_n(x,v) \in C_{t(u)}$ e $T_n(y,w) \in C_{t(u')}$ da cui segue che

[15] Tali indici esistono perché $(D_u)_{u\geq 1}$ costituisce un ricoprimento di M e dunque di M_n, per ogni n.

$C_{t(u)} \cap C_{t(u')} \neq \varnothing$, dunque, per costruzione, esiste un A_s con $C_{t(u)} \cup C_{t(u')} \subset \mathrm{St}(C_{t(u)}) \subset A_s$. Ricordando quanto osservato nel punto (ii) di cui sopra, segue che $x, y \in \mathrm{St}(C_{t(u)}) \subset A_s$; infine, invocando il lemma 2.62, la restrizione di T_n ad $(A_s \cap M_n) \times rH^n$ ($r < d$, $d|_{A_s} < d_{x_s}$) è un diffeomorfismo.

In conclusione, riassumendo, abbiamo provato che se $(x,v),(y,w) \in M_n \times rH^n$ sono tali che $T_n(x,v) = T_n(y,w)$, allora $(x,v),(y,w) \in (A_s \cap M_n) \times rH^n$, cosicché $(x,v) = (y,w)$. Dunque la restrizione di T_n a $M_n \times r|_{M_n} H^n$ è iniettiva, e siccome T_n è un diffeomorfismo locale segue che $T_n|_{M_n \times r|_{M_n} H^n}$ è un diffeomorfismo con l'immagine:

$$M_n \times r|_{M_n} H^n \cong T_n\big(M_n \times r|_{M_n} H^n\big).$$

Chiaramente $T_n\big(M_n \times r|_{M_n} H^n\big) \supset M_n$, infatti per ogni $x \in M_n$

$$T_n(x,O) = \exp\big(S_n(x,O)\big) = \exp\Big(\sum\nolimits_h \mu_h(x)\big(d(\varphi_h)_x\big)^{-1}(O)\Big) = \exp(O_x) = x.$$

Infine, posto per ogni n in $\mathbb{N}$

$$U_n := T_n\big(M_n \times r|_{M_n} H^n\big) \subset M \tag{2.5.9}$$

si ottiene un sottoinsieme aperto di M. Proviamo anche questa affermazione con tutti i dettagli. Sia y in $U_n = T_n(M_n \times r|_{M_n} H^n)$. Siccome, ove definito, T_n è un diffeomorfismo locale, per definizione di diffeomorfismo locale esiste un intorno $V_y \subset U_n$ del punto y, V_y aperto in M, ed un sottoinsieme U di $M_n \times r|_{M_n} H^n$ tale che $T_n|_U \colon U \to V_y$ sia un diffeomorfismo. In particolare si è così determinato per ogni y in U_n un intorno $V_y \ni y$ aperto in M, $V_y \subset U_n$. Dunque U_n è intorno di tutti i suoi punti ed è pertanto un aperto di M.

□

2.5.3 Filtrazioni augmentate

Prima di procedere con la dimostrazione del teorema principale di questa sezione, ci servirà un ultimo lemma tecnico. Denotiamo con $(U_m)_{m \geq 0}$ la famiglia di intorni standard definita da $r/2$

$$U_m := T_m\big(M_m \times \tfrac{1}{2} r|_{M_m} H^m\big),$$

in cui r è la funzione costruita nella proposizione 2.63 precedente.

Lemma 2.64. *Ogni punto x in M ammette un intorno Q_x e un intero q_x tale che*

$$m > q_x \implies Q_x \subset U_m. \tag{2.5.10}$$

Dimostrazione. Come al solito, salvo esplicito avviso contrario, impiegheremo la terminologia e le notazioni introdotte fino a questo punto. Sia $x \in M$. Esistono[16] dunque indici u, s, i' tali che

$$x \in D_u \subset C_{t(u)} \subset B_s \subset A_s \subset V_{i'} \subset W_{j(i')}. \tag{2.5.11}$$

Supponiamo per assurdo che non esista un tale intorno Q_x e consideriamo una successione $(y_i)_i$ di punti di D_u convergente verso x e una successione di numeri naturali $(m_i)_i$ monotona divergente tale che

$$(\forall\, i) \qquad y_i \notin U_{m_i} := T_{m_i}\big(M_{m_i} \times \tfrac{1}{2} r|_{M_{m_i}} H^{m_i}\big) \supset M_{m_i}, \tag{2.5.12}$$

[16]Giustifichiamo brevemente le inclusioni di cui in (2.5.11): nelle notazioni della proposizione 2.63, $(D_u)_{u \geq 1}$ è un ricoprimento di M che costituisce un raffinamento di $(C_t)_{t \geq 1}$; inoltre, sempre nelle notazioni introdotte nella proposizione 2.63, $(C_t)_{t \geq 1}$ è un raffinamento di $(B_s)_{s \geq 1}$, quest'ultimo essendo un raffinamento shrunk di $(A_s)_{s \geq 1}$. D'altra parte $(A_s)_{s \geq 1}$ è un raffinamento di $(A_x)_{x \in M}$ tale che, per ogni $x \in M$, nelle notazioni introdotte nel lemma 2.62, A_x è un intorno convesso di x contenuto in un qualche V_i, essendo $(V_i)_{i \geq 1}$ un raffinamento (fornito dal lemma 2.55) dell'atlante layer forte $(W_j)_{j \geq 1}$ di M.

ove, si ricordi, $T_{m_i}\big(M_{m_i}\times \frac{1}{2}r_{|_{M_{m_i}}} H^{m_i}\big)$ è l'immagine *diffeomorfa* di $M_{m_i}\times \frac{1}{2}r_{|_{M_{m_i}}} H^{m_i}$ mediante T_{m_i}. Poniamo $j=j(i')$ ed $\varepsilon_i := d(y_i, H_{m_i})$, in cui la distanza è calcolata nella carta (φ_j, W_j), i.e. ([17])

$$d(y_i, H_{m_i}) = d\big(\varphi_j(y_i), H_{m_i}\big) = \inf\big\{d\big(\varphi_j(y_i), p\big) \,:\, p\in H_{m_i}\big\}.$$

Posto $n := n(D_u) = \min\{m\in\mathbb{N} \,:\, D_u\cap M_m \neq \varnothing\}$, T_n è definito su $Y_n\times H^n$, ove, si ricordi, $Y_n := \bigcup_{r\in\mathbb{N}}\{W_r : W_r\cap M_n\neq\varnothing\}$. Ora $D_u\cap M_n\neq\varnothing$, inoltre $D_u\subset W_j$, dunque $W_j\cap M_n\neq\varnothing$, quindi $W_j\subset Y_n$. Siccome $y_i\in D_u\subset W_j$, è ben definito $\varphi_j\circ T_n(y_i,O)$, inoltre $\varphi_j\big(T_n(y_i,O)\big) = \varphi_j(y_i)$, dunque $\varphi_j(y_i)$ appartiene all'immagine di $\varphi_j\circ T_n$.

Dalla dimostrazione della proposizione 2.63, se u_i è un indice per cui $x_i\in D_{u_i}$, allora risulta che $T_n(x_i,v_i)\in C_{t(u_i)}$, e quindi (cfr. dim. proposizione 2.63) $x_i\in \overline{A}_s\subset W_j$, in cui l'ultima inclusione segue da (2.5.11).

Siccome $m_i\to\infty$, per ogni i possiamo supporre che $m_i\geqslant n$. Sia $(x_i,v_i)\in D_u\times H^{m_i}\subset D_u\times H^n$ con $\varphi_j(x_i)\in H_{m_i}$ e $\|v_i\| = \frac{1}{2}r(x_i)$ per cui,

$$\varphi_j\big(T_n(x_i,v_i)\big)\in H_{m_i} \Longrightarrow d\big(\varphi_j(y_i), \varphi_j(T_n(x_i,v_i))\big) < 2\varepsilon_i,$$

altrimenti, se $\varphi_j\big(T_n(x_i,v_i)\big)\notin H_{m_i}$ allora $d\big(\varphi_j(y_i),\varphi_j(T_n(x_i,v_i))\big) + d\big(\varphi_j(T_n(x_i,v_i)), H_{m_i}\big) < 2\varepsilon_i$. Si noti che un tale punto (x_i,v_i) esiste sempre a meno di scegliere m_i sufficientemente grande (infatti, per ogni i, $H_{m_i}\subset H_{m_{i+1}}$ e l'unione degli H_{m_i} è densa in H).

Siccome $\varepsilon_i\to 0$ ([18]) abbiamo $T_n(x_i,v_i)\to x$, i.e., $x_i + v_i + \alpha_{i'}(x_i,v_i)\to x$ ([19]). Scriviamo $x_i = (x_i^0, x_i^1)\in H_n\times H^n$ e $x = (x^0,x^1)$. Allora $x_i^0 + \alpha_{i'}(x_i,v_i)\to x^0$ e $x_i^1 + v_i\to x^1$, infatti $\operatorname{Im}\alpha_{i'}\subset H_{n(W_j)}\subset H_n$ e $v_i\in H^{m_i}$. Risulta $v_i = \pi^{m_i}(x_i^1+v_i)$, infatti

$$\pi^{m_i}(x_i^1+v_i) = \pi^{m_i}(x_i^1) + \pi^{m_i}(v_i) = 0 + \pi^{m_i}(v_i) = v_i.$$

Siccome $x_i^1 + v_i\to x^1$, dalla proposizione G.14 segue che $v_i = \pi^{m_i}(x_i^1+v_i)\to 0$. Dunque $x_i^1\to x^1$. D'altra parte, siccome si è osservato che $x_i = (x_i^0,x_i^1)\in\overline{A}_s$, essendo $\overline{A}_s\cap H_n$ un insieme compatto segue che $(x_i^0)_{i\geq 1}$ ammette una sottosuccessione convergente. Dunque $(x_i)_{i\geq 1}$ ammette una sottosuccessione che converge a un qualche punto x_0. Segue che $(r(x_i))_{i\geq 1}$ ammette una sottosuccessione convergente a un punto $r(x_0)>0$, quando invece $\frac{1}{2}r(x_i) = \|v_i\|\to 0$, $\lightning$, e la dimostrazione è conclusa.

□

Siamo pronti per enunciare e dimostrare il teorema principale di questa sezione:

Teorema 2.65. *Sia $(M_n)_{n\geq 0}$ una filtrazione di Fredholm di M. Allora esistono famiglie $\big(Z_n^0\big)_{n\geq 0}$ e $\big(Z_n\big)_{n\geq 0}$ di intorni aperti standard degli M_n tali che*

(1) per ogni $n\geq 1$, $Z_{n-1}^0\subset Z_n^0\subset\overline{Z_n^0}\subset Z_n\subset Z_{n+1}$,

(2) $M = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Z_n^0$.

Dimostrazione. Sia $(U_m)_{m\geq 0}$ la famiglia definita da $r/2$ come nella proposizione 2.63:

$$M_m\times \tfrac{1}{2}r_{|_{M_m}}H^m \cong T_m\big(M_m\times\tfrac{1}{2}r_{|_{M_m}}H^m\big) \qquad M_m\subset U_m := T_m\big(M_m\times\tfrac{1}{2}r_{|_{M_m}}H^m\big)\subset M,$$

e $(U_m^0)_{m\geq 0}$ la famiglia definita da $r/4$:

$$M_m\times \tfrac{1}{4}r_{|_{M_m}}H^m \cong T_m\big(M_m\times\tfrac{1}{4}r_{|_{M_m}}H^m\big) \qquad M_m\subset U_m^0 := T_m\big(M_m\times\tfrac{1}{4}r_{|_{M_m}}H^m\big)\subset M.$$

[17] $(\forall\, i)$ $y_i\in D_u\subset W_{j(i')} = W_j$, dunque per ogni i in $\mathbb{N}$ è ben definito $\varphi_j(y_i)$. Inoltre, per ogni p in H_{m_i} $d(\varphi_j(y_i),p)$ è la lunghezza del segmento di retta avente estremi in $\varphi_j(y_i)$ ed in p. Chiaramente, se $\varphi_j(y_i)\in H_{m_i}$ allora $d(\varphi_j(y_i),H_{m_i}) = 0$.

[18] $\lim_{i\to\infty}\varepsilon_i = \lim_{i\to\infty} d(\varphi_j(y_i),H_{m_i}) = \lim_{i\to\infty} d(\varphi_j(x),H_\infty) = 0$, infatti $H_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ è denso in H.

[19] Si noti l'abuso di notazione per cui abbiamo tacitamente identificato i punti della varietà con i corrispondenti punti del modello, via la carta locale.

Sia
$$Z_n := \operatorname{Int} \bigcap\{U_m \ : \ m \geqslant n\} \qquad \text{e} \qquad Z_n^0 := \operatorname{Int} \bigcap\{U_m^0 \ : \ m \geqslant n\}. \tag{2.5.13}$$

Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$, (i) Z_n è aperto in M, (ii) $Z_n \supset M_n$, infatti, se $x \in M$ è un punto di M_n, nelle notazioni del lemma 2.64, $x \in Q_x \subset \bigcap\{U_m : m > q_x\}$, d'altra parte, per ogni $m \geq n$, $x \in M_n \Rightarrow x \in M_m \Rightarrow x \in U_m$, per cui, se $q_x \geq n$ allora $x \in \bigcap\{U_m : n \leq m \leq q_x\}$, e quindi, in definitiva, $x \in \bigcap\{U_m : n \leq m \leq q_x\} \cap Q_x \subset \bigcap\{U_m : m \geqslant n\}$. Si osservi che $\bigcap\{U_m : n \leq m \leq q_x\} \cap Q_x$ è un intorno di x perché Q_x è un intorno di x (cfr. lemma 2.64) ed ogni $U_m \subset M$ è aperto in M. Dunque, se $q_x \geq n$, abbiamo trovato un intorno di x interamente contenuto in $\bigcap\{U_m : m \geqslant n\}$. D'altra parte se $q_x < n$ allora $x \in Q_x \subset \bigcap\{U_m : m > q_x\} \subset \bigcap\{U_m : m \geqslant n\}$, i.e., Q_x è un intorno di x interamente contenuto in $\bigcap\{U_m : m \geqslant n\}$. Riassumendo, se $x \in M_n$ allora si può sempre trovare un intorno di x interamente contenuto in $\bigcap\{U_m \ : \ m \geqslant n\}$, i.e., $x \in Z_n$. (iii) Come si è già ricordato, per ogni $m \geq n$, U_m è aperto; d'altra parte l'intersezione numerabile $\bigcap\{U_m \ : \ m \geqslant n\}$ non è necessariamente aperta, dunque, per ottenere un insieme aperto è necessario considerare la parte interna di $\bigcap\{U_m \ : \ m \geqslant n\}$. (iv) Nelle notazioni del lemma 2.64, $Z_n = \{x \in M \ : \ q_x = n-1\}$ e perciò $Z_n = \{x \in M \ : \ q_x < n\}$, segue che, a posteriori, nel punto (ii) l'evento $q_x \geq n$ non si verifica, e quindi, effettivamente, se $x \in M_n$ allora $q_x < n$. (v) $Z_n \subset \bigcap\{U_m \ : \ m \geqslant n\} \subset U_n$, d'altra parte
$$M_n \times {\tfrac{1}{2}r}_{|M_n} H^n \xrightarrow{\cong} U_n = T_n\big(M_n \times {\tfrac{1}{2}r}_{|M_n} H^n\big),$$
e quindi
$$T_n^{-1}(Z_n) \xrightarrow{\cong} Z_n.$$
Dunque, effettivamente, per ogni $n \in \mathbb{N}$, Z_n è un intorno standard di M_n. Ovviamente le proprietà (i)-(v) sono verificate anche per gli Z_n^0, i quali sono anch'essi intorni standard degli M_n.

Inoltre, $M = \bigcup\{Z_n^0 : n \geqslant 0\}$, infatti se $x \in M$ allora per il lemma 2.64 esiste $q_x \in \mathbb{N}$ e un intorno Q_x di x tale che $Q_x \subset \bigcap\{U_m^0 \ : \ m \geqslant q_x + 1\}$. Dunque $x \in \operatorname{Int} \bigcap\{U_m^0 \ : \ m \geqslant q_x + 1\} = Z_{q_x+1}^0$.

Chiaramente, per ogni $n \geq 1$, $Z_{n-1}^0 \subset Z_n^0 \subset \overline{Z_n^0}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $Z_n \subset Z_{n+1}$; resta da provare che $\overline{Z_n^0} \subset Z_n$. Per questo scopo, si osservi inizialmente che, se $q \geq n$ è fissato allora
$$\overline{Z_n^0} = \overline{\operatorname{Int} \bigcap \{U_m^0 : m \geqslant n\}} \subset \overline{\operatorname{Int} \bigcap \{U_m^0 : q \geqslant m \geqslant n\}};$$
d'altra parte, siccome per ogni $m \in \mathbb{N}$, U_m^0 è aperto,
$$\overline{\operatorname{Int} \bigcap \{U_m^0 : q \geqslant m \geqslant n\}} = \overline{\bigcap\{U_m^0 : q \geqslant m \geqslant n\}} \subset \bigcap\big\{\overline{U_m^0} : q \geqslant m \geqslant n\big\}$$
e quindi, essendo per ogni $m \in \mathbb{N}$,
$$\overline{U_m^0} = \overline{T_m\big(M_m \times {\tfrac{1}{4}r}_{|M_m} H^m\big)} = T_m\big(\overline{M_m \times \tfrac{1}{4}r|_{M_m} H^m}\big) \subset T_m\big(M_m \times \tfrac{1}{2}r|_{M_m} H^m\big) = U_m,$$
risulta
$$\overline{Z_n^0} \subset \bigcap\{U_m : q \geqslant m \geqslant n\} = \operatorname{Int} \bigcap \{U_m : q \geqslant m \geqslant n\}. \tag{2.5.14}$$

Sia $x \in \overline{Z_n^0}$. Nelle notazioni del lemma 2.64, se $q_x < n$ allora $\exists\, Q_x$ tale che
$$x \in Q_x \subset \bigcap_{m > q_x} U_m = \bigcap_{q_x < m \leq n} U_m \cap \bigcap_{m \geq n} U_m \subset \bigcap_{m \geq n} U_m,$$
i.e., $x \in \operatorname{Int} \bigcap \{U_m : m \geqslant n\} = Z_n$. D'altra parte, se $q_x \geq n$ allora per la (2.5.14)
$$x \in \operatorname{Int} \bigcap \{U_m : q_x \geqslant m \geqslant n\};$$
inoltre, in quanto elemento di M, nelle notazioni del lemma 2.64
$$x \in Q_x \subset \bigcap_{m > q_x} U_m \qquad \rightsquigarrow \qquad x \in \operatorname{Int} \bigcap \{U_m : m > q_x\},$$

per cui, in definitiva,

$$x \in \operatorname{Int} \bigcap \{U_m : q_x \geqslant m \geqslant n\} \ \cap \ \operatorname{Int} \bigcap \{U_m : m > q_x\} = \operatorname{Int} \bigcap \{U_m : m \geqslant n\} = Z_n.$$

□

Osservazione 2.66. Il teorema appena dimostrato conclude il processo di riduzione al caso finito dimensionale iniziato con la determinazione di una filtrazione di Fredholm $(M_n)_n$ (teorema 2.38 di Mukherjea-Quinn). Per ogni n in $\mathbb{N}$ abbiamo determinato intorni tubolari finito dimensionali Z_n di M_n: essi si riveleranno assai utili nel seguito quando dovremo invocare i teoremi di isotopia e di estensione propri della dimensione finita.

2.6 Raffinamento delle tecniche layer

Nel seguito vorremo immergere con un embedding aperto ogni intorno tubolare Z_n di M_n nel modello H della varietà ambiente M; inoltre, siccome per ogni n, $Z_n \subset Z_{n+1}$, sarebbe auspicabile costruire detti embedding in modo che $(\forall\, n)$ l'embedding di Z_n in H si estenda al corrispondente embedding di Z_{n+1} in H. In questo modo, l'effettiva estensione dell'embedding aperto da Z_n a Z_{n+1} sarà ridotta ad un problema finito dimensionale e sarà trattata in ultima analisi per mezzo del teorema D.19 di estensione dell'intorno tubolare.

Scopo primario della presente sezione è raffinare le tecniche layer introdotte nella sezione 2.4 ed ampiamente utilizzate nella sezione 2.5 al fine di sviluppare l'apparato tecnico ed i prerequisiti utili per porre in essere queste costruzioni ed applicare così il teorema D.19 di estensione dell'intorno tubolare. Torniamo alla situazione prospettata nella sezione 2.5. Usando la funzione $r\colon M \to \mathbb{R}^+$ ottenuta nella proposizione 2.63, posto

$$D_n :\overset{\text{def}}{=} T_n^{-1}(Z_n) \cap \big(M_n \times \tfrac{1}{2} r_{|_{M_n}} H^n\big), \tag{2.6.1}$$

osserviamo che D_n è un intorno della sezione nulla del fibrato $M_n \times \frac{1}{2} r_{|_{M_n}} H^n$.

Si ricordi che nella sezione 2.4 abbiamo avuto cura di rendere la filtrazione di Fredholm $(M_n)_n$ fornita dal teorema di Mukherjea-Quinn una filtrazione *totalmente geodetica*. Questa proprietà della filtrazione ci permette in particolare di osservare quanto segue:

Osservazione 2.67. L'insieme $T_n\big(M_n \times \frac{1}{2} r_{|_{M_n}} e_{n+1}\big)$ definisce un intorno tubolare aperto $\mathcal{U}_{n+1}$ di M_n in M_{n+1}:

$$M_n \subset T_n\big(M_n \times \tfrac{1}{2} r_{|_{M_n}} e_{n+1}\big) =: \mathcal{U}_{n+1} = \operatorname{Int}(\mathcal{U}_{n+1}) \subset M_{n+1}, \tag{2.6.2}$$

in particolare, l'ultima inclusione segue dal carattere totalmente geodetico di M_{n+1} in M. Infatti: se $(x, v) \in M_n \times \langle e_{n+1}\rangle$ allora S_n è definito su (x, v), infatti $M_n \times \langle e_{n+1}\rangle \subset M_n \times H^n$. D'altra parte, $M_n \times \langle e_{n+1}\rangle \subset M_{n+1} \times H_{n+1}$, quindi, per l'osservazione 2.43,

$$d\big(\varphi_j^{-1}\big)_{\varphi_j(x)}[v] \in T_x M_{n+1}$$

e perciò $S_n(x, v) \in T_x M_{n+1}$. Segue che, in virtù del carattere totalmente geodetico di M_{n+1},

$$T_n(x, v) = \exp \circ S_n(x, v) \in M_{n+1}.$$

⌟

Posto per ogni n in $\mathbb{N}$

$$\widetilde{D}_n :\overset{\text{def}}{=} T_n^{-1}\Big[T_{n+1}\Big(M_{n+1} \times \tfrac{1}{2} r_{|_{M_{n+1}}} H^{n+1}\Big) \cap T_n\Big(M_n \times \tfrac{1}{2} r_{|_{M_n}} H^n\Big)\Big] \cap \big(M_n \times H^n\big), \tag{2.6.3}$$

allora $D_n \subset \widetilde{D}_n$, infatti

$$Z_n = \operatorname{Int} \bigcap_{m \geq n} T_m\Big(M_m \times \tfrac{1}{2} r_{|_{M_m}} H^m\Big) \subset T_{n+1}\Big(M_{n+1} \times \tfrac{1}{2} r_{|_{M_{n+1}}} H^{n+1}\Big) \cap T_n\Big(M_n \times \tfrac{1}{2} r_{|_{M_n}} H^n\Big),$$

da cui, essendo per definizione $D_n = T_n^{-1}(Z_n) \cap \big(M_n \times {}_{\frac{1}{2}r_{|M_n}} H^n\big)$ segue che $D_n \subset \widetilde{D}_n$.

Lemma 2.68. *La mappa $\ell_n \colon \widetilde{D}_n \to \widetilde{D}_{n+1}$ definita da $\ell_n := T_{n+1}^{-1} \circ T_n$ è un embedding layer aperto della forma*

$$\ell_n \colon (x,u) \longmapsto \big(\lambda_n(x,u), \pi^{n+1}(u)\big) \tag{2.6.4}$$

Dimostrazione. Per ogni n, la mappa T_n è definita dal prodotto di composizione $\exp \circ S_n$, in cui S_n è la mappa definita nel lemma 2.46. La forma (2.6.4) dell'applicazione ℓ_n segue quindi dalla particolare espressione della mappa esponenziale nelle carte di un atlante layer forte per la varietà (cfr. teorema 2.45) e dal punto (3) del lemma 2.46.

Più in dettaglio, siano (x,u) in D_n e (y,v) in D_{n+1} tali che $T_n(x,u) = T_{n+1}(y,v)$. Allora $v = \pi^{n+1}(u)$, infatti, come indicato dal lemma 2.46, esiste una carta layer forte (φ_j, W_j) con $T_n(x,u) \in W_j$ tale che (i) $\pi^{n+1} \circ \varphi_j \circ T_n(x,u) = \pi^{n+1}(u)$, e (ii) $\pi^{n+1} \circ \varphi_j \circ T_{n+1}(y,v) = v$. □

Il seguente diagramma riassume gli oggetti che abbiamo introdotto fino a questo punto e le relazioni intercorrenti tra di essi. Si osservi che tutti i diagrammi da esso deducibili sono commutativi.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{D}_n \arrow[ddddd, "\ell_n = T_{n+1}^{-1} \circ T_n"'] & D_n \arrow[l, hook', "\supset"] \arrow[rr, "T_n"] \arrow[dr, "S_n"'] \arrow[dd, hook, "\cap"'] & & Z_n \arrow[ddddd, hook, "\cap"] \\
& & S_n(D_n) \arrow[ur, "\exp"'] \arrow[d, hook, "\cap"'] & \\
& Y_n \times H^n \arrow[r, "S_n"] & TY_n \arrow[d, hook, "\cap"'] & \\
& Y_{n+1} \times H^{n+1} \arrow[r, "S_{n+1}"] & TY_{n+1} & \\
& & S_{n+1}(D_{n+1}) \arrow[u, hook, "\cup"'] \arrow[dr, "\exp"] & \\
\widetilde{D}_{n+1} & D_{n+1} \arrow[l, hook', "\supset"] \arrow[uu, hook, "\cup"'] \arrow[ur, "S_{n+1}"] \arrow[rr, "T_{n+1}"'] & & Z_{n+1}
\end{tikzcd} \tag{2.6.5}$$

Consideriamo la mappa $j_n \colon \widetilde{D}_n \to M_{n+1} \times H^{n+1}$ definita da

$$j_n \colon (x,u) \longmapsto j_n(x,u) \overset{\text{def}}{:=} \big(\lambda_n\big(x, \pi_{n+1}(u)\big), \pi^{n+1}(u)\big). \tag{2.6.6}$$

Innanzitutto osserviamo che si tratta di una applicazione ben definita, infatti

$$\big\|\pi_{n+1}(u)\big\| \le \|u\|,$$

quindi, se (x,u) appartiene all'insieme di definizione di λ_n, $\widetilde{D}_n$, allora anche $\big(x, \pi_{n+1}(u)\big)$ appartiene a $\widetilde{D}_n$, e (2.6.6) è una buona definizione. Inoltre, in virtù della proposizione 2.69 (vedi oltre) j_n è una applicazione iniettiva e quindi, per il lemma 2.68, j_n è un embedding sul sottoinsieme aperto $\widetilde{G}_{n+1} := j_n(\widetilde{D}_n) \subset U_{n+1} \times H^{n+1}$. Infine, $j_n^{-1} \colon \widetilde{G}_{n+1} \longrightarrow \widetilde{D}_n$ si estende in modo naturale ad una mappa (denotata ancora con j_n^{-1}) da $U_{n+1} \times H^{n+1}$ a $M_n \times H^n$ *(infatti, siccome a meno di una proiezione j_n è $T_{n+1}^{-1} \circ T_n$, e siccome T_n è un diffeomorfismo su un intorno aperto (standard) della sezione nulla, esiste un aperto la cui immagine omeomorfa tramite j_n sia $U_{n+1} \times H^{n+1}$, i.e., $U_{n+1} \times H^{n+1}$ è incluso nell'immagine iniettiva mediante j_n di un certo aperto)*:

$$j_n^{-1} \colon U_{n+1} \times H^{n+1} \longrightarrow M_n \times H^n.$$

Proposizione 2.69. *L'applicazione j_n definita in (2.6.6) è iniettiva.*

Dimostrazione. Siano $(x, u_1) \neq (x, u_2)$ tali che $\pi_{n+1}u_1 = \pi_{n+1}u_2$. Dunque $\pi^{n+1}u_1 \neq \pi^{n+1}u_2$ e quindi $j_n(x, u_1) \neq j_n(x, u_2)$. D'altra parte se $\pi_{n+1}u_1 \neq \pi_{n+1}u_2$ allora anche in questo caso $j_n(x, u_1) \neq j_n(x, u_2)$, infatti, poiché ℓ_n è iniettiva, posti $\bar{u}_1 := \pi_{n+1}u_1$ e $\bar{u}_2 := \pi_{n+1}u_2$, se fosse $\lambda_n(x, \bar{u}_1) = \lambda_n(x, \bar{u}_2)$ allora dovrebbe essere $\pi^{n+1}\bar{u}_1 \neq \pi^{n+1}\bar{u}_2$, ma ciò non è possibile essendo $\pi^{n+1}\bar{u}_1 = \pi^{n+1}\pi_{n+1}u_1 = 0 = \pi^{n+1}\pi_{n+1}u_2 = \pi^{n+1}\bar{u}_2$. Dunque $\lambda_n(x, \pi_{n+1}u_1) \neq \lambda_n(x, \pi_{n+1}u_2)$ e quindi $j_n(x, u_1) \neq j_n(x, u_2)$. Analogamente si argomenta se $(x, u_1) \neq (y, u_2)$ in cui $x \neq y$ e $u_1 \neq u_2$. Infine, se $x \neq y$ allora anche in quest'ultimo caso $j_n(x, u) \neq j_n(y, u)$, infatti, posto come prima $\bar{u} = \pi_{n+1}u$, poiché ℓ_n è iniettiva risulta $\ell_n(x, \bar{u}) \neq \ell_n(y, \bar{u})$, da cui segue $\lambda_n(x, \bar{u}) \neq \lambda_n(y, \bar{u})$ sse $\lambda_n(x, \pi_{n+1}u) \neq \lambda_n(y, \pi_{n+1}u)$ e quindi $j_n(x, u) \neq j_n(y, u)$. ☐

Nel seguito sarà utile anche il seguente lemma (per la definizione di isotopia di embedding si rimanda alla sezione D.5, definizione D.11):

Lemma 2.70. *Sia Y una varietà compatta con bordo (ivi compreso il caso in cui $\partial Y = \varnothing$) e Z_0 una sottovarietà aperta di una varietà Z. Sia B uno spazio di Banach ed $f \colon \mathbb{R} \times Z \to \mathbb{R} \times (Y \times B)$ una isotopia di embedding con dominio proprio $I = [0, 1]$ della forma $f(t, z) = \big(t, a(t, z), b(z)\big)$, tale che $f\big(I \times \overline{Z}_0\big)$ sia contenuto in $\mathbb{R} \times \operatorname{Int}(Y) \times B$ e sia chiuso in $\mathbb{R} \times Y \times B$.*

Allora esiste una isotopia di embedding $F \colon \mathbb{R} \times (Y \times B) \to \mathbb{R} \times (Y \times B)$ con dominio proprio I della forma $F(t, y, b) = \big(t, A(t, y, b), b\big)$, tale che

(i) $F(0, y, b) = (0, y, b)$ *per ogni* $(y, b) \in Y \times B$;

(ii) $F\big(1, f_0(z)\big) = \boldsymbol{F\big(1, a(0, z), b(z)\big) = \big(1, a(1, z), b(z)\big)} = \big(1, f_1(z)\big) = f(1, z)$ *per ogni* $z \in \overline{Z}_0$;

(iii) $F(t, y, b) = (t, y, b)$ *in un intorno di* $\mathbb{R} \times \partial Y \times B$.

Dimostrazione. La tecnica con cui si dimostra questo tipo di enunciati è sempre la stessa: si determina una isotopia che soddisfa le proprietà richieste per integrazione di un campo vettoriale opportuno. Poi si modifica se necessario la soluzione ottenuta per mezzo di funzioni cut-off o funzioni a campana.

Lo schema dimostrativo segue la falsa riga della dimostrazione del lemma di Thom, come indicato nel testo di Hirsch [Hir 94], Capitolo 8 oppure in [Th 57]. Per una dimostrazione dettagliata si faccia comunque riferimento a [El 72]. ☐

Notazioni. Denotiamo con U_n^0, λ_n^0, ℓ_n^0, j_n^0, $\widetilde{D}_n^0$ gli oggetti corrispondenti a U_n, λ_n, ℓ_n, j_n, $\widetilde{D}_n$, utilizzando Z_n^0 anziché Z_n (si ricordi che le notazioni Z_n, Z_n^0 sono state introdotte nel teorema 2.65).

Lemma 2.71. *Esiste una isotopia con dominio proprio I*

$$J_{n+1} \colon \mathbb{R} \times M_{n+1} \times H^{n+1} \to \mathbb{R} \times M_{n+1} \times H^{n+1}$$

della forma $J_{n+1}(t, x, v) = \big(t, g_t(x, v), v\big)$, tale che

(i) $J_{n+1,0} = \mathrm{id}$,

(ii) $J_{n+1,1}|\overline{\ell_n(\widetilde{D}_n^0)}$

Dimostrazione. La mappa $F_0\colon \ell_n\big(\widetilde{D}_n\big) \to M_{n+1} \times H^{n+1}$ definita ponendo $F_0 := j_n \circ \ell_n^{-1}$ è chiaramente della forma

$$(x, v) \longmapsto \big(a(x, v), v\big), \tag{2.6.7}$$

in cui $a\colon \ell_n\big(\widetilde{D}_n\big) \to M_{n+1}$ è una mappa opportuna. Si osservi in particolare che $a(x, 0) = x$, infatti $j_n \circ \ell_n^{-1}(x, 0) = j_n \circ T_n^{-1} \circ T_{n+1}(x, 0) = j_n(x, 0) = \ell_n(x, 0) = (x, 0)$, quindi, effettivamente, $a(x, 0) = x$. Sia $\mu\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ una funzione (differenziabile) monotona decrescente con $\mu(t) = 1$ se $t \leq 0$ e $\mu(t) = 0$ se $t \geq 1$. Posto $F_t(x, v) := \big(a\big(x, \mu(t)v\big), v\big)$,

$$F := (t, F_t)\colon \mathbb{R} \times \ell_n\big(\widetilde{D}_n\big) \longrightarrow \mathbb{R} \times M_{n+1} \times H^{n+1}$$

è una isotopia di embedding con dominio proprio $I = [0, 1]$: in particolare gli embedding F_0 ed $F_1(x, v) = (x, v)$ sono isotopi.

Posto $Y := M_{n+1}$, $Z := \ell_n\big(\widetilde{D}_n\big)$, $Z_0 := \ell_n(\widetilde{D}_n^0)$, $B := H^{n+1}$, $f := F$, le ipotesi di applicabilità del lemma 2.70 sono soddisfatte, (in particolare Y è una varietà compatta, infatti abbiamo avuto cura di costruire la filtrazione di Fredholm (M_n) mediante una mappa di Fredholm *propria* e *limitata*, da cui, per il teorema 2.40, segue che le sottovarietà M_n sono compatte) dunque esiste una isotopia

$$G\colon \mathbb{R} \times M_{n+1} \times H^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R} \times M_{n+1} \times H^{n+1}$$

con dominio proprio I della forma $G(t, x, v) = \big(t, A_t(x, v), v\big)$, tale che

(i) $G_0 = \mathrm{id}$, i.e., $G(0, x, v) = (0, x, v)$ per ogni $(x, v) \in M_{n+1} \times H^{n+1}$;

(ii) $G_1 \circ F_0|\overline{\ell_n(\widetilde{D}_n^0)} = F_1|\overline{\ell_n(\widetilde{D}_n^0)} = \iota\colon \overline{\ell_n(\widetilde{D}_n^0)} \hookrightarrow M_{n+1} \times H^{n+1}$, i.e.,
$$G\big(1, F_0(x, v)\big) = \boldsymbol{G\big(1, a(x, v), v\big) = \big(1, x, v\big)} = F\big(1, (x, v)\big) \text{ per ogni } (x, v) \in \overline{\ell_n(\widetilde{D}_n^0)}.$$

Infine, posta $J_{n+1} := G^{-1}\colon \mathbb{R} \times M_{n+1} \times H^{n+1} \to \mathbb{R} \times M_{n+1} \times H^{n+1}$, J_{n+1} soddisfa le richieste del lemma. Infatti, G^{-1} è una isotopia con dominio proprio I perché tale è G; G^{-1} è della forma $G^{-1}(t, x, v) = \big(t, g_t(x, v), v\big)$; inoltre *(i)* $G_0^{-1} = \mathrm{id}$ (infatti $G_0 = \mathrm{id}$), ed infine *(ii)*

$$\forall\, (x, v) \in \overline{\ell_n(\widetilde{D}_n^0)}, \qquad G_1^{-1}(x, v) = \big(a(x, v), v\big) \overset{(2.6.7)}{=} j_n \circ \ell_n^{-1}(x, v).$$

□

Riassumiamo graficamente gli oggetti e i morfismi introdotti nel seguente diagramma.

$$\begin{tikzcd}
M_n \times H^n & \widetilde{D}_n^0 \arrow[l, hook', "\supset"'] \arrow[d, "j_n"] \arrow[ddl, "\ell_n"'] \\
 & \widetilde{G}_{n+1} \arrow[d, hook, "\cap"'] \\
\mathcal{U}_{n+1}^0 \times H^{n+1} \arrow[d, hook, "\cap"'] & \mathcal{U}_{n+1} \times H^{n+1} \arrow[d, hook, "\cap"'] \\
M_{n+1} \times H^{n+1} \arrow[r, "J_{n+1,1}"] & M_{n+1} \times H^{n+1}
\end{tikzcd} \tag{2.6.8}$$

Chiudiamo la sezione con alcune definizioni e una osservazione.

Definizione 2.72. Dato uno spazio topologico Y consideriamo il fibrato banale $Y \times H$. Un isomorfismo di fibrati vettoriali
$$\beta \colon Y \times H \to Y \times H$$
sarà detto *layer forte* se è della forma $\beta(y,v) = \big(y, v + \alpha(y,v)\big)$, in cui $\alpha \colon Y \times H \to H$ è una applicazione di rango finito.

Definizione 2.73. In particolare, una isotopia di isomorfismi di fibrati vettoriali
$$\beta \colon \mathbb{R} \times Y \times H \to \mathbb{R} \times Y \times H$$
sarà detta una *isotopia layer forte* se, per ogni t, l'isomorfismo di fibrati $\beta_t \colon Y \times H \to Y \times H$ è layer forte.

Osservazione 2.74. Se M è una varietà Hilbertiana, per il teorema di Kuiper esiste una banalizzazione globale per il fibrato tangente ad M, altrimenti, nel caso in cui M sia una varietà di Banach richiederemo nel seguito che M sia parallelizzabile. In ogni caso, indicata con $\tau \colon TM \to M \times H$ una tale banalizzazione globale, poiché M è equipaggiata di un atlante layer forte (cfr. proposizione 2.41), possiamo supporre che τ sia una *banalizzazione layer*, i.e. un isomorfismo di fibrati vettoriali *di tipo* $\mathcal{L}(I)$, in accordo con la definizione 2.16.

Indicata con $\iota_n \colon M_n \hookrightarrow M$ l'inclusione di M_n in M, nella prossima sezione considereremo l'isomorfismo
$$\tau_n \colon TM_n \oplus H^n \to M_n \times H$$
definito tramite τ da
$$\tau_n(x, v_1, v_2) :\stackrel{\text{def}}{=} \big(x, \tau\big(d(i_n)_x[v_1] + S_n(x, v_2)\big)\big). \tag{2.6.9}$$

2.7 Prova del teorema di embedding aperto

In questa ultima sezione completeremo la dimostrazione del teorema di embedding aperto, precisamente, immergeremo con un embedding aperto ogni intorno tubolare Z_n di M_n nel modello H della varietà ambiente M; inoltre, siccome per ogni n, $Z_n \subset Z_{n+1}$, costruiremo detti embedding in modo che $(\forall\, n)$ l'embedding di Z_n in H si estenda all'embedding di Z_{n+1} in H. Ciò sarà reso possibile da un importante lemma (cfr. lemma 2.76) che permetterà di adattare opportunamente i domini delle varie mappe via i teoremi di isotopia introdotti nelle sezioni precedenti ed i teoremi di isotopia ambientale della teoria classica in dimensione finita (cfr. [Hir 94], Capitolo 8). In un certo senso il lemma 2.76 è il risultato fondamentale di questa sezione.

Nelle ipotesi e nelle notazioni precedentemente introdotte (si consultino i diagrammi (2.6.5) e (2.6.8) per avere un riassunto di tutti gli oggetti ed i morfismi che abbiamo introdotto fino a questo punto) enunciamo la seguente proposizione:

Proposizione 2.75. *Per ogni n in $\mathbb{N}$ esiste un embedding aperto $g_n \colon M_n \times H^n \to H$ ed un intero $\bar{n} \in \mathbb{N}$ per cui:*

(a) $g_n|_{\tilde{D}_n^0} = g_{n+1} \circ \ell_n|_{\tilde{D}_n^0}$*;*

(b) $g_n \colon M_n \times H^n \to H_{\bar{n}} \times H^{\bar{n}}$ *è della forma* $g_n(x,v) = \big(\bar{g}_n(x,v), \pi^{\bar{n}}(v)\big)$*, in cui si è indicata con* $\bar{g}_n \colon M_n \times H^n \to H_{\bar{n}}$ *la composizione* $\pi_{\bar{n}} \circ g_n$*;*

(c) esiste una isotopia layer forte $\beta_n \colon \mathbb{R} \times M_n \times H \to \mathbb{R} \times M_n \times H$ *tale che*

  (i) $\beta_{n,0} = \mathrm{id}_{M_n \times H}$*,*

  (ii) $\beta_{n,1} \circ (dg_n)|_{T(M_n \times H^n)_{M_n \times \{O\}}} \colon (x,w,e) \in TM_n \times H^n \mapsto \beta_{n,1}\big(x, d(g_n)_{(x,O)}(w,e)\big) \in M_n \times H$ *coincide identicamente con* τ_n*;*

(d) $g_n(M_n \times rH^n) \subset H$ *è un sottoinsieme limitato.*

Dimostrazione. La dimostrazione procede per induzione su n.

Verifica della Base Induttiva. Per $n = 0$, $H_0 = \{O\}$, $H^0 = H$, $M_0 = f^{-1}(O)$, poniamo $g_0 \colon M_0 \times H \to \{O\} \times H$ così definita:

$$g_0 := f|_{M_0} \times \mathrm{id}_H \colon (x, v) \in M_0 \times H \mapsto \big(f(x), v\big) = (0, v) \in \{O\} \times H.$$

Posto $\bar{0} = 0$, la proprietà (b) è banalmente verificata, infatti $\pi^{\bar{0}} = \mathrm{id}_H$ ed inoltre $\pi_{\bar{0}}$ è la costante O.

Per quanto riguarda la proprietà (c) si osservi innanzitutto che, siccome $M_0 \subset M$ è una sottovarietà di dimensione zero, dunque un insieme discreto di punti, per la proprietà di compattezza di M_0 si ha che M_0 è un insieme finito di punti in M. In particolare segue che $TM_0 \cong \{O_{p_1}, \dots, O_{p_N}\}$. Ricordiamo che, per definizione,

$$S_0(p_i, v) = \sum\nolimits_j \mu_j(p_i)\, d(\varphi_j^{-1})_{\varphi_j(p_i)}[v] = \sum\nolimits_j \mu_j(p_i)\, d(\varphi_j^{-1})_O[v]$$

quindi

$$\tau_0 \colon \{O_{p_1}, \dots, O_{p_N}\} \oplus H \to \{p_1, \dots, p_N\} \times H,$$

precisamente

$$\begin{aligned}\tau_0(p_i, O_{p_i}, v) &= \big(p_i, \tau\big(d(i_0)_{p_i}(O_{p_i}) + S_0(p_i, v)\big)\big) = \big(p_i, \tau\big(S_0(p_i, v)\big)\big) \\ &= \Big(p_i, \tau \sum\nolimits_j \mu_j(p_i)\, d(\varphi_j^{-1})_{\varphi_j(p_i)}[v]\Big) = \Big(p_i, \sum\nolimits_j \mu_j(p_i)\, \tau\big(d(\varphi_j^{-1})_{\varphi_j(p_i)}[v]\big)\Big).\end{aligned}$$

Consideriamo la seguente isotopia

$$\beta_0 \colon \mathbb{R} \times \{p_1, \dots, p_N\} \times H \to \mathbb{R} \times \{p_1, \dots, p_N\} \times H$$

definita ponendo

$$\beta_0(t, p_i, v) = \Big(p_i, t\Big(\sum\nolimits_j \mu_j(p_i)\, \tau\big(d(\varphi_j^{-1})_{\varphi_j(p_i)}[v]\big)\Big) + (1-t)v\Big). \tag{2.7.1}$$

In particolare

$$\beta_0(1, p_i, v) = \Big(p_i, \sum\nolimits_j \mu_j(p_i)\, \tau\big(d(\varphi_j^{-1})_{\varphi_j(p_i)}[v]\big)\Big)$$

e la proprietà (c)(ii) è banalmente soddisfatta. Inoltre, posto $t = 0$ in (2.7.1) la proprietà (c)(i) è ovviamente verificata; infine $g_0(M_0 \times rH) = \{0\} \times rH \subset H$, e anche la (d) segue.

Nel corso della dimostrazione del passo induttivo la comprensione può essere facilitata dalla costruzione passo-passo del diagramma 2.7.14. Lo si confronti anche col diagramma parziale 2.6.8.

Passo induttivo. Assumiamo che esistano g_n, $\beta_{n,t}$ ed $\bar{n}$ soddisfacenti le proprietà richieste. L'idea su cui si fonda la dimostrazione del passo induttivo è che, per estendere un embedding è sufficiente provare che esso è isotopo a un embedding estendibile. In effetti, questa tecnica di estensione è uno degli scopi principali della teoria dell'isotopia. Questa idea sarà concretizzata nella dimostrazione del lemma 2.76. Per le definizioni ed i teoremi utili in questo contesto si faccia riferimento alla sezione D.5 in appendice, oppure a [Hir 94], Capitolo 8.1 per una esposizione più dettagliata.

Sia $N \gg \max(\bar{n}, 2n + 2)$. Allora $g_n \colon M_n \times H^n \to H_N \times H^N$ può essere scritta come

$$g_n(x, v) = \big(\gamma_n(x, v), \pi^N(v)\big), \tag{2.7.2}$$

in cui $\gamma_n \colon M_n \times H^n \to H_N$ è opportuna (precisamente $\gamma_n = \pi_N \circ g_n \colon M_n \times H^n \to H_N$).

Sia $\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona crescente con $\lambda(t) = 0$ per $t \le 0$, e $\lambda(t) = 1$ per $t \ge 1$. La mappa $F \colon \mathbb{R} \times M_n \times H^n \to \mathbb{R} \times H_N \times H^N$ definita da

$$(t, x, v) \mapsto \Big(t, \gamma_n\big(x, v - \lambda(t)\big[\pi^N(v)\big]\big), \pi^N(v)\Big)$$

è una isotopia di embedding aperti con dominio proprio $I = [0,1]$ (per i dettagli si faccia riferimento all'Osservazione 2.77).

Nelle notazioni del lemma 2.70, sia $Y \subset H_N$ una palla chiusa di raggio sufficientemente grande ($\mathrm{Int}(Y)$ denoti quindi la corrispondente palla aperta) e $r\colon M_n \to \mathbb{R}^+$ una funzione continua tale che

$$F(I \times M_n \times \bar{r}H^n) \subset \mathbb{R} \times \mathrm{Int}(Y) \times H^N$$

(si è indicato con $M_n \times \bar{r}H^n$ l'insieme delle coppie $(x,v) \in M_n \times H^n$ tali che $\|v\| \leq r(x)$). Posto $Z_0 := M_n \times rH^n$, per costruzione risulta quindi che

$$F\big(I \times \overline{Z}_0\big) \subset \mathbb{R} \times \mathrm{Int}(Y) \times H^N.$$

Nelle notazioni del lemma 2.70, posto $B := H^N$, esiste una isotopia di embedding

$$d\colon \mathbb{R} \times (Y \times H^N) \to \mathbb{R} \times (Y \times H^N)$$

con dominio proprio I della forma

$$d(t, x_1, x_2) = \big(t, \delta_t(x_1, x_2), x_2\big),$$

tale che

(i) $d_0 = \mathrm{id}$, i.e., $d(0, x_1, x_2) = (0, x_1, x_2)$ per ogni $(x_1, x_2) \in Y \times H^N$;

(ii) $d\big(1, F_0(x,v)\big) = \big(1, F_1(x,v)\big) = F(1,x,v)$ per ogni $(x,v) \in M_n \times \bar{r}H^n$.

Precisamente osserviamo che

$$F_0(x,v) = \big(\gamma_n\big(x, v - \lambda(0)\pi^N(v)\big), \pi^N(v)\big) = \big(\gamma_n(x,v), \pi^N(v)\big) = g_n(x,v);$$

inoltre

$$\begin{aligned} F_1(x,v) = \big(\gamma_n\big(x, v - \lambda(1)\pi^N(v)\big), \pi^N(v)\big) &= \big(\gamma_n\big(x, v - \pi^N(v)\big), \pi^N(v)\big) \\ &= \big(\gamma_n\big(x, \pi_N(v)\big), \pi^N(v)\big), \end{aligned}$$

quindi la condizione (ii) di cui sopra è equivalente a

$$d_1 \circ g_n(x,v) = \big(\gamma_n\big(x, \pi_N(v)\big), \pi^N(v)\big) \text{ per ogni } (x,v) \in M_n \times H^n \text{ tale che } \|v\| \leq r(x).$$

Infine, riassumendo, a meno di estendere in modo banale l'isotopia d_1 a tutto $\mathbb{R} \times H_N \times H^N$, a partire dall'isotopia F si è determinata una isotopia di embedding $d\colon \mathbb{R} \times H_N \times H^N \to \mathbb{R} \times H_N \times H^N$ con dominio proprio I della forma

$$d(t, x_1, x_2) = \big(t, \delta_t(x_1, x_2), x_2\big),$$

tale che

(i) $d_0 = \mathrm{id}$, e

(ii) $d_1 \circ g_n(x,v) = \big(\gamma_n\big(x, \pi_N(v)\big), \pi^N(v)\big)$ per ogni $(x,v) \in M_n \times \bar{r}H_n$.

Nella sezione 2.6 abbiamo considerato la mappa $j_n^{-1}\colon \mathcal{U}_{n+1} \times H^{n+1} \to M_n \times H^n$, in cui, si ricordi,

$$\mathcal{U}_{n+1} = T_n\big(M_n \times \tfrac{1}{2} r_{|M_n} e_{n+1}\big)$$

è un intorno tubolare aperto di M_n in M_{n+1} (cfr. (2.6.2)). Poiché la nostra varietà è uno spazio topologico normale, esiste un aperto V tale che

$$M_n \subset \overline{\mathcal{U}^0_{n+1}} \overset{\downarrow}{\subset} V \subset \overline{V} \overset{\downarrow}{\subset} \mathcal{U}_{n+1} \subset M_{n+1}.$$

Si consideri la mappa

$$d_1 \circ g_n \circ j_n^{-1}|_{\overline{V}\times\{0\}} \colon \overline{V} \times \{0\} \subset \mathcal{U}_{n+1} \times H^{n+1} \to H_N \times H^N \tag{2.7.3}$$

e si osservi che la sua immagine è invero contenuta in $H_N \times \{0\}$. Infatti, indicato con x il generico elemento di $\overline{V}$, posto

$$(y, v) := j_n^{-1}(x, 0) \in M_n \times H^n$$

allora

$$j_n(y, v) = \big(\lambda_n(y, \pi_{n+1}(v)), \pi^{n+1}(v)\big) = (x, 0)$$

e quindi in particolare $\pi^{n+1}(v) = 0$, equivalentemente $v \in H_{n+1}$. Dunque $v \in H^n \cap H_{n+1}$, i.e., $v \in \langle e_{n+1}\rangle$, in particolare (si ricordi che $N \gg n + 1$) $\pi^N(v) = 0$. Segue che, nelle notazioni precedentemente introdotte,

$$d_1 \circ g_n \circ j_n^{-1}(x, 0) = d_1 \circ g_n(y, v) = \big(\gamma_n\big(y, \pi_N(v)\big), \pi^N(v)\big) \in H_N \times \{0\}.$$

Per concludere la prova del passo induttivo e quindi la dimostrazione della proposizione 2.75 il seguente lemma di cui abbiamo già accennato giuoca un ruolo di centrale importanza:

Lemma 2.76. *Il differenziale*

$$d(g_n \circ j_n^{-1})|_{T(\mathcal{U}_{n+1}\times H^{n+1})_{\mathcal{U}_{n+1}\times\{0\}}} \colon (x, w, v) \in T\mathcal{U}_{n+1} \times H^{n+1} \mapsto d(g_n \circ j_n^{-1})_{(x,0)}(w, v) \in H \tag{2.7.4}$$

si estende ad un isomorfismo layer-forte

$$TM_{n+1} \times H^{n+1} \longrightarrow M_{n+1} \times H$$

layer-forte-isotopo a $\tau_{n+1} \colon TM_{n+1} \times H^{n+1} \to M_{n+1} \times H$.

Dimostrazione del lemma 2.76. Mediante l'identificazione operata da j_n, scriviamo il generico elemento di $\mathcal{U}_{n+1}$ come $(x, s) \in M_n \times \langle e_{n+1}\rangle$. Ciò è possibile, infatti, come si è osservato precedentemente,

$$j_n^{-1}|_{\mathcal{U}_{n+1}\times\{0\}} \colon (y, 0) \in \mathcal{U}_{n+1} \times \{0\} \xrightarrow{\cong} j_n^{-1}(y, 0) = (x, s) \in M_n \times (H^n \cap H_{n+1}) = M_n \times \langle e_{n+1}\rangle.$$

Se $(x, s) \in \mathcal{U}_{n+1}$ e $v \in H^{n+1}$, allora

$$g_n \circ j_n^{-1}(x, s, v) = g_n(x, s + v), \tag{2.7.5}$$

infatti $j_n(x, s + v) = \big(\lambda_n(x, \pi_{n+1}(s + v)), \pi^{n+1}(s + v)\big) = \big(\lambda_n(x, s), v\big) = (x, s, v)$, in cui l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che si è identificato $\mathcal{U}_{n+1} \times \{0\}$ con la sua immagine mediante j_n^{-1}.

Se scriviamo

$$T\mathcal{U}_{n+1} = TM_n \oplus \big(\tfrac{1}{2} r_{|M_n} e_{n+1} \times \mathbb{R}\big)$$

$(\mathcal{U}_{n+1} = T_n\big(M_n \times \frac{1}{2} r_{|M_n} e_{n+1}\big) \cong M_n \times \frac{1}{2} r_{|M_n} e_{n+1})$, il nostro differenziale 2.7.4 diventa la mappa

$$TM_n \oplus \big(\tfrac{1}{2} r_{|M_n} e_{n+1} \times \mathbb{R}\big) \times H^{n+1} \longrightarrow M_n \times \tfrac{1}{2} r_{|M_n} e_{n+1} \times H$$

data da $(x, w, s, u, v) \mapsto \big(x, s, d(g_n \circ j_n^{-1})_{(x,s,0)}(w, u, v)\big)$, in cui $w \in T_x M_n$. Scritto in questa forma si vede subito che 2.7.4 è isotopo all'isomorfismo di fibrati definito da

$$(x, w, s, u, v) \longmapsto \big(x, s, d(g_n \circ j_n^{-1})_{(x,0,0)}(w, u, v)\big) \overset{(2.7.5)}{=} \big(x, s, [d(g_n)_{(x,0)}](w, u + v)\big). \tag{2.7.6}$$

Per l'ipotesi induttiva su $\beta_{n,t}$, $\beta_{n,0} \circ (2.7.6) = (2.7.6)$ è (fortemente-layer) isotopo a $\beta_{n,1} \circ (2.7.6)$. Inoltre, ancora per l'ipotesi induttiva (c) $\beta_{n,1} \circ (2.7.6) = \tau_n$, per cui, in definitiva, si ha che (2.7.6) è isotopo a

$$\begin{aligned}(x, w, s, u, v) \longmapsto \big(s, \tau_n(x, w, u + v)\big) &= \big(x, s, \tau\big[d(i_n)_x(w)\big] + \tau\big[S_n(x, u + v)\big]\big) \\ &= \big(x, s, \tau\big[d(i_n)_x(w) + S(x, u + v)\big]\big).\end{aligned} \tag{2.7.7}$$

Mostreremo adesso che per ogni $t \in I = [0,1]$ la mappa $T\mathcal{U}_{n+1} \times H^{n+1} \to \mathcal{U}_{n+1} \times H$ definita da

$$(x, w, s, u, v) \longmapsto \big(x, s, \tau\big[d(i_{n+1})_{(x,ts)}(w, tu) + S\big((x, ts), (1-t)u + v\big)\big]\big) \tag{2.7.8}$$

è un isomorfismo. Supponiamo che

$$d(i_{n+1})_{(x,ts)}(w_0, tu_0) + S\big((x, ts), (1-t)u_0 + v_0\big) = \\ = d(i_{n+1})_{(x,ts)}(w_1, tu_1) + S\big((x, ts), (1-t)u_1 + v_1\big).$$

Dunque esiste una carta (φ_i, W_i) di M contenente i due punti insieme con $x \in M_n$ e $(x, ts) \in M_{n+1}$ (una carta (φ_i, W_i) contenente detti punti esiste poiché, per definizione, S applica una coppia (x, v) in un vettore di T_xM, (cfr. lemma 2.46)). Siccome $W_i \cap M_n \neq \varnothing$, dal lemma 2.46 segue che la rappresentazione di $d\varphi_i \circ S\big((x, ts), (1-t)u_j + v_j\big)$ in questa carta è della forma

$$\big((x, ts), (1-t)u_j + v_j + \beta(x, ts)\big((1-t)u_j + v_j\big)\big),$$

in cui β assume i propri valori in H_n. Inoltre, $d(i_{n+1})_{(x,ts)}(w_j, tu_j)$ è della forma $\big((x, ts), w_j + tu_j\big)$. La somma di questi due termini è quindi

$$d\varphi_i \circ S\big((x, ts), (1-t)u_j + v_j\big) + d(i_{n+1})_{(x,ts)}(w_j, tu_j) = \big((x, ts), u_j + v_j + w_j + \beta(x, ts)\big((1-t)u_j + v_j\big)\big).$$

Ora, $w_j + \beta(x, ts)\big((1-t)u_j + v_j\big) \in H_n$, $u_j \in \langle e_{n+1} \rangle$, $v_j \in H^{n+1}$, da cui segue che (i) $u_0 = u_1$ e (ii) $v_0 = v_1$, quindi

$$w_0 + \beta(x, ts)\big((1-t)u_0 + v_0\big) = w_1 + \beta(x, ts)\big((1-t)u_0 + v_0\big),$$

i.e., (iii) $w_0 = w_1$.

Posto $t = 0$ in (2.7.8) si ottiene l'isomorfismo

$$(x, w, s, u, v) \longmapsto \big(x, s, \tau\big[d(i_{n+1})_{(x,0)}(w, 0) + S\big((x, 0), u + v\big)\big]\big) = \big(x, s, \tau\big[d(i_n)_x(w) + S\big(x, u + v\big)\big]\big),$$

e cioè la mappa 2.7.7.

Posto $t = 1$ in (2.7.8) si ottiene l'isomorfismo

$$T\mathcal{U}_{n+1} \times H^{n+1} = TM_n \oplus \big(\tfrac{1}{2} r_{|M_n} e_{n+1} \times \mathbb{R}\big) \times H^{n+1} \longrightarrow \mathcal{U}_{n+1} \times H \\ (x, w, s, u, v) \longmapsto \big(x, s, \tau\big[d(i_{n+1})_{(x,s)}(w, u) + S\big((x, s), v\big)\big]\big) \tag{2.7.9}$$

il quale è certamente isotopo all'isomorfismo

$$\tau_{n+1} \colon T\mathcal{U}_{n+1} \times H^{n+1} \to \mathcal{U}_{n+1} \times H \\ \tau_{n+1}(x, v_1, v_2) = \big(x, \tau\big[d(i_{n+1})_x(v_1) + S_{n+1}(x, v_2)\big]\big). \tag{2.7.10}$$

D'altra parte quest'ultimo si estende a $\tau_{n+1} \colon TM_{n+1} \times H^{n+1} \to M_{n+1} \times H$, dunque anche (2.7.9) si estende ad un isomorfismo

$$TM_{n+1} \times H^{n+1} \to M_{n+1} \times H,$$

isotopo a $\tau_{n+1} \colon TM_{n+1} \times H^{n+1} \to M_{n+1} \times H$.

Riassumendo, abbiamo dimostrato che il differenziale (2.7.4) è isotopo a (2.7.6) il quale è isotopo a (2.7.7) il quale è isotopo a (2.7.9) il quale si estende a un isomorfismo $TM_{n+1} \times H^{n+1} \to M_{n+1} \times H$. Segue che anche il differenziale (2.7.4) si estende a un isomorfismo

$$TM_{n+1} \times H^{n+1} \to M_{n+1} \times H.$$

Infine, siccome l'estensione di (2.7.9) è isotopa a $\tau_{n+1} \colon TM_{n+1} \times H^{n+1} \to M_{n+1} \times H$, anche l'estensione del differenziale (2.7.4) (che è isotopa all'estensione di (2.7.9)) è isotopa a τ_{n+1}, quest'ultima isotopia essendo layer forte perché tutte le isotopie usate per ottenere τ_{n+1} sono layer forti. La dimostrazione del lemma 2.76 è conclusa.

□

Concludiamo la dimostrazione della proposizione 2.75. Vogliamo anzitutto poter applicare il teorema D.19. La mappa 2.7.3 che riportiamo qui di seguito per facilitare la lettura,

$$d_1 \circ g_n \circ j_n^{-1}|_{\overline{V}\times\{0\}} \colon \overline{V} \times \{0\} \subset \mathcal{U}_{n+1} \times H^{n+1} \to H_N \times H^N,$$

si estende ad un embedding

$$h\colon M_{n+1} \longrightarrow H_N$$

(per questo basti ricordare che ogni spazio metrico compatto di dimensione n ammette un embedding in uno spazio euclideo di dimensione $2n+1$). Per costruzione $h|_V = d_1 \circ g_n \circ j_n^{-1}(\cdot, 0)|_V$.

Posto $H_N^n := H_N \cap H^n$, la restrizione

$$\gamma_n|_{M_n \times \frac{r}{2} H_N^n} \colon M_n \times \tfrac{r}{2} H_N^n \to H_N$$

è un embedding, inoltre $d_1 \circ g_n(M_n) \subset \gamma_n(M_n \times \frac{r}{2} H_N^n) \subset H_N$. D'altra parte (cfr. [Wa 60], Part I.5) $\gamma_n|_{M_n \times \frac{r}{2} H_N^n}$ si estende ad un embedding aperto

$$g_n' \colon M_n \times H_N^n \subset M_n \times H^n \longrightarrow H_N$$

dunque, nelle notazioni del teorema D.19, $h|_V$ si estende ad un embedding aperto

$$g\colon V \times H_N^{n+1} \longrightarrow H_N$$

definito ponendo $g \overset{\text{def}}{:=} g_n' \circ j_n^{-1}$, in cui $j_n^{-1} \colon V \times H_N^{n+1} \subset \mathcal{U}_{n+1} \times H^{n+1} \to M_n \times H^n$.

Si osservi che, con le definizioni date, $h \cup g$ è effettivamente un embedding. Per invocare il teorema D.19, è necessario estendere $dg|_{T(V\times H_N^{n+1})_{\overline{V}\times\{O\}}}$ ad una qualche mappa

$$\alpha\colon T(M_{n+1} \times H_N^{n+1})_{M_{n+1}\times\{O\}} \longrightarrow h(M_{n+1}) \times H_N. \tag{2.7.11}$$

Per raggiungere questo obiettivo serve essenzialmente estendere il differenziale di (2.7.3) insieme ad alcune semplici considerazioni di isotopia elementare del tipo di quelle già approntate per dimostrare il lemma 2.76. Consideriamo dunque

$$d(d_1 \circ g_n \circ j_n^{-1})|_{T(\overline{V}\times H^{n+1})_{\overline{V}\times\{0\}}} \colon (x, w, v) \in T(\overline{V}) \times H^{n+1} \longmapsto d(d_1 \circ g_n \circ j_n^{-1})_{(x,0)}(w, v) \in H.$$

Dal lemma 2.76 segue che, purché N sia scelto sufficientemente grande, quest'ultimo si estende ad un isomorfismo

$$TM_{n+1} \times H^{n+1} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \big(h(M_{n+1}) \times H_N\big) \times H^N\ ,$$

della forma (si ricordi che con h si è indicata l'estensione di $d_1 \circ g_n \circ j_n^{-1}(\cdot, 0)$ a M_{n+1})

$$\big((x, w), v\big) \in TM_{n+1} \times H^{n+1} \longmapsto \Big(\big(h(x), \xi(w, v)\big), \pi^N(v)\Big) \in TH_N \times H^N \tag{2.7.12}$$

in cui $\xi\colon TM_{n+1} \times H^{n+1} \to H_N$ è una mappa opportuna (precisamente: siccome per il lemma 2.76 $T(g_n \circ j_n^{-1})|T(\overline{V} \times H^{n+1})_{\overline{V}\times\{0\}}$ si estende ad un isomorfismo definito su tutto $TM_{n+1} \times H^{n+1}$, chiaramente

$$d(d_1 \circ g_n \circ j_n^{-1})|_{T(\overline{V}\times H^{n+1})_{\overline{V}\times\{0\}}} = d(d_1) \circ d(g_n \circ j_n^{-1})|_{T(\overline{V}\times H^{n+1})_{\overline{V}\times\{0\}}}$$

si estende anch'esso ad un isomorfismo definito su tutto $TM_{n+1} \times H^{n+1}$; inoltre, siccome

$$d_1 \circ g_n(\cdot\,, \cdot\cdot) = \gamma_n\big(\cdot\,, \pi_N(\cdot\cdot)\big) \times \pi^N(\cdot\cdot),$$

l'estensione richiesta è effettivamente della forma 2.7.12).

Abbiamo ora tutti gli strumenti per concludere: considerazioni del tutto analoghe alle precedenti consentono di determinare una estensione di $dg|T(V \times H_N^{n+1})_{\overline{V}\times\{O\}}$ a una mappa del tipo indicato in (2.7.11). Le ipotesi di applicabilità del teorema D.19 sono tutte soddisfatte, quest'ultima fornisce quindi una estensione di $g|_{\overline{\mathcal{U}^0_{n+1}}\times(r/2)H_N^{n+1}}$ a un intorno tubolare $G\colon M_{n+1}\times H_N^{n+1}\to H_N$ di $h(M_{n+1})$.

Si definisca $\tilde g\colon M_{n+1}\times H^{n+1}\to H$ ponendo $\tilde g(x,v)=G\big(x,\pi_N(v)\big)+\pi^N(v)$. $\tilde g$ è un intorno tubolare di $h(M_{n+1})$ in H. Si noti che $\tilde g|_{j_n(\tilde D^0_n)}\equiv d_1\circ g_n\circ j_n^{-1}$.

Per concludere la dimostrazione del passo induttivo utilizzeremo l'isotopia J_{n+1} fornita dal lemma 2.71: definiamo

$$g_{n+1}\colon M_{n+1}\times H^{n+1}\to H$$

mediante

$$g_{n+1}=d_1^{-1}\circ\tilde g\circ J_{n+1,1}.$$

Proviamo che le richieste della proposizione 2.75 sono tutte soddisfatte: se $(x,v)\in\widetilde{D}^0_n$ allora

$$\begin{aligned}g_{n+1}\circ\ell_n(x,v)&=d_1^{-1}\circ\tilde g\circ J_{n+1,1}\circ\ell_n(x,v)\\&=d_1^{-1}\circ\tilde g\circ j_n(x,v)=g_n(x,v).\end{aligned}$$

Posto $\overline{n+1}:=N$, g_{n+1} è un embedding aperto soddisfacente le condizioni (a), (b) e (d). Infine, il lemma 2.76 fornisce una isotopia β_t^{n+1} opportuna soddisfacente la condizione (c).

□

Osservazione 2.77. La mappa $F\colon\mathbb{R}\times M_n\times H^n\to\mathbb{R}\times H_N\times H^N$ definita da

$$(t,x,v)\mapsto\Big(t,\gamma_n\big(x,v-\lambda(t)\big[\pi^N(v)\big]\big),\pi^N(v)\Big)$$

è una isotopia di embedding aperti con dominio proprio $I=[0,1]$.

Innanzitutto per la buona definizione di γ_n occorre osservare che $v-\lambda(t)\big[\pi^N(v)\big]\in H^n$, e ciò è vero, infatti, in particolare, è $N>n$ e quindi $\pi^N(v)\in H^N\subset H^n$, dunque $v-\lambda(t)\big[\pi^N(v)\big]\in H^n$. Proviamo che, per ogni t, F_t è iniettivo, e cioè che da

$$\begin{gathered}\Big(\gamma_n\big(x,v-\lambda(t)\big[\pi^N(v)\big]\big),\pi^N(v)\Big)=\Big(\gamma_n\big(x',v'-\lambda(t)\big[\pi^N(v')\big]\big),\pi^N(v')\Big)\\ \Longleftrightarrow\\ \begin{cases}\gamma_n\big(x,v-\lambda(t)\big[\pi^N(v)\big]\big)=\gamma_n\big(x',v'-\lambda(t)\big[\pi^N(v')\big]\big)\\ \pi^N(v)=\pi^N(v')\end{cases}\end{gathered}\tag{2.7.13}$$

segue $x=x'$ e $v=v'$. Da (2.7.13) si ha in particolare che $\pi^N(v)=\pi^N(v')$, da cui

$$\begin{aligned}\pi^N\big(v-\lambda(t)\big[\pi^N(v)\big]\big)&=\pi^N(v)-\lambda(t)\,\pi^N\big(\pi^N(v)\big)=\pi^N(v)-\lambda(t)\,\pi^N(v)=\\&=\pi^N(v')-\lambda(t)\,\pi^N(v')=\pi^N(v')-\lambda(t)\,\pi^N\big(\pi^N(v')\big)=\pi^N\big(v'-\lambda(t)\big[\pi^N(v')\big]\big).\end{aligned}$$

Dunque, ricordando la (2.7.2) e la prima delle (2.7.13)

$$\begin{aligned}g_n\big(x,v-\lambda(t)\big[\pi^N(v)\big]\big)&=\Big(\gamma_n\big(x,v-\lambda(t)\big[\pi^N(v)\big]\big),\pi^N\big(v-\lambda(t)\big[\pi^N(v)\big]\big)\Big)=\\&=\Big(\gamma_n\big(x',v'-\lambda(t)\big[\pi^N(v')\big]\big),\pi^N\big(v'-\lambda(t)\big[\pi^N(v')\big]\big)\Big)=g_n\big(x',v'-\lambda(t)\big[\pi^N(v')\big]\big),\end{aligned}$$

da cui, essendo per ipotesi induttiva g_n un embedding e dunque iniettivo, segue che

$$\begin{cases}x=x'\\ v-\lambda(t)\big[\pi^N(v)\big]=v'-\lambda(t)\big[\pi^N(v')\big]\end{cases}$$

i.e., $x=x'$ e $v=v'$.

Si osservi esplicitamente che, per ogni t, F_t è un embedding *aperto*, infatti, per ipotesi induttiva g_n è un embedding *aperto* ed inoltre π^N e π_N, in quanto proiezioni, sono mappe aperte. Infine F ha chiaramente dominio proprio I perché abbiamo avuto cura di scegliere $\lambda\equiv1$ su $[1,+\infty[$ e $\lambda\equiv0$ su $]-\infty,0]$.

$$
\begin{tikzcd}
 & M_n \times H^n \arrow[dr, "g_n"] & \\
 & \widetilde{D}^0_n \arrow[u, hook, "\cup"'] \arrow[r] \arrow[d, "j_n"] \arrow[ddl, "\ell_n"'] \arrow[dddl] & H \arrow[dddd, "\mathrm{id}"] \\
 & \widetilde{G}_{n+1} \arrow[d, hook, "\cap"'] & \\
\mathcal{U}^0_{n+1} \times H^{n+1} \arrow[d, hook, "\cap"'] & \mathcal{U}_{n+1} \times H^{n+1} \arrow[d, hook, "\cap"'] & \\
M_{n+1} \times H^{n+1} \arrow[r, "J_{n+1,1}"] \arrow[drr, "g_{n+1}"] & M_{n+1} \times H^{n+1} \arrow[dr, "d_1^{-1} \circ \tilde{g}"] & \\
\widetilde{D}^0_{n+1} \arrow[u, hook, "\cup"'] \arrow[rr] & & H
\end{tikzcd}
\tag{2.7.14}
$$

Con la terminologia introdotta nella sezione 2.3, grazie al lemma precedentemente dimostrato, possiamo finalmente dimostrare il seguente importante Teorema.

Teorema 2.78. *Sia M una varietà separabile, metrizzabile, di classe C^∞ modellata su uno spazio di Hilbert separabile H di dimensione infinita. Allora esiste un embedding di classe C^∞ da M su un sottoinsieme aperto di H.*

Dimostrazione. Per il corollario 2.34 esiste una mappa di classe C^∞, Fredholm di indice zero, limitata e propria $f\colon M \to H$ trasversa ad H_n per ogni n in $\mathbb{N}$.

Invochiamo la proposizione 2.44 e dotiamo M di un atlante layer forte per f. Costruiamo per ogni n una applicazione S_n come prescritto dal lemma 2.46, dunque determiniamo intorni standard delle varietà M_n come indicato dalla proposizione 2.63 ed otteniamo quindi una filtrazione di Fredholm augmentata $(Z_n)_n$ (come indicato dal teorema 2.65).

Le ipotesi di applicabilità della proposizione 2.75 sono verificate, infatti per il teorema di Kuiper esiste una banalizzazione globale per il fibrato tangente ad M, inoltre, per l'osservazione 2.74 tale banalizzazione può essere assunta di tipo layer.

Nelle notazioni della proposizione 2.75, posto

$$\xi_n := g_n \circ T_n^{-1}|_{Z_n^0},$$

ξ_n è un embedding aperto di Z_n^0 in H. Poiché $D_n^0 \subset \widetilde{D}_n^0$, per la parte (a) della proposizione 2.75, ξ_{n+1} è una estensione di ξ_n. Siccome per il punto (2) del teorema 2.65, $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n^0$ segue che gli ξ_n definiscono un embedding aperto di M in H.

□

Appendice A

Propedeuticità topologiche

A.1 Ricoprimenti

Sia X uno spazio topologico; un *ricoprimento aperto* di X, come noto, è una collezione $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di aperti che ricoprono X, nel senso che $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Definizione A.1. Sia X uno spazio topologico e $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento aperto di X.

- Un *sottoricoprimento* di $\mathcal{U}$ è un sottoinsieme $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ che sia a sua volta un ricoprimento di X, in altri termini, $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ è un sottoricoprimento di $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ se è un ricoprimento di X e per ogni $\beta \in B$ esiste $\alpha = \alpha(\beta) \in A$ tale che $V_\beta = U_\alpha$.

- Un *raffinamento* di $\mathcal{U}$ è un ricoprimento $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ di X tale che $\forall\, \beta \in B$, $\exists!\, \alpha = \alpha(\beta) \in A$ per cui $V_\beta \subset U_\alpha$.

- Un *raffinamento shrunk* di $\mathcal{U}$ è un ricoprimento $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di X tale che $\forall \alpha \in A$, $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$.

- $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è detto *puntualmente finito* se per ogni x in X esistono al più un numero finito di indici $\alpha \in A$ per cui $x \in U_\alpha$.

- $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è detto *localmente finito* se ogni $x \in X$ ammette un intorno aperto $U \ni x$ tale che $U \cap U_\alpha = \varnothing$ tranne che per un numero finito di indici $\alpha \in A$ (i.e., U interseca solo un numero finito di elementi U_α del ricoprimento).

Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento di uno spazio X. Per ogni $C \subset X$, si definisce la *stella* di C rispetto a $\mathcal{U}$, e si denota con $\mathrm{St}(C,\mathcal{U})$, l'insieme $\star(C,\mathcal{U}) = \mathrm{St}(C,\mathcal{U}) := \bigcup\{U_\alpha : C \cap U_\alpha \neq \varnothing\}$, ossia l'unione estesa a tutti gli insiemi del ricoprimento che hanno intersezione non vuota con C. Quando $\mathcal{U}$ sarà implicito dal contesto scriveremo semplicemente $\mathrm{St}(C)$ in luogo di $\mathrm{St}(C,\mathcal{U})$. Diremo che $\mathcal{U}$ è *star-finito* se per ogni $\alpha \in A$, U_α interseca solamente un numero finito di U_β, i.e., per ogni α, l'unione che definisce $\mathrm{St}(U_\alpha)$ è estesa ad un numero finito di indici.

Definizione A.2. Un ricoprimento $\mathcal{B}$ di uno spazio X è detto un *raffinamento baricentrico* di un dato ricoprimento $\mathcal{U}$ se il ricoprimento $\{\mathrm{St}(x,\mathcal{B}) : x \in X\}$ di X raffina $\mathcal{U}$.

Definizione A.3. Sia (X,τ) uno spazio topologico. Diremo che

- X è *compatto* se ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito;

- X è *localmente compatto* se $\forall\, x \in X$ esiste $U \in \tau$ tale che $x \in U$ e $\overline{U} \subset X$ è compatto;

- X è *paracompatto* se è di Hausdorff ed ogni ricoprimento aperto di X ammette un raffinamento localmente finito.

Osservazione A.4. Sia $f\colon X \to Y$ una mappa da uno spazio topologico X a valori in uno spazio topologico Y. Posto $R := f(X)$, se $R \subset Y$ è un sottoinsieme *chiuso* allora i seguenti fatti sono equivalenti:

(1) $\forall\, K \subset Y$ compatto, $f^{-1}(K) \subset X$ è un compatto.

(2) $\forall\, K \subset R$ compatto, $f^{-1}(K) \subset X$ è un compatto.

Prova: Chiaramente (1) $\Rightarrow$ (2). Verifichiamo che anche (2) $\Rightarrow$ (1) : Sia $K \subset Y$ un compatto, allora, poiché R è un chiuso di Y, $R \cap K$ è un sottoinsieme chiuso di K rispetto alla topologia di sottospazio su K. Inoltre, siccome K è compatto, $R \cap K \subset K$ è compatto perché chiuso in un compatto. Dunque (i) $R \cap K \subset Y$ è un sottoinsieme compatto, (ii) $R \cap K \subset R$, e quindi per l'ipotesi (2) $f^{-1}(K) = f^{-1}(R \cap K)$ è un compatto.

Proposizione A.5. *Se X è uno spazio paracompatto e se $\{U_i\}$ è un ricoprimento aperto, allora esiste un ricoprimento aperto localmente finito $\{V_i\}$ di X tale che $V_i \subset U_i$ per ogni i.*

Dimostrazione. Sia $\{V_k\}$ un raffinamento aperto localmente finito di $\{U_i\}$. Per ogni k esiste un indice $i = i(k)$ tale che $V_k \subset U_{i(k)}$. Sia W_i l'unione dei V_k tali che $i(k) = i$. Allora l'insieme dei W_i costituisce un ricoprimento aperto localmente finito di X, infatti ogni intorno di un punto che interseca un numero infinito dei W_i deve intersecare anche un numero infinito di insiemi V_k. □

Ricordiamo che uno spazio di Hausdorff è *normale* se ogni coppia di insiemi chiusi disgiunti ammette intorni aperti disgiunti. In particolare, ogni spazio di Hausdorff paracompatto è normale, come stabilito dalla seguente proposizione:

Proposizione A.6. *Se X è uno spazio paracompatto allora X è normale. Se, inoltre, $\{U_i\}$ è un ricoprimento aperto localmente finito di X, allora esiste un ricoprimento aperto localmente finito $\{V_i\}$ di X tale che per ogni i, $\overline{V}_i \subset U_i$.*

Dimostrazione. Si rimanda il lettore a [Bou3 89]. □

Ognuna delle seguenti proprietà caratterizza gli spazi normali:

(a) Per ogni chiuso F e aperto $U \supset F$ esiste un insieme aperto V con $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

(b) Per ogni coppia di insiemi chiusi disgiunti A e B, esiste un aperto U con $A \subset U$ e $\overline{U} \cap B = \varnothing$.

(c) Ogni coppia di insiemi chiusi disgiunti ammette intorni la cui chiusura ha intersezione vuota.

Teorema A.7. *Uno spazio topologico è normale se e solo se ogni suo ricoprimento aperto puntualmente finito ammette un raffinamento shrunk aperto.*

Dimostrazione. Una dimostrazione di questo teorema si può trovare per esempio in [Du 66, Cap. 7, Sezione 6]. □

Il teorema A.7 è utilizzato implicitamente all'interno della tesi nelle costruzioni di cui nella sottosezione 2.5.3 nel seguente modo: se $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto localmente finito di uno spazio metrizzabile allora (siccome gli spazi metrizzabili sono normali e di Hausdorff), per il teorema A.7 $\mathcal{U}$ ammette un raffinamento shrunk (infatti ogni ricoprimento *localmente finito* è chiaramente *puntualmente finito*). In particolare

Corollario A.8. *Ogni ricoprimento aperto numerabile di uno spazio metrizzabile, in quanto paracompatto, ammette un raffinamento shrunk aperto.*

Il seguente risultato è ben noto, ed è conseguenza del fatto che ogni spazio metrizzabile separabile è numerabilmente paracompatto e di Lindelöf. Per una dimostrazione dettagliata si consulti per esempio [Du 66, Cap. 8, Sezione 3].

Lemma A.9. *Ogni ricoprimento aperto di uno spazio metrizzabile separabile ammette un raffinamento numerabile star-finito.*

Avremo bisogno anche del seguente lemma:

Lemma A.10. *Sia $\{U_i\}_{i\geqslant 1}$ un ricoprimento aperto localmente finito di uno spazio metrizzabile separabile X; sia $\{V_i\}_{i\geqslant 1}$ un raffinamento shrunk di $\{U_i\}_{i\geqslant 1}$. Allora esiste un raffinamento star-finito $\{W_j\}_{j\geqslant 1}$ di $\{V_i\}_{i\geqslant 1}$ tale che*

$$W_j \subset V_{i(j)} \;\Rightarrow\; \mathrm{St}(W_j) \subset U_{i(j)}.$$

Dimostrazione. Fissato $x \in X$, siano $1(x), \dots, m(x)$ gli interi per cui $x \in U_{i(x)}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Supponiamo che $x \in V_{1(x)}$. Siccome $x \notin \overline{V}_j$ per $j \notin \big\{1(x), \dots, m(x)\big\}$, l'insieme

$$W_x = V_{1(x)} \cap U_{2(x)} \cap \dots \cap U_{m(x)} \cap \left[X \setminus \overline{\bigcup\big\{V_j : j \notin \{1(x), \dots, m(x)\}\big\}}\right]$$

è un intorno aperto di x: infatti, se fosse $x \in \overline{\bigcup\big\{V_j : j \notin \{1(x), \dots, m(x)\}\big\}}$ allora ogni intorno di x intersecherebbe qualche V_j. D'altra parte $\{\overline{V}_j\}_{j\geq 1}$ è localmente finito, dunque esiste un intorno W di x che interseca esclusivamente un numero finito di elementi di $\{\overline{V}_j\}_{j\geq 1}$, che indicheremo con $\overline{V}_{j_1}, \dots, \overline{V}_{j_p}$. Quindi $W \cap (X \setminus \overline{V}_{j_1}) \cap \dots \cap (X \setminus \overline{V}_{j_p})$ è un intorno di x che non interseca alcuno dei V_j, contraddizione, dunque

$$x \in X \setminus \overline{\bigcup\big\{V_j : j \notin \{1(x), \dots, m(x)\}\big\}}.$$

Supponiamo che $W_x \cap W_{x'} \neq \varnothing$ e $W_x \subset V_j$. Dunque $j = i(x)$ per qualche intero $i(x)$. Essendo $W_{x'} \cap V_j \neq \varnothing$, per qualche indice i' risulta $j = i'(x')$. Segue che $W_x \cup W_{x'} \subset U_j$. Il lemma è dimostrato scegliendo un raffinamento numerabile star-finito del ricoprimento $\{W_x\}_{x\in X}$. □

A.2 Assiomi di numerabilità

Definizione A.11. Siano X uno spazio topologico e x_0 in X. Un insieme $\mathcal{U}$ di intorni di x_0 si dice *base di intorni* di x_0 o *sistema fondamentale di intorni* di x_0 se ogni intorno di x_0 contiene un intorno in $\mathcal{U}$.

Definizione A.12. Uno spazio topologico X soddisfa il *primo assioma di numerabilità*, e si dice *primo numerabile*, se ogni punto ha una base di intorni numerabile, i.e., per ogni punto x in X esiste una successione $U_1, U_2, \dots$ di intorni aperti di x tale che per ogni intorno V di x esiste i per cui $U_i \subset V$. Esso soddisfa il *secondo assioma di numerabilità*, ed in tal caso si dice anche che X è *secondo numerabile* oppure che X è *a base numerabile*, se ha una base numerabile per la topologia, esiste cioè una famiglia numerabile di aperti tale che ogni altro aperto è unione di aperti della famiglia.

Osservazione A.13. Si dimostra [Bou4 90] che uno spazio topologico che soddisfa il secondo assioma di numerabilità soddisfa anche il primo assioma di numerabilità.

La nozione espressa dalla prossima definizione è una sorta di terzo assioma di numerabilità: la *separabilità*:

Definizione A.14. Uno spazio topologico si dice *separabile* se contiene un sottoinsieme denso e numerabile.

Proposizione A.15. *Ogni spazio topologico a base numerabile è separabile.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di uno spazio topologico X; per ogni aperto $U \in \mathcal{B}$ scegliamo un punto $p_U \in U$. L'insieme $B = \{p_U : U \in \mathcal{B}\}$ è numerabile, l'insieme $X \setminus B$ non contiene alcun aperto della base e quindi $\overline{B} = X$. □

Esempio A.16. Uno spazio di Banach dotato di una base di Schauder è separabile.

Proposizione A.17. *Ogni spazio metrico separabile è a base numerabile.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio metrico separabile, scegliamo un sottoinsieme $E \subset X$ denso e numerabile. È sufficiente dimostrare che la famiglia numerabile di palle aperte

$$\mathcal{B} = \left\{ B(e, 2^{-n}) \; : \; e \in E, n \in \mathbb{N} \right\}$$

è una base della topologia. Sia U un aperto di X e $x \in U$. Sia $n \in \mathbb{N}$ un intero tale che $B(x, 2^{1-n}) \subset U$. Poiché E è denso esiste $e \in E \cap B(x, 2^{-n})$. Per simmetria $x \in B(e, 2^{-n})$ e per la disuguaglianza triangolare $B(e, 2^{-n}) \subset B(x, 2^{1-n}) \subset U$. □

Osservazione A.18. Gli spazi metrici soddisfano il primo assioma di numerabilità. In generale uno spazio metrico *non* soddisfa il secondo assioma di numerabilità (per esempio $\mathbb{R}$ con la topologia discreta) a meno che non si supponga che esso sia separabile: è questo il caso degli spazi metrici compatti. In ogni caso, gli spazi metrici separabili soddisfano entrambi gli assiomi di numerabilità.

Osservazione A.19. Se uno spazio topologico ha un sottoinsieme non numerabile discreto, non può essere secondo numerabile.

Osservazione A.20 *(Proprietà di Lindelöf).* In uno spazio topologico a base numerabile, da ogni ricoprimento aperto si può sempre estrarre un sottoricoprimento numerabile.

Esempio A.21. Sia $C(\mathbb{R})$ lo spazio di Banach delle funzioni continue limitate su $\mathbb{R}$ con la norma data dall'estremo superiore. Allora $C(\mathbb{R})$ è primo numerabile ma *non* è secondo numerabile.

Per vedere questo definiamo per ogni numero reale x espresso in forma decimale una funzione limitata continua f_x il cui valore per $n \in \mathbb{Z}$ è l'n-esima cifra decimale dopo la virgola. Allora $\|f_x - f_y\|_\infty$ è sempre maggiore o al più uguale a 1 per $x \neq y$, il che significa che $\{f_x \, : \, x \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio non numerabile discreto di $C(\mathbb{R})$, e $C(\mathbb{R})$ non può essere secondo numerabile.

Esempio A.22. Sia H uno spazio di Hilbert "inseparabile", cioè uno spazio che non ha basi di Hilbert numerabili. Una base di Hilbert $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ avrà allora un insieme di indici non numerabile, e poiché $\|e_\lambda - e_\mu\| = \sqrt{2}$ per $\lambda \neq \mu$, segue come sopra che H *non* soddisfa il secondo assioma, ma poiché è uno spazio metrico soddisfa il primo.

Esempio A.23. Uno spazio di Hilbert di dimensione infinita con la topologia debole (la meno fine per la quale i funzionali lineari, cioè le applicazioni $\langle v, \cdot \rangle \colon H \to \mathbb{R}$, $v \in H$ sono continui) *non* è primo numerabile.

Infine, enunciamo e dimostriamo una proposizione che può essere considerata una versione primitiva, puramente topologica di alcune delle costruzioni specifiche e tecniche affrontate nel corpo della tesi: le filtrazioni di Fredholm. Premettiamo un lemma e una osservazione:

Lemma A.24. *Sia (X, τ) uno spazio topologico di Hausdorff. Sia $U \in \tau$ e $V \subset U$ un sottoinsieme tale che la chiusura di V in U sia compatta. Allora tale chiusura coincide con la chiusura di V in X.*

Osservazione A.25. Siano $V, U \subset X$ aperti, con X spazio topologico di Hausdorff. In virtù del lemma A.24, la scrittura $V \Subset U$ non è ambigua (cioè è indifferente che si usi la chiusura di V in U o in X).

Proposizione A.26. *Sia (X, τ) uno spazio topologico connesso, di Hausdorff, localmente compatto e soddisfacente il secondo assioma di numerabilità. Esiste allora una successione $G_i \in \tau$, $i \in \mathbb{N}$, tale che:*

- *$G_i \Subset X$ per ogni i;*
- *$\overline{G}_i \subset G_{i+1}$;*

- $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$.

Dimostrazione. Possiamo supporre senza perdita di generalità che X *non* sia compatto, altrimenti basta porre $G_i = X$ per ogni i. Sia $S = \{U_1, U_2, \ldots\}$ una base numerabile per τ costituita da aperti con chiusura compatta. Poniamo $G_1 = U_1$. Allora $\overline{G}_1$ è compatto ed è coperto dagli U_i, pertanto esiste un minimo indice j_2 tale che $\overline{G}_1 \subset \bigcup_{i=1}^{j_2} U_i$. Poniamo allora $G_2 = \bigcup_{i=1}^{j_2} U_i$. Induttivamente, supponiamo definito $G_k = \bigcup_{i=1}^{j_k} U_i$; allora $\overline{G}_k = \bigcup_{i=1}^{j_k} \overline{U}_i$ è compatto e coperto dagli U_i, pertanto esiste un minimo indice j_{k+1} tale che $\overline{G}_k \subset \bigcup_{i=1}^{j_k+1} U_i$; poniamo dunque $G_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{j_k+1} U_i$. Allora $j_1 < j_2 < \cdots$. In effetti, se fosse $j_k = j_{k+1}$ per qualche k avremmo

$$G_k = \bigcup_{i=1}^{j_k} U_i \subset \overline{G}_k \subset \bigcup_{i=1}^{j_k} U_i,$$

e quindi $G_k = \overline{G}_k$ sarebbe sia aperto che chiuso. Dato che X non è compatto, deve essere $G_k \neq X$ (e $G_k \neq \varnothing$), pertanto G_k sarebbe un sottoinsieme non banale di X sia aperto che chiuso. Ciò contraddice l'ipotesi che X sia connesso. Dato che allora $j_1 < j_2 < \cdots$ si ha $j_k \uparrow +\infty$ e quindi $X = \bigcup_i G_i$. □

A.3 La categoria di Baire

La definizione rigorosa di spazio di Baire è stata più volte modificata nel tempo, adattandola, di volta in volta, ai nuovi punti di vista proposti dal pensiero matematico. In primo luogo, vedremo la definizione moderna, per poi esaminare una definizione diversa e più vicina a quella originariamente introdotta da Baire[1].

Definizione A.27 (Spazio di Baire, definizione moderna). Uno spazio topologico X è detto uno *spazio di Baire* se l'intersezione numerabile di ogni famiglia di aperti densi in X è densa in X (e quindi, in particolare è non vuota) oppure equivalentemente, passando alla contronominale, se l'unione numerabile di ogni famiglia di chiusi a parte interna vuota ha parte interna vuota.

Tale definizione è equivalente ad ognuna delle seguenti:

- La parte interna di ogni unione numerabile di insiemi aventi parte interna della chiusura vuota è vuota.
- Se l'unione di una famiglia numerabile di sottoinsiemi chiusi di X ammette un punto interno, allora uno degli elementi di tale famiglia ammette un punto interno.

Nella sua definizione originaria, Baire introdusse la nozione di categoria (da non confondere con la teoria delle categorie) nei seguenti termini:

Definizione A.28 (Spazio di Baire, definizione classica). Un sottoinsieme di uno spazio topologico X è detto

- *ovunque non denso* o *mai denso* in X se la parte interna della sua chiusura è vuota, equivalentemente, se il complementare della sua chiusura è denso;
- *di prima categoria* o *magro* in X se lo si può ottenere come unione di una famiglia numerabile di insiemi *ovunque non densi*;
- *di seconda categoria* o *non-magro* in X se non è *di prima categoria* in X.

La definizione di spazio di Baire può allora essere enunciata come segue: uno spazio topologico X è uno spazio di Baire se ogni insieme aperto non vuoto è di seconda categoria in X. Tale definizione è equivalente a quella moderna (cfr. definizione A.27).

[1] Baire, René-Louis (1899), Sur les fonctions de variables réelles, *Annali di Mat. Ser.* 3 **3**, 1–123.

Definizione A.29 (Residuale). Se X è uno spazio topologico e S è un sottoinsieme di X, allora S è detto *residuale* o *comagro* se il suo complementare $X \setminus S$ è magro.

Teorema A.30 (Baire, spazi metrici). *Ogni spazio metrico completo è uno spazio di Baire.*

Il teorema si può enunciare dicendo che in uno spazio metrico completo il complementare di un insieme magro è denso. In particolare ogni sottospazio aperto di uno spazio di Baire è uno spazio di Baire e ogni spazio metrico completo è di seconda categoria. Una ottima referenza in cui approfondire la teoria riguardante gli spazi di Baire è [Mun 00].

Appendice B

Mappe di Fredholm: teoria lineare

Siano E ed F spazi di Banach reali. Denoteremo con $\mathcal{L}(E,F)$ lo spazio di Banach degli operatori lineari e limitati $T\colon E \to F$.

Un operatore $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ è detto *semi-Fredholm* se la sua immagine è chiusa, ed almeno uno degli spazi vettoriali $\ker T$ e $\operatorname{coker} T := Y/\operatorname{rk} T$ ha dimensione finita. In questo caso è ben definito l'*indice di Fredholm* di T,

$$\operatorname{ind} T = \dim\ker T - \dim\operatorname{coker} T \in \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Un operatore $T \in \mathcal{L}(E,F)$ è detto di *Fredholm* se è semi-Fredholm e se $\operatorname{ind} T \in \mathbb{Z}$, quest'ultima condizione equivalente alla richiesta che il nucleo ed il conucleo di T siano finito dimensionali.

Osservazione B.1. Se $T \in \mathcal{L}(E,F)$ ha nucleo e conucleo di dimensione finita allora è Fredholm, in altri termini la chiusura dell'immagine segue da queste ipotesi. Infatti, per il corollario G.7, essendo in particolare $\dim\operatorname{coker} T < \infty$, $T(E)$ è chiusa in F.

Se X e Y hanno dimensione finita, ogni $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ è Fredholm di indice $\dim X - \dim Y$. È semplice esibire molti esempi di operatori di Fredholm nello spazio di Hilbert

$$\ell^2 = \{x \in \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,:\, \|x\|_2 < \infty\} \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, y\rangle_2}\,, \qquad \langle x, y\rangle_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\, y(n).$$

Sia $k \in \mathbb{N}$. L'operatore $L \in \operatorname{End}(\ell^2)$, $(Lx)(n) = x(n+k)$ ha nucleo di dimensione k ed è surgettivo, quindi è Fredholm di indice k. L'operatore $R \in \mathcal{L}(\ell^2)$, $Rx(n) = x(n-k)$ per $n \geq k$ e $Rx(n) = 0$ per $n < k$, è iniettivo ed ha immagine chiusa di codimensione k, quindi è Fredholm di indice $-k$. In effetti, $LR = I$.

L'operatore $L \in \operatorname{End}(\ell^2)$, $(Lx)(n) = x(2n)$ ha nucleo infinito dimensionale ed è surgettivo, quindi è semi-Fredholm di indice $+\infty$. L'operatore $R \in \mathcal{L}(\ell^2)$, $(Rx)(n) = x(n/2)$ per n pari e $(Rx)(n) = 0$ per n dispari, è iniettivo ed ha immagine chiusa di codimensione infinita, quindi è semi-Fredholm di indice $-\infty$. Anche qui, $LR = I$.

Sia $\tilde{\Phi}(X,Y)$ il sottoinsieme di $\mathcal{L}(X,Y)$ costituito dagli operatori semi-Fredholm, $\Phi(X,Y)$ il sottoinsieme dei Fredholm, e $\Phi_n(E,F)$ il sottoinsieme dei Φ_n-operatori, i.e., il sottoinsieme degli operatori lineari e continui da E a F Fredholm di indice n.

Teorema B.2 ([Lan 83] 2.3, pag. 224). *Gli insiemi $\tilde{\Phi}(X,Y)$ e $\Phi(X,Y)$ sono aperti in $\mathcal{L}(X,Y)$, e la funzione indice*

$$\operatorname{ind} : \tilde{\Phi}(X,Y) \to \overline{\mathbb{Z}}$$

è localmente costante, quindi è costante su ogni componente connessa.

Ricordiamo che un operatore $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ si dice *compatto* o *completamente continuo* se K manda insiemi limitati in insiemi pre-compatti, ove, si ricordi, un sottoinsieme di uno spazio topologico è precompatto (sin. relativamente compatto) se la sua chiusura è compatta. L'insieme degli operatori compatti è un sottospazio chiuso di $\mathcal{L}(X,Y)$, e si indica con $\mathcal{L}_c(X,Y)$.

Chiaramente, se una applicazione lineare di rango finito è continua allora essa è automaticamente compatta, infatti, per il teorema di Heine-Borel, un insieme limitato in uno spazio vettoriale di dimensione finita ha evidentemente chiusura compatta.

Proposizione B.3. *Sia $F\colon E \subset X \to Y$ una applicazione continua. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) F è compatta;

(b) per ogni successione limitata (x_h) in E, la successione $\big(F(x_h)\big)$ ammette una sottosuccessione convergente in Y.

Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (b): Ovvio. (b) $\Rightarrow$ (a): Dobbiamo provare che per ogni sottoinsieme limitato $B \subset E$, l'immagine $\overline{F(B)}$ è compatta in Y. Sia (y_h) una successione in $\overline{F(B)}$ e sia (x_h) una successione in B tale che

$$\|F(x_h) - y_h\| < \frac{1}{h+1}.$$

Se $\big(F(x_{h_k})\big)$ è convergente ad y in Y, si verifica facilmente che anche (y_{h_k}) è convergente ad y. □

Talvolta è conveniente tenere presente il seguente utile criterio, la cui verifica è del tutto elementare:

Criterio B.4. Sia S un sottoinsieme di uno spazio vettoriale normato completo per cui, dato $r > 0$, esista un ricoprimento finito di S costituito da palle di raggio r. Allora S è relativamente compatto.

Il seguente teorema è un importante risultato di stabilità degli operatori di semi-Fredholm per perturbazioni compatte. La dimostrazione si può trovare ad esempio in [Lan 83], Capitolo 10 paragrafo 2; si consulti anche [Ka 80], Capitolo IV paragrafo 5 per risultati più fini sulla stabilità degli operatori di Fredholm.

Teorema B.5. *Se $T \in \tilde{\Phi}(X,Y)$ e $K \in \mathcal{L}_c(X,Y)$, allora $T + K \in \tilde{\Phi}(X,Y)$ e* $\mathrm{ind}\,(T+K) = \mathrm{ind}\,(T)$.

Osservazione B.6. In particolare, ogni operatore lineare su uno spazio di Banach della forma $\mathrm{id}+K$, in cui K è un operatore compatto, è Fredholm di indice zero.

Composizione di operatori di Fredholm è Fredholm, e l'indice si comporta addittivamente:

Teorema B.7 ([Lan 83] 2.8, pag. 227). *Siano T in $\Phi(X,Y)$ ed S in $\Phi(Y,Z)$. Allora $S \circ T$ è un elemento di $\Phi(Y,Z)$; inoltre*

$$\mathrm{ind}\,(S \circ T) = \mathrm{ind}\,(S) + \mathrm{ind}\,(T).$$

Appendice C

Geometria differenziale in dimensione infinita

Molte delle definizioni utili e delle costruzioni standard proprie della geometria e della topologia differenziale in dimensione finita si trasportano invariate nelle corrispondenti generalizzazioni infinito-dimensionali. In questa appendice metteremo in risalto le differenze insieme ad altre definizioni e risultati utilizzati frequentemente nelle varie parti della tesi (come referenza generale per una trattazione completa ed organica si faccia riferimento al testo di Lang [Lan 01]).

Nel seguito considereremo sempre varietà modellate su uno spazio di Banach o di Hilbert reale separabile di dimensione infinita. Inoltre, le varietà che considereremo saranno sempre assunte connesse, separabili, di Hausdorff, secondo numerabili, paracompatte e differenziabili infinite volte, a meno che non sia altrimenti espressamente specificato.

C.1 Varietà di dimensione infinita

Definizione C.1. Sia M un insieme ed E uno spazio di Banach. Una *carta* (U, φ) di M è un'applicazione *bigettiva* $\varphi\colon U \to V \subseteq E$, dove U è un sottoinsieme di M e V è un *aperto*. Se $p \in U$ diremo che (U, φ) è una carta *in* p; se inoltre $\varphi(p) = O \in E$ diremo che la carta è *centrata* in p. L'inversa $\varphi^{-1}\colon V \to U$ è detta *parametrizzazione locale* (in p).

Definizione C.2. Due carte (U, φ) e (V, ψ) di M sono *compatibili* se $U \cap V = \varnothing$, oppure $U \cap V \neq \varnothing$, gli insiemi $\varphi(U \cap V)$, $\psi(U \cap V)$ sono aperti in E, e $\psi \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ è un diffeomorfismo di classe C^∞. Il diffeomorfismo $\psi \circ \varphi^{-1}$ viene detto *cambiamento di carta*.

Definizione C.3. Un *atlante* su un insieme M è una famiglia $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ di carte a due a due compatibili tali che $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Due atlanti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ su uno stesso insieme M sono *compatibili* se $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ è ancora un atlante su M.

Osservazione C.4. Se $\mathcal{A}$ è un atlante su M allora esiste un unico atlante $\tilde{\mathcal{A}}$ massimale (rispetto all'inclusione) che contiene $\mathcal{A}$, ottenuto considerando tutte le carte locali compatibili con quelle di $\mathcal{A}$. L'atlante $\tilde{\mathcal{A}}$ così ottenuto è detto *struttura differenziabile* indotta da $\mathcal{A}$.

Osservazione C.5. Se $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ è un atlante su un insieme M allora esiste un'unica topologia su M per cui tutti gli U_α sono aperti e tutte le φ_α sono degli omeomorfismi con l'immagine.

Definizione C.6. Una *varietà* (di classe C^∞) modellata sullo spazio di Banach E è una coppia $(M, \tilde{\mathcal{A}})$, dove M è un insieme e $\tilde{\mathcal{A}}$ è un atlante massimale su M.

Osservazione C.7. Se M è una varietà di Banach allora M soddisfa il primo assioma di numerabilità. Infatti le varietà di Banach sono localmente normabili, quindi localmente metrizzabili, dunque localmente primo numerabili, i.e., primo numerabili.

Osservazione C.8. Sia M una varietà modellata su uno spazio vettoriale normato E di dimensione infinita. Allora M non è compatta. Infatti, se M fosse compatta allora certamente M sarebbe localmente compatta (cfr. definizione A.3). D'altra parte, per un noto teorema di Riesz si ha che, in uno spazio vettoriale normato, indicata con B_E la palla unitaria chiusa di centro l'origine, se B_E fosse compatta allora E avrebbe dimensione finita. Dunque nel nostro caso le palle chiuse di E (di centro e raggio qualsiasi) non sono compatte. In particolare da questo segue subito che E non è localmente compatto. Dunque (una varietà – localmente – ha le stesse proprietà topologiche dello spazio su cui è modellata) M non è localmente compatta, dunque, in particolare, M siffatta non può essere compatta.

Definizione C.9. Una *sottovarietà* di una varietà $(M, \mathcal{A})$ (in cui $\mathcal{A}$ denota un atlante massimale su M, cfr. definizione C.6) modellata su uno spazio di Banach E è un sottoinsieme $N \subset M$ tale che per ogni $y \in N$ esiste una carta $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ con $y \in U$ e sottospazi complementari chiusi E_1 ed E_2 di E per cui

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap (E_1 \times \{O\}). \tag{C.1.1}$$

Si noti che se $\{(U_i, \varphi_i)\}$ è un ricoprimento di N costituito da carte di M aventi la proprietà (C.1.1), allora $\{(U_i \cap N, \varphi_i|_{U_i \cap N})\}$ è un atlante per N.

Osservazione C.10. Sia M una varietà modellata su un fissato spazio di Banach E. Un sottoinsieme aperto V di M è una sottovarietà secondo la definizione C.9. In questo caso prenderemo semplicemente $E_2 = \{O\}$, e, per ogni $x \in V$, useremo una qualsiasi carta (U, φ) di M per cui $x \in U$.

Definizione C.11. Diremo che un sottospazio vettoriale (chiuso) F di uno spazio di Banach E è *complementabile* se esiste un complementare chiuso, se esiste cioè un sottospazio chiuso $G \subset E$ tale che $E = F \oplus G$.

Osservazione C.12. Chiaramente, un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert, oppure un sottospazio di uno spazio vettoriale di dimensione finita è sempre complementabile.

Definizione C.13. Sia M una varietà di classe C^∞ modellata su uno spazio di Banach E. Sia x un punto di M. Consideriamo l'insieme delle terne (U, φ, v) in cui (U, φ) è una carta in x e v è un elemento dello spazio vettoriale E. Diremo che due tali terne (U, φ, v) e (V, ψ, w) sono *equivalenti* se il differenziale di $\psi \circ \varphi^{-1}$ in $\varphi(x)$ applica v in w:

$$d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(v) = w.$$

Si tratta ovviamente di una relazione di equivalenza in virtù della regola della catena. Una classe di equivalenza di tali terne è detta un *vettore tangente* alla varietà M nel punto x. L'insieme dei vettori tangenti è detto lo spazio tangente di M in x ed è denotato con T_xM.

Ogni carta (U, φ) in x induce una bigezione tra T_xM ed E, in cui alla classe di equivalenza (U, φ, v) corrisponde il vettore v. Per mezzo di tale bigezione è possibile trasportare a T_xM la struttura di spazio vettoriale topologico data dalla carta, ed è immediato verificare che questa struttura è indipendente dalla carta scelta (la struttura di spazio di Banach indotta su T_xM è unica a meno di un isomorfismo lineare).

Osservazione C.14. In dimensione infinita si considera sempre sottovarietà il cui spazio tangente sia chiuso. In particolare, se W è un sottospazio chiuso di dimensione infinita di un dato spazio di Banach V, lo spazio tangente in ogni punto w di W è W stesso.

Osservazione C.15. Sia (V, φ) una carta per M, allora $\varphi \colon V \subset M \to E$ è un diffeomorfismo con l'immagine. Sia $x \in V$ fissato, allora lo spazio tangente a V nel punto x, T_xV, coincide con lo spazio tangente a M in x, T_xM. Infatti, la mappa $T_xV \to T_xM$ indotta dall'inclusione $\iota \colon V \hookrightarrow M$ è un isomorfismo di spazi di Banach. Più in generale, se $U \subset M$ è un aperto, allora, per ogni $x \in U$, $T_xU = T_xM$.

Ricordiamo che se X, Y sono spazi di Banach e le applicazioni lineari continue $L \in \mathcal{L}(X,Y)$, $R \in \mathcal{L}(Y,X)$ soddisfano $LR = I_Y$, L si dice *inversa sinistra*, mentre R si dice *inversa destra*. Questo implica ovviamente che L è surgettiva ed R è iniettiva. Inoltre, ponendo $P := RL \in \mathcal{L}(X,X)$ si ha $P^2 = RLRL = RI_Y L = RL = P$, quindi P è un proiettore e X si decompone in somma diretta come

$$X = \ker P \oplus \operatorname{rk} P = \ker L \oplus \operatorname{rk} R.$$

Concludiamo che il nucleo di un'inversa sinistra è complementato, mentre l'immagine di un'inversa destra è un sottospazio chiuso e complementato. Viceversa, se il nucleo di un'applicazione surgettiva $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ è complementato, il teorema della mappa aperta applicato alla restrizione di L al complementare di $\ker L$ prova l'esistenza di un'inversa destra di L. Analogamente, se l'immagine dell'applicazione iniettiva $R \in \mathcal{L}(Y,X)$ è chiusa e complementata, il teorema della mappa aperta mostra che R possiede un'inversa sinistra.

In conclusione: $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ è un inversa sinistra se e solamente se è surgettiva e il suo nucleo è complementato, $R \in \mathcal{L}(Y,X)$ è un'inversa destra se e solamente se è iniettiva e la sua immagine è un sottospazio chiuso e complementato.

Definizione C.16. Sia U un sottoinsieme aperto di uno spazio di Banach E ed f una applicazione continua da U a valori in uno spazio di Banach F. Diremo che f è differenziabile in un punto $x \in U$ se esiste una applicazione lineare continua $df_x \colon E \to F$ tale che

$$\lim_{u \to 0} \frac{\|f(x+u) - f(x) - df_x(u)\|}{\|u\|} = 0.$$

Diremo che f è *differenziabile* se è differenziabile in ogni punto x di U. Se la mappa $df \colon U \to \mathcal{L}(E,F)$ ($x \mapsto df_x$) è continua (C^0), diremo che f è di classe C^1. In generale, per induzione, diremo che f è di classe C^k se df è di classe C^{k-1}. Infine, diremo che f è di classe C^∞ se è di classe C^k per ogni k.

C.1.1 Immersioni, sommersioni e trasversalità

Definizione C.17. Siano M e N due varietà di classe C^∞ modellate su spazi di Banach. Un'applicazione $f \colon M \to N$ di classe C^∞ sarà detta una *immersione* se, per ogni x in M,

$$df_x \colon T_x M \longrightarrow T_{f(x)} N$$

ammette un'inversa sinistra (i.e., è un'inversa destra), ossia, equivalentemente, l'immagine dell'applicazione iniettiva $df_x \in \mathcal{L}\big(T_x M, T_{f(x)} N\big)$ è chiusa e complementata. Se inoltre f è un omeomorfismo con l'immagine (e quindi, in particolare, f è globalmente iniettiva) diremo che è un *embedding*.

Definizione C.18. Siano M e N due varietà di classe C^∞ modellate su spazi di Banach. Un'applicazione $f \colon M \to N$ di classe C^∞ sarà detta una *sommersione* se, per ogni x in M,

$$df_x \colon T_x M \longrightarrow T_{f(x)} N$$

ammette un'inversa destra (i.e., è un'inversa sinistra), ossia, equivalentemente, il nucleo dell'applicazione surgettiva $df_x \in \mathcal{L}(T_x M, T_{f(x)} N)$ è complementato.

Proposizione C.19 ([Lan 01] Capitolo 2, paragrafo 2). *Sia f una mappa di classe C^∞ da una varietà M in una varietà N. Allora f è una immersione se e solo se è localmente un diffeomorfismo su una sottovarietà di N; f è un embedding se e solo se è un diffeomorfismo su una sottovarietà di N.*

Osservazione C.20. Se $f \colon M \to N$ è un *embedding aperto*, i.e., f è un embedding e l'immagine $f(M) \subset N$ è un sottoinsieme aperto, allora, per ogni x in M, $df_x \colon T_x M \to T_{f(x)} N$ è un'applicazione surgettiva, i.e.

$$df_x(T_x M) = T_{f(x)} N.$$

Infatti, essendo f un embedding aperto si ha in particolare che $f\colon M \to N$ è una mappa aperta, infatti, siccome f è un embedding, in particolare $f\colon M \to Z := f(M)$ è un omeomorfismo, dunque $U \subset M$ è aperto sse $f(U) \subset Z = f(M)$ è aperto; inoltre poiché $f(M) \subset N$ è aperto, da quanto si è appena osservato segue che $U \subset M$ è aperto solo se $f(U) \subset N$ è aperto, donde f è una mappa aperta.
Dunque, in particolare, ogni rappresentazione di f nelle carte locali di M ed N è chiaramente una mappa aperta.

D'altra parte, siccome f è un embedding f è un'immersione in ogni punto di M, quindi (cfr. [Bou3 89]) per ogni fissato x in M esistono carte (U, φ) e (V, ψ) con $x \in U$, $f(U) \subset V$, $\varphi\colon U \to U'$, $\psi\colon V \to U' \times V'$ tale che la rappresentazione di f nelle carte φ e ψ, $f_{\varphi\psi}\colon U' \to U' \times V'$ è l'inclusione $u \mapsto (u, 0)$. Ora $u \mapsto (u, 0)$ è una mappa aperta solo se $U' \times \{0\}$ è aperto in $U' \times V'$, se e solo se $V' = \{0\}$.

Dunque, localmente nelle carte di M ed N, f è l'identità e quindi il suo differenziale in ogni punto è banalmente surgettivo.

Proposizione C.21 ([Lan 01] Capitolo 2, paragrafo 2). *Una immersione iniettiva che sia una mappa aperta o chiusa sulla sua immagine è un embedding.*

Definizione C.22. Siano M ed N varietà ed $f\colon M \to N$ una applicazione di classe C^∞. Un punto $p \in N$ è detto un *valore regolare* di f se per ogni $q \in f^{-1}(p)$, df_q è surgettivo ed il suo nucleo è complementato. Denoteremo con $\mathcal{R}_f$ l'insieme dei valori regolari di $f\colon M \to N$; si noti che $N \setminus f(M) \subset \mathcal{R}_f \subset N$. In particolare, $p \in \mathcal{R}_f$ se e solo se f è una sommersione su $f^{-1}(p)$. Se df_q non è surgettivo, $q \in M$ è detto un *punto critico* e $p = f(q) \in N$ un *valore critico* di f.

Definizione C.23 (Trasversalità: categoria *Vett-Top*). Siano E ed F spazi di Banach, $F_0 \subset F$ un sottospazio chiuso e $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Diremo che A è *trasversa* a F_0 e scriveremo $A \pitchfork F_0$, se l'immagine inversa $A^{-1}(F_0)$ è complementata in E e $A(E) + F_0 = F$.

Spesso è comodo tenere presenti le seguenti proprietà elementari: A è trasversa a F_0 se e solo se, indicata con $\pi\colon F \to F/F_0$ la proiezione, $\pi \circ A \in \mathcal{L}(E, F/F_0)$ è surgettivo ed il suo nucleo è complementato; se $\pi \circ A \in \mathcal{L}(E, F/F_0)$ è surgettivo e F_0 ha codimensione finita, allora $\ker(\pi \circ A)$ ha la stessa codimensione e A è trasversa a F_0; se $\pi \circ A \in \mathcal{L}(E, F/F_0)$ è surgettiva e se $\ker A$ e F_0 sono finito dimensionali, allora $\ker(\pi \circ A)$ ha dimensione finita e A è trasversa a F_0 (per convincersi di questa proprietà si consideri la successione esatta $0 \longrightarrow \ker A \to \ker(\pi \circ A) \to F_0 \cap A(E) \longrightarrow 0$).

Definizione C.24 (Trasversalità: categoria *Difftop*). Una mappa $f\colon M \to N$ di classe C^∞ è *trasversa* ad una sottovarietà W di N (ed in tal caso scriveremo $f \pitchfork W$) se per ogni $p \in M$ tale che $f(p) \in W$ risulta $df_p \pitchfork T_{f(p)}W$, $(df_p \in \mathcal{L}(T_pM, T_{f(p)}N)$, $T_{f(p)}W \subset T_{f(p)}N)$, ossia, in virtù della definizione C.23 precedente, l'immagine inversa $(df_p)^{-1}(T_{f(p)}W)$ è complementata in T_pM e $df_p(T_pM) + T_{f(p)}W = T_{f(p)}N$.

Si osservi che se M è una varietà di Hilbert, oppure se M è di dimensione finita, in virtù dell'osservazione C.12, la condizione sulla complementabilità è automaticamente soddisfatta.

Proposizione C.25 ([Lan 01] Capitolo 2, paragrafo 2). *Siano M, N varietà di classe C^∞ modellate su spazi di Banach. Sia $f\colon M \to N$ una applicazione di classe C^∞ e W una sottovarietà di N. La mappa f è trasversa a W se e solo se per ogni $x \in M$ tale che $f(x)$ appartiene a W, il prodotto di composizione*

$$T_xM \xrightarrow{df_x} T_{f(x)}N \longrightarrow \frac{T_{f(x)}N}{T_{f(x)}W}$$

è surgettivo ed il suo nucleo è complementato.

La seguente generalizzazione del teorema di Sard dovuta a Smale è la pietra angolare della moderna teoria differenziale delle mappe di Fredholm.

Teorema C.26 (Sard-Smale, [Sm 65]). *Sia M una varietà di Banach a base numerabile, N una varietà di Banach, ed $f\colon M \to N$ una mappa Fredholm di indice n di classe C^q. Se $q > \max\{n, 0\}$ allora i valori critici di f sono di prima categoria; inoltre, se f è una mappa propria allora l'insieme dei valori regolari di f costituisce un aperto denso di N.*

Teorema C.27. *Sia $f\colon M \to N$ di classe C^∞ e $q \in \mathcal{R}_f$. Allora l'insieme di livello*

$$f^{-1}(q) = \{p \in M \ : \ f(p) = q\}$$

è una sottovarietà chiusa di M il cui spazio tangente è dato da $T_p\big(f^{-1}(q)\big) = \ker df_p$.

Lemma C.28. *Siano A e B spazi vettoriali e $F\colon A \to B$ un'applicazione lineare. Se*

$$\dim \ker F < \infty$$

allora

$$\dim A = \dim \mathrm{rk}\, F + \dim \ker F, \tag{C.1.2}$$

in particolare $\dim A = \infty$ se e solo se $\dim \mathrm{rk}\, F = \infty$. Inoltre, se C un sottospazio vettoriale di B, allora

$$\dim F^{-1}(C) = \dim\big(\mathrm{rk}\,(F) \cap C\big) + \dim \ker F. \tag{C.1.3}$$

Dimostrazione. Per ottenere la (C.1.3) è sufficiente applicare il teorema della dimensione (C.1.2) alla restrizione di F al sottospazio $F^{-1}(C)$: $F|_{F^{-1}(C)}\colon F^{-1}(C) \to C$. Infatti (i)

$$\mathrm{rk}\, F|_{F^{-1}(C)} = \mathrm{rk}\,(F) \cap C$$

e (ii) $\ker F|_{F^{-1}(C)} = \ker F$. □

Proposizione C.29. *Siano M e N varietà di Banach ed $f\colon M \to N$ una mappa di classe C^∞. Sia $Z \subset N$ una sottovarietà. Se $f \pitchfork Z$, allora $f^{-1}(Z)$ è una sottovarietà di M e*

$$\big(\forall\, p \in f^{-1}(Z)\big) \qquad T_p\big(f^{-1}(Z)\big) = (df_p)^{-1}\big(T_{f(p)}Z\big).$$

Se Z ha codimensione finita in N, allora $\mathrm{codim}\,\big(f^{-1}(Z)\big) = \mathrm{codim}\,(Z)$. Se Z ha dimensione finita e f è di Fredholm allora $\dim f^{-1}(Z) = \mathrm{ind}\,(f) + \dim Z$.

Dimostrazione. Sia (V, ψ) una carta per N centrata in $f(p_0) \in Z$ della forma

$$\psi\colon V \to F_1 \oplus F_2, \qquad \psi(V \cap Z) = \psi(V) \cap (F_1 \times \{0\}). \tag{C.1.4}$$

In particolare, $\psi\big(f(p_0)\big) = (0, 0)$, inoltre, posto $\psi(V) = V_1 \times V_2 \subset F_1 \oplus F_2$, risulta $\psi(V \cap Z) = V_1 \times \{0\}$. Denotiamo con $\pi_2\colon V_1 \times V_2 \to V_2$ la proiezione canonica. Sia (U, φ) una carta per M centrata in p_0 tale che $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset E$ e $f(U) \subset V$. Sia $p \in U \cap f^{-1}(Z)$, dunque

$$d\big(\pi_2 \circ \psi \circ f|_U\big)_p = \pi_2 \circ d\psi_{f(p)} \circ df_p,$$

e per l'ipotesi di trasversalità di f rispetto a Z,

$$F_1 + d(\psi \circ f)_p(T_pM) = F_1 \oplus F_2.$$

Segue che $d(\pi_2 \circ \psi \circ f|_U)_p\colon T_pU = T_pM \to F_2$ è surgettivo. Il suo nucleo è $(df_p)^{-1}(T_{f(p)}Z)$, essendo $\ker \pi_2 = F_1$ e

$$\big(d\psi_{f(p)}\big)^{-1}(F_1) = T_{f(p)}Z,$$

dunque $(df_p)^{-1}(T_{f(p)}Z)$ è complementato in T_pM. Equivalentemente, 0 è un valore regolare di $\pi_2 \circ \psi \circ f|_U\colon U \to F_2$ e perciò

$$\big(\pi_2 \circ \psi \circ f|_U\big)^{-1}(0) = f^{-1}(Z \cap V)$$

è una sottovarietà di U, e quindi di M, il cui spazio tangente in $p \in U$ è per il teorema C.27 uguale a

$$\ker\big(d(\pi_2 \circ \psi \circ f|_U)_p\big) = (df_p)^{-1}(T_{f(p)}Z).$$

Segue che $f^{-1}(Z \cap V)$ è una sottovarietà di M per ogni carta V della forma (C.1.4), ossia $f^{-1}(Z)$ è una sottovarietà di M. Se Z ha codimensione finita allora F_2 è finito dimensionale, e dunque ancora per il teorema C.27,

$$\operatorname{codim}\big(f^{-1}(Z)\big) = \operatorname{codim}\big(f^{-1}(Z \cap V)\big) = \dim(F_2) = \operatorname{codim}(Z).$$

Se f è di Fredholm, il nucleo di df_p ha dimensione finita e quindi, per il lemma C.28,

$$\begin{aligned} \dim f^{-1}(Z) &= \dim T_p\big(f^{-1}(Z)\big) = \\ &= \dim(df_p)^{-1}(T_{f(p)}Z) \overset{(C.28)}{=} \dim\big(\operatorname{rk}(df_p) \cap T_{f(p)}Z\big) + \dim\ker df_p. \end{aligned} \tag{C.1.5}$$

Siccome $f \pitchfork Z$, $\operatorname{rk}(df_p) + T_{f(p)}Z = T_{f(p)}N$ dunque

$$\dim T_{f(p)}N - \dim\operatorname{rk}(df_p) = \dim T_{f(p)}Z - \dim\big(\operatorname{rk}(df_p) \cap T_{f(p)}Z\big). \tag{C.1.6}$$

Segue che

$$\begin{aligned} \dim\operatorname{coker}(df_p) &= \dim T_{f(p)}N - \dim\operatorname{rk}(df_p) = \operatorname{codim}\operatorname{rk}(df_p) \overset{C.1.6}{=} \\ &= \dim T_{f(p)}Z - \dim\big(\operatorname{rk}(df_p) \cap T_{f(p)}Z\big) \end{aligned} \tag{C.1.7}$$

e quindi (f è di Fredholm dunque $\dim\operatorname{coker}(df_p) < \infty$)

$$\begin{aligned} \dim f^{-1}(Z) &\overset{C.1.5}{=} \dim\big(\operatorname{rk}(df_p) \cap T_{f(p)}Z\big) + \dim\ker df_p \overset{C.1.7}{=} \\ &= \dim T_{f(p)}Z - \dim\operatorname{coker}(df_p) + \dim\ker df_p = \dim Z + \operatorname{ind}(f). \end{aligned}$$

□

C.2 Fibrati vettoriali

Si rimanda il lettore al testo di Lang [Lan 01] per la dimostrazione dettagliata di alcuni risultati di cui si è fornito solo l'enunciato.

Definizione C.30. Sia M una varietà di classe C^∞ e $\pi\colon X \to M$ un'applicazione surgettiva di classe C^∞ fra una varietà X di classe C^∞ e la varietà M. Sia E uno spazio di Banach, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un ricoprimento aperto di M, e, per ogni $\alpha \in \Lambda$, supponiamo che sia data una mappa

$$\chi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times E$$

in modo tale che le seguenti proprietà siano soddisfatte:

FV 1. *Per ogni $p \in M$ l'insieme $X_p := \pi^{-1}(p)$, detto fibra di X sopra p, è dotato di una struttura di spazio vettoriale reale; indicheremo con O_p il vettore nullo di X_p.*

FV 2. *La mappa χ_α è un diffeomorfismo di classe C^∞ tale che $\pi_1 \circ \chi_\alpha = \pi$ (dove abbiamo indicato con $\pi_1\colon U_\alpha \times E \to U_\alpha$ la proiezione sulla prima coordinata)*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\chi_\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & U_\alpha \times E \arrow[d, "\pi_1"] \\ U_\alpha \arrow[r, equal] & U_\alpha \end{tikzcd}$$

In particolare, la restrizione di χ_α a ciascuna fibra è un isomorfismo lineare

$$\chi_{\alpha p}\colon X_p \to \{p\} \times E. \tag{C.2.1}$$

FV 3. *Per ogni coppia (α, β) di indici tale che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$,*

$$(\forall\, p \in U_\alpha \cap U_\beta) \qquad \chi_{\beta p} \circ \chi_{\alpha p}^{-1} \colon E \to E$$

è un isomorfismo toplineare.

FV 4. *Per ogni coppia (α, β) di indici tale che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, l'applicazione*

$$p \in U_\alpha \cap U_\beta \longmapsto \left(\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}\right)_p = \chi_{\beta p} \circ \chi_{\alpha p}^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$$

è di classe C^∞.

L'insieme $\{(U_\alpha, \chi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ sarà detto un *ricoprimento banalizzante* per π (o per X, con abuso di linguaggio), inoltre, per ogni α, $\chi_\alpha \colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times E$ sarà detta una *banalizzazione locale* di X. Due ricoprimenti banalizzanti per π sono detti *equivalenti* se la loro unione soddisfa ancora le proprietà **FV 3** e **FV 4**. Una classe di equivalenza di tali ricoprimenti banalizzanti determina una struttura di *fibrato vettoriale* su M. Diremo che X è lo *spazio totale* del fibrato, e che M è il suo *spazio base*. Infine, diremo equivalentemente che il fibrato vettoriale ha fibra E o che è modellato su E.

Osservazione C.31. Se $p \in U_\alpha$ allora la fibra vettoriale X_p sopra p può essere dotata di una struttura di spazio di Banach, semplicemente trasportando la struttura di E attraverso $\chi_{\alpha p}$ (cfr. eq. C.2.1). D'altra parte, se $p \in U_\beta$ e $\beta \neq \alpha$, allora la condizione espressa da **FV 3** assicura che le strutture su X_p indotte dalla struttura di E via $\chi_{\alpha p}$ e $\chi_{\beta p}$ sono equivalenti.

Uno spazio vettoriale metrico completo è detto *Banachabile* se la sua topologia è deducibile da una norma. Per quanto si è appena osservato, riassumendo, dalla proprietà **FV 2** e dalla proprietà **FV 3** segue che, per ogni p in M, la fibra X_p ha la struttura di spazio Banachabile.

Osservazione C.32. Per contro, la condizione **FV 3** può essere sostituita da una condizione simile come segue:

FV 3′. *Per ogni $p \in M$, la fibra $\pi^{-1}(p)$ è dotata della struttura di spazio Banachabile; inoltre, per ogni α*

$$(\forall\, p \in U_\alpha) \qquad \chi_{\alpha p} \colon X_p \to E$$

è un isomorfismo toplineare.

Segue che, per ogni coppia (α, β) di indici tale che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$,

$$(\forall\, p \in U_\alpha \cap U_\beta) \qquad \chi_{\beta p} \circ \chi_{\alpha p}^{-1} \colon E \to E$$

è un isomorfismo toplineare.

Osservazione C.33. Si osservi che, nel caso finito dimensionale, la condizione **FV 3** implica la condizione **FV 4**.

Tornando alla definizione generale di fibrato vettoriale, per ogni coppia (α, β) di indici tale che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, le restrizioni dei corrispondenti diffeomorfismi χ_α e χ_β a $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \subset X$ inducono un diffeomorfismo $\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}$ tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd}
(U_\alpha \cap U_\beta) \times E \arrow[rr, "\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & \circlearrowright & (U_\alpha \cap U_\beta) \times E \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& U_\alpha \cap U_\beta &
\end{tikzcd}$$

Un tale diffeomorfismo è necessariamente della forma $\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}(p, e) = \big(p, g_{\beta\alpha}(p)e\big)$ in cui

$$g_{\beta\alpha} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL(E). \tag{C.2.2}$$

Le applicazioni $g_{\beta\alpha}$ sono dette le *funzioni di transizione* per il fibrato $\pi\colon X \to M$ associate al ricoprimento $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. In particolare, per ogni $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, $g_{\alpha\beta}(p) \circ g_{\beta\alpha}(p)$ è l'identità di E, quindi $g_{\alpha\beta}$ e $g_{\beta\alpha}$ applicano ogni p in $U_\alpha \cap U_\beta$ in omeomorfismi inversi della fibra; inoltre le funzioni di transizione soddisfano la cosiddetta condizione di *cociclo:*

$$(\forall\, p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \qquad g_{\alpha\beta}(p) \circ g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p). \tag{C.2.3}$$

Si osservi che per ogni $\alpha, \beta \in \Lambda$ tale che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, per ogni $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, $g_{\alpha\beta}(p)$ appartiene ad un gruppo G, sottogruppo di $GL(E)$, precisamente

$$G = \big\langle \{g_{\alpha\beta}(p) \ : \ p \in U_\alpha \cap U_\beta,\ \alpha, \beta \in \Lambda\} \big\rangle,$$

in cui $\langle S\rangle$ denota il sottogruppo generato dall'insieme S. Il gruppo $G \leqslant GL(E)$ è detto il *gruppo di struttura* del dato fibrato vettoriale. Per esempio, se G è ridotto alla sola identità $I\colon E \to E$, allora $\pi\colon X \to M$ è necessariamente della forma $\pi\colon M \times E \to M$, e il fibrato è banale.

Inoltre, (cfr. **FV 4**) la continuità della mappa $p \mapsto (\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1})_p$ impone una specifica topologia su G per la quale l'operazione di gruppo $G \times G \to G$, l'inversione $G \to G$ e l'azione $G \times E \to E$ di G su E siano continue.

Come per le varietà, possiamo recuperare la nozione di fibrato vettoriale a partire da un ricoprimento banalizzante.

Proposizione C.34. *Siano M una varietà di classe C^∞, X un insieme e $\pi\colon X \to M$ un'applicazione surgettiva. Supponiamo di avere un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M, uno spazio di Banach E e applicazioni bigettive $\chi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times E$ tali che*

(a) $\pi_1 \circ \chi_\alpha = \pi$, dove $\pi_1\colon U \times E \to U$ è la proiezione sulla prima coordinata;

(b) per ogni coppia (α, β) di indici tale che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ esiste un'applicazione di classe C^∞

$$g_{\alpha\beta}\colon U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(E)$$

tale che la composizione $\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}\colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times E \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times E$ sia della forma

$$\chi_\alpha \circ \chi_\beta^{-1}(p, e) = \big(p, g_{\alpha\beta}(p)e\big). \tag{C.2.4}$$

Allora l'insieme X ammette un'unica struttura di fibrato vettoriale su M per cui le χ_α siano banalizzazioni locali.

Esempio C.35. Se M è una varietà di classe C^∞ modellata su uno spazio di Banach E, denotiamo con TM l'unione disgiunta degli spazi tangenti T_xM al variare di x in M. Abbiamo una proiezione naturale $\tau\colon TM \to M$ che applica T_xM su x. Allora τ ha una naturale struttura di fibrato vettoriale definita in questo modo. Se (U, φ) è una carta di M allora dalla definizione dei vettori tangenti come classi di equivalenza di terne (U, φ, v) si ottiene subito una bigezione $\tau_U\colon \pi^{-1}(U) = TU \to U \times E$ che commuta con la proiezione su U, cioè tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\tau_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & U \times E \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

è commutativo. Inoltre, se $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) sono due carte, denotata con $\varphi_{\beta\alpha}$ la mappa $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ $\big($definita su $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)\big)$, otteniamo la seguente mappa di transizione

$$\tau_{\beta\alpha} = \tau_\beta \circ \tau_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times E \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times E,$$

definita per ogni $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $v \in E$ dalla formula

$$\tau_{\beta\alpha}(x,v) = \big(\varphi_{\beta\alpha}(x), d\varphi_{\beta\alpha}(x)[v]\big).$$

Poiché per ogni x, $d\varphi_{\beta\alpha}(x)$ è un isomorfismo, dalla proposizione C.34 segue che TM è un fibrato vettoriale.

Osservazione C.36. Date due varietà M ed N modellate su uno spazio di Banach di dimensione infinita E, il prodotto $M \times N$ è una varietà di Banach modellata su $E \times E$. In particolare, dalla definizione C.13 segue che il fibrato tangente $T(M \times N)$ è naturalmente isomorfo al prodotto $TM \times TN$.

Definizione C.37. Sia M è una varietà di classe C^∞ modellata su uno spazio di Banach. Diremo che M è *parallelizzabile* se il suo fibrato tangente TM è banale.

Definizione C.38. Sia $\pi\colon X \to M$ un fibrato vettoriale su una varietà M. Una *sezione* di X è una applicazione di classe C^∞ $s\colon M \to X$ tale che $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$, cioè tale che $s(p) \in X_p$ per ogni $p \in M$. Lo spazio vettoriale delle sezioni di X verrà indicato con $\mathcal{E}(M)$. La sezione $\zeta_X \in \mathcal{E}(M)$ che ad ogni punto $p \in M$ associa il vettore nullo $O_p \in X_p$ è detta *sezione nulla* di X.

Definizione C.39. Siano $\pi\colon X \to M$ e $\pi'\colon X' \to M'$ due fibrati vettoriali. Un *morfismo di fibrati vettoriali* $\pi \to \pi'$ è il dato di una coppia di morfismi

$$f_0\colon M \to M' \qquad\qquad f\colon X \to X'$$

che soddisfano le seguenti condizioni:

FV Mor 1. *Il seguente diagramma è commutativo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f_0"'] & M' \end{tikzcd}$$

e la mappa indotta per ogni $p \in M$

$$f_p\colon X_p \to X'_{f(p)}$$

è una mappa lineare continua.

FV Mor 2. *Per ogni $p_0 \in M$ esistono banalizzazioni locali*

$$\tau\colon \pi^{-1}(U) \to U \times E$$

e

$$\tau'\colon \pi'^{-1}(U') \to U' \times E'$$

in p_0 e $f(p_0)$ rispettivamente, tali che $f_0(U)$ è contenuto in U', e tale che la mappa da U in $\mathcal{L}(E,E')$ data da

$$p \mapsto \tau'_{f_0(p)} \circ f_p \circ \tau^{-1}$$

è un morfismo.

Denoteremo spesso un morfismo di fibrati con f e scriveremo quindi $f\colon \pi \to \pi'$. Si osservi che la proprietà **FV Mor 2** è ridondante nel caso finito dimensionale.

C.2.1 Fibrato pull-back

Sia $\pi\colon X \to N$ un fibrato vettoriale, ed $f\colon M \to N$ una applicazione di classe C^∞. Allora f induce una struttura di fibrato vettoriale su M.

$$\begin{tikzcd} ? \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Si definisca a questo scopo l'insieme $f^*(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{(p,x) \in M \times X \ : \ f(p) = \pi(x) \in N\}$, unitamente alle proiezioni naturali $f^*(\pi)$, $\pi^*(f)$ definite da

$$\begin{aligned} &f^*(\pi)\colon f^*(X) \to X \qquad \text{con} \qquad \big[f^*(\pi)\big](p,x) = x \\ &\pi^*(f)\colon f^*(X) \to M \qquad \text{con} \qquad \big[\pi^*(f)\big](p,x) = p. \end{aligned}$$

Proposizione C.40. *Se $\pi\colon X \to N$ è un fibrato vettoriale e $f\colon M \to N$ è una applicazione di classe C^∞ allora $\pi^*(f)\colon f^*(X) \to M$ è un fibrato vettoriale, detto il fibrato pull-back di X, e la coppia $(f^*(\pi), f)$ è un morfismo di fibrati. Lo spazio totale del fibrato pull-back si denota anche con $M \times_N X$ ed è detto il prodotto fibrato di M e X.*

$$\begin{tikzcd} f^*(X) \arrow[r, "f^*(\pi)"] \arrow[d, "\pi^*(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

In particolare $\big(f^*(X)\big)_p \cong X_{f(p)}$; inoltre, se X è definito dal ricoprimento $\{U_\alpha\}$ e dalle funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta}\}$, allora $f^*(X)$ è definito da $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ e dalle funzioni di transizione $\{g_{\alpha\beta} \circ f\}$.

C.2.2 Fibrati Hilbertiani

Se E è uno spazio di Hilbert, il sottogruppo degli automorfismi isometrici di E è detto il gruppo degli *automorfismi di Hilbert*. Chiaramente (cfr. lemma G.27) A è di Hilbert se e solo se $A^*A = I$.

Sia $\pi\colon X \to M$ un fibrato vettoriale su M (cfr. definizione C.30) e $\{(U_\alpha, \chi_\alpha)\}$ un ricoprimento banalizzante, in cui, per ogni α,

$$\chi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times E,$$

E è uno spazio di Hilbert, e, per ogni coppia (α, β) di indici tale che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$,

$$(\forall\, p \in U_\alpha \cap U_\beta) \qquad \chi_{\beta p} \circ \chi_{\alpha p}^{-1}\colon E \to E \tag{C.2.5}$$

è un automorfismo di Hilbert.

Un ricoprimento banalizzante siffatto sarà detto una *banalizzazione di Hilbert*. Due banalizzazioni di Hilbert saranno dette *Hilbert-compatibili* se la loro unione è nuovamente una banalizzazione di Hilbert. Una classe di equivalenza di tali banalizzazioni compatibili costituisce ciò che chiameremo un *fibrato di Hilbert* su M.

Data una banalizzazione di Hilbert $\{(U_\alpha, \chi_\alpha)\}$ di un fibrato vettoriale $\pi\colon X \to M$, su ciascuna fibra X_p di X possiamo definire *senza ambiguità* una struttura di spazio di Hilbert. Infatti, per ogni p in M, scelto un aperto U_α tale che $p \in U_\alpha$, possiamo trasportare a X_p il prodotto scalare in E per mezzo di $\chi_{\alpha p}\colon X_p \to E$: si noti che, essendo (C.2.5) un automorfismo di Hilbert, se $p \in U_\beta$, $\beta \neq \alpha$, allora le strutture Hilbertiane su X_p indotte dalla struttura di E via $\chi_{\alpha p}$ e $\chi_{\beta p}$ coincidono. Segue che, in un fibrato di Hilbert, possiamo assumere che le fibre siano spazi di Hilbert, non solo spazi Hilbertabili.

Chiaramente, è possibile che su uno stesso fibrato vettoriale $\pi\colon X \to M$ si possano considerare due distinte (i.e., non isomorfe) strutture di fibrato di Hilbert su M, basti pensare al caso in cui la base del fibrato sia costituita da un singolo punto.

Ogni fibrato di Hilbert che determina un assegnato fibrato vettoriale $\pi\colon X \to M$ sarà detto una *riduzione di π al gruppo di Hilbert*. Riduzione perché, se dotiamo un assegnato fibrato vettoriale della struttura ulteriore di fibrato di Hilbert dobbiamo ridurre l'originario gruppo di struttura del fibrato alle sole funzioni di transizione per cui $\chi_{\beta p} \circ \chi_{\alpha p}^{-1}$ è un automorfismo di Hilbert.

C.3 Partizioni dell'unità

Definizione C.41. Una *partizione dell'unità* su uno spazio paracompatto S è il dato di un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di S e di una famiglia $\{\rho_\alpha\}$ di funzioni reali $\rho_\alpha\colon S \to \mathbb{R}$ tali che

PU 1. per ogni $s \in S$ risulta $\rho_\alpha(s) \geq 0$ per ogni indice α;

PU 2. per ogni α, il supporto di ρ_α è contenuto in U_α;

PU 3. $\{U_\alpha\}$ è un ricoprimento localmente finito di S;

PU 4. per ogni $s \in S$, $\sum_\alpha \rho_\alpha(s) = 1$.

Le proprietà **PU 2** e **PU 3** della definizione C.41 implicano che nell'intorno di ciascun punto di S solo un numero finito di elementi della partizione dell'unità sono diversi da zero; quindi la somma nella proprietà **PU 4** è ben definita, in quanto in ciascun punto di S solo un numero finito di addendi sono non nulli.

Diremo che una varietà M *ammette partizioni dell'unità* se, dato un ricoprimento aperto localmente finito $\{U_\alpha\}$ di M, esiste una partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}$ tale che, per ogni α, il supporto di ρ_α è contenuto in U_α. In quest'ultimo caso diremo brevemente che la partizione dell'unità $\{\rho_\alpha\}$ è *subordinata* al ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$ di M.

Ogni spazio paracompatto e quindi, in particolare, ogni spazio metrico (cfr. [Bou3 89], [Kel 55]) ammette partizioni dell'unità topologiche (cfr. [Kel 55]). D'altra parte, l'esistenza su uno spazio di Banach di dimensione infinita di una partizione dell'unità di classe C^∞ è legata alla Fréchèt-differenziabilità della norma $\big($esistono spazi di Banach per i quali la norma non è differenziabile secondo Fréchèt in alcun punto, per esempio $(\ell^1, \|\cdot\|_1)\big)$. Per esempi, teoremi e controesempi si rimanda il lettore a [DGZ 93].

Teorema C.42. *Ogni varietà paracompatta di classe C^∞ modellata su uno spazio di Hilbert ammette partizioni dell'unità di classe C^∞.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue da [Lan 01] Capitolo II, paragrafo 3. □

Definizione C.43. Uno spazio di Banach è detto di classe C^∞ se esso ammette partizioni dell'unità di classe C^∞.

Corollario C.44. *Se E è uno spazio di Banach che ammette una norma equivalente di classe C^∞ su $E \setminus \{O\}$ allora E è di classe C^∞. Inoltre, ogni varietà paracompatta di classe C^∞ modellata su uno spazio di Banach di classe C^∞ ammette partizioni dell'unità di classe C^∞.*

C.4 Varietà Riemanniane

Il modello degli *oggetti* matematici ricorrenti in geometria Riemanniana (varietà, fibrati vettoriali) è uno spazio vettoriale *Hilbertabile*, ossia uno spazio vettoriale topologico completo la cui topologia sia deducibile dalla norma associata ad una forma bilineare, simmetrica e definita positiva.

In particolare, uno spazio vettoriale Hilbertabile E è *autoduale*, identificabile cioè con il suo spazio duale. Precisamente, fissata una forma bilineare simmetrica, non singolare, continua $\langle\cdot,\cdot\cdot\rangle$ di $E \times E$ in $\mathbb{R}$,

$$(v, w) \in E \times E \longmapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{R},$$

la corrispondente mappa di E nel duale topologico $E^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

$$v \in E \longmapsto \langle\cdot, v\rangle \in \mathcal{L}(E)$$

è un isomorfismo toplineare. Questo è essenzialmente il motivo per cui si predilige la maggiore ricchezza di struttura propria degli spazi Hilbertabili. Se E è uno spazio di Hilbert, in particolare, E è isometrico al suo duale topologico.

Sia $\big(E, \langle\cdot,\cdot\cdot\rangle\big)$ uno spazio di Hilbert e denotiamo con $\mathcal{L}^2_{\text{sim}}(E)$ lo spazio vettoriale delle forme bilineari $\lambda\colon E \times E \to \mathbb{R}$ continue e simmetriche. Se x in E è fissato, allora la forma lineare continua $\lambda_x(y) := \lambda(x, y)$ è rappresentata da un elemento A_x di E, essendo $A \in \operatorname{End}(E)$. Evidentemente, la simmetria della forma comporta la simmetria dell'operatore associato, per cui risulta $\lambda(x, y) = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ per ogni $x, y \in E$. Viceversa, dato un operatore simmetrico A in $\operatorname{End}(E)$, è definita in modo unico una forma bilineare in $\mathcal{L}^2_{\text{sim}}(E)$ attraverso questa formula. Si stabilisce così una corrispondenza tra $\mathcal{L}^2_{\text{sim}}(E)$ e l'insieme degli endomorfismi toplineari simmetrici di E. In particolare, $\mathcal{L}^2_{\text{sim}}(E)$ è esso stesso uno spazio di Banach, la norma essendo l'usuale norma operatoriale.

Definizione C.45. Il sottoinsieme di $\mathcal{L}^2_{\text{sim}}(E)$ costituito dalle forme corrispondenti ad operatori coercivi (per definizione, un operatore è coercivo se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $A \geq \varepsilon I$) sarà detto il *Riemanniano* di E ed indicato con $\operatorname{Ri}(E)$.

Le *forme coercive* sono gli elementi che appartengono specificatamente al sottoinsieme $\operatorname{Ri}(E)$ di $\mathcal{L}^2_{\text{sim}}(E)$. Osserviamo che se A è l'operatore associato ad una forma coerciva allora A è invertibile, infatti $0 \notin \operatorname{Spec}(A)$ dunque $t \mapsto 1/t$ è una funzione continua ed invertibile nello spettro.

Riguardiamo $\mathcal{L}^2_{\text{sim}}$ come un funtore che agisce sulla categoria dei fibrati vettoriali le cui fibre sono autoduali: sia $\pi\colon E \to X$ un tale fibrato e $\mathcal{L}^2_{\text{sim}}(\pi) \to X$ il corrispondente fibrato la cui fibra sopra il generico punto x di X sia $\mathcal{L}^2_{\text{sim}}(E_x)$. Una *forma bilineare simmetrica* su π è, per definizione, una sezione di $\mathcal{L}^2_{\text{sim}}(\pi)$.

Definizione C.46. Se π è un fibrato di Hilbert e per ogni x in X l'immagine di una fissata sezione di $\mathcal{L}^2_{\text{sim}}(\pi) \to X$ appartiene allo spazio Riemanniano $\operatorname{Ri}(E_x)$ allora la sezione sarà detta una *metrica Riemanniana*.

Denoteremo una generica metrica Riemanniana con g, e quindi, per ogni $x \in X$, indicheremo con $g(x)$ (o g_x) la corrispondente forma bilineare simmetrica coerciva. Se v, w sono due vettori in E_x, scriveremo anche $\langle v, w\rangle_x$ se la metrica g è fissata e dunque la notazione non darà luogo ad ambiguità.

Definizione C.47. Una coppia (X, g) costituita da una varietà X modellata su uno spazio di Hilbert e da una metrica Riemanniana g è detta una *varietà Riemanniana*.

Si osservi che, mentre l'insieme delle forme bilineari simmetriche su π, $\mathcal{L}^2_{\text{sim}}(\pi)$ è uno spazio vettoriale, l'insieme delle metriche Riemanniane $\operatorname{Ri}(\pi)$ è solo un cono convesso, i.e., se $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $g_1, g_2 \in \operatorname{Ri}(\pi)$ allora $ag_1 + bg_2 \in \operatorname{Ri}(\pi)$.

Osservazione C.48. Più in generale, supponiamo che E sia uno spazio di Banach isomorfo al suo spazio duale. In questa generalità, l'insieme delle forme bilineari simmetriche non singolari costituisce un aperto di $\mathcal{L}^2_{\text{sim}}(E)$: denoteremo questo sottoinsieme con $\operatorname{Met}(E)$ e ci riferiremo ad esso come all'insieme delle *metriche pseudo-Riemanniane*. Una *metrica pseudo-Riemanniana su* π è una forma bilineare simmetrica su π tale che l'immagine di ogni punto x in X è un elemento di $\operatorname{Met}(E_x)$. Denoteremo l'insieme delle metriche pseudo-Riemanniane su π con $\operatorname{Met}(\pi)$.

Sia τ una banalizzazione locale di π su un aperto U di X:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & U \times E \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Allora possiamo trasportare al prodotto $U \times E$ la restrizione all'insieme $\pi^{-1}(U)$ di una assegnata metrica pseudo-Riemanniana g su X. Nella rappresentazione in una carta locale, ciò significa che per ogni $x \in U$ possiamo identificare $g(x)$ con un operatore simmetrico invertibile $A_x \in \mathrm{End}(E)$ che rappresenta la metrica data. Nel caso in cui l'assegnata metrica pseudo-Riemanniana sia coerciva, l'operatore A_x è definito positivo.

Esempio C.49. Sia S uno spazio topologico compatto, M una varietà Riemanniana di classe C^∞, ed $X := C(S, M)$ lo spazio delle applicazioni continue da S a M, con la topologia indotta dalla metrica definita da

$$\rho_X(x, y) := \sup_{s\in S}\big\{\rho_M\big(x(s), y(s)\big)\big\}.$$

Allora X è una varietà di classe C^∞ modellata su uno spazio di Banach reale. Precisamente, se $x \in X$, allora T_xX è lo spazio delle applicazioni continue $u \colon S \to TM$ tali che

$$\pi \circ u(t) = x(t),$$

le operazioni essendo definite punto per punto, inoltre

$$\|u\|_x = \sup\big\{\|u(s)\|_{x(s)}\big\}.$$

Rendiamo adesso un poco più rigorosa l'affermazione secondo cui X è una varietà di Banach di classe C^∞. Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sufficientemente piccolo, in modo tale che ogni punto in M la cui distanza da $x(s)$ sia minore di ε sia connettibile a $x(s)$ tramite un unico arco di geodetica minimizzante. Allora la mappa ψ definita da

$$\big(\psi(u)\big)(s) \overset{\text{def}}{:=} \exp_{x(s)}\big(u(s)\big)$$

è un omeomorfismo dalla ε-palla aperta di T_xX con un intorno di x. La totalità di questi intorni coordinati fornisce una struttura di classe C^∞ per X.

Esempio C.50. Lorch e Laugwitz [Lo 63] utilizzarono le metriche Riemanniane negli spazi di Hilbert per studiare alcune proprietà dei corpi convessi. Essi procedettero come segue. Sia H uno spazio di Hilbert e G una funzione di classe C^∞ su $H \setminus \{0\}$ tale che $G(x) > 0$ e $G(tx) = t^2G(x)$ per $t > 0$. Allora la forma g_x definita da $g_x(u, v) := d^2G_x(u, v)$ è bilineare e simmetrica. Supponiamo che esistano costanti positive L, M tali che per ogni x, y

$$L\,\|y\|^2 \le g_x(y, y) \le M\,\|y\|^2.$$

Allora l'insieme

$$\mathcal{K} := \big\{x \;:\; 2G(x) \le 1\big\}$$

è un insieme convesso e g è detta la metrica Riemanniana associata a $\mathcal{K}$. Se $\mathcal{K}$ è la palla unitaria chiusa, allora g è la metrica Riemanniana usuale.

Possiamo scrivere anche

$$g_x(u, v) = \langle A_xu, v\rangle,$$

in cui A_x è un operatore autoaggiunto e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota il prodotto scalare su H. La mappa $x \mapsto A_xx$ è un omeomorfismo 2-periodico di H. L'immagine di $\mathcal{K}$ mediante questa mappa è detta il suo *corpo convesso coniugato*. Per i dettagli ed ulteriori osservazioni si faccia riferimento a [Lo 63].

Ricordando il teorema C.42 sull'esistenza di partizioni dell'unità, consideriamo la seguente proposizione:

Proposizione C.51. *Sia M una varietà che ammetta partizioni dell'unità, e $\pi\colon X \to M$ un fibrato vettoriale le cui fibre siano spazi vettoriali Hilbertabili. Allora π ammette una metrica Riemanniana.*

Dimostrazione. Senza ledere la generalità, supponiamo che M sia connessa, in modo tale che ogni fibra X_p di X possa essere assunta toplinear-isomorfa ad un fissato spazio di Hilbert E. Sia $\{U_i, \varphi_i\}$ una partizione dell'unità tale che π ristretto a U_i sia banale, esista cioè per ogni i una banalizzazione locale $\tau_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times E$. Si consideri adesso una metrica Riemanniana su $U_i \times E$ e si determini per trasporto della struttura una metrica Riemanniana g_i su $\pi^{-1}(U_i)$. Posta $g := \sum \varphi_i\, g_i$, una verifica standard mostra che g è una metrica Riemanniana su X. □

In particolare, se applichiamo il risultato espresso dalla proposizione C.51 al fibrato tangente TM si ottiene una metrica Riemanniana g su di esso. In questo caso diremo anche che g è una metrica Riemanniana su M.

Definizione C.52. Sia (M, g) una varietà Riemanniana. Definiamo la *lunghezza* $L_g(\sigma)$ di una curva di classe C^1 $\sigma\colon [a, b] \to M$ mediante

$$L_g(\sigma) \overset{\text{def}}{:=} \int_a^b g_{\sigma(t)}\big(\dot\sigma(t), \dot\sigma(t)\big)^{1/2}\, dt = \int_a^b \|\sigma(t)\|_g\, dt. \tag{C.4.1}$$

Chiaramente possiamo estendere la nozione di lunghezza a tutte le curve C^1 a tratti, prendendo la somma delle lunghezze dei tratti lungo cui la curva è di classe C^1.

La *metrica intrinseca* ρ_M su M associata a g è definita da

$$\rho_M(x, y) \overset{\text{def}}{:=} \inf\big\{L_g(\sigma)\ :\ \sigma(a) = x, \sigma(b) = y\big\}. \tag{C.4.2}$$

Diremo che g è una *metrica Riemanniana completa* se M è uno spazio metrico completo rispetto alla metrica ρ. Dal corollario 1.5 pag. 2 sappiamo che ogni varietà a base numerabile modellata su uno spazio di Hilbert separabile ammette una metrica Riemanniana completa.

Osservazione C.53. Se M è una varietà Riemanniana (connessa) completa di dimensione finita, allora, per il teorema di Hopf-Rinow ogni coppia di punti di M può essere collegata da una geodetica minimizzante. Per le varietà di dimensione infinita questo teorema non è più vero, come è evidenziato dai seguenti controesempi.

Controesempio C.54. Sia H uno spazio di Hilbert reale separabile di dimensione infinita. Indicata con $(e_n)_{n\geq 0}$ una sua base ortonormale, sia $T\colon H \to H$ l'operatore definito da

$$T\Big(\sum x_n e_n\Big) = \sum a_n x_n e_n,$$

in cui $a_0 = 1$ e, per ogni $n \geq 1$, $a_n = 1 + 1/2^n$. Si noti che T è un operatore lineare iniettivo e che $\|x\| \leq \big\|Tx\big\| \leq \frac{3}{2}\|x\|$, dunque T è un diffeomorfismo di H su H. Indicata con S la sfera unitaria di H, $X := T(S)$ è una sottovarietà chiusa di H. Dotiamo X della metrica indotta da H.

Sia σ una curva in S da e_0 a $-e_0$. Allora $T\sigma$ è una curva in X da e_0 a $-e_0$, inoltre

$$L\big(T\sigma\big) \geq L(\sigma).$$

Quindi la lunghezza di una qualsiasi curva in X che collega e_0 a $-e_0$ è maggiore o al più eguale di π, ossia la minima lunghezza delle curve in S che collegano i punti e_0 e $-e_0$.

D'altra parte, se indichiamo con σ_n l'arco di cerchio massimo che collega i punti e_0 e $-e_0$ nel semispazio positivo generato da e_0 ed e_n, allora, nella notazione introdotta in (C.4.2)

$$L\big(T\sigma_n\big) < \big(1 + 1/2^n\big)\,\pi \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi = \rho_X(e_0, -e_0).$$

Si conclude che non esiste alcuna curva minimizzante che collega in X i punti e_0 e $-e_0$.

Controesempio C.55 (Atkin [Atk 75]). Esiste una varietà Riemanniana M di classe C^∞, connessa, completa, di dimensione infinita e punti x, y in M per cui *non* esista alcuna geodetica da x a y.

Appendice D

Intorni tubolari

Questa appendice copre la parte di teoria relativa agli intorni tubolari. Si tratta di una nozione ricorrente in varie parti della tesi, essendo la dimostrazione stessa del *Teorema di Embedding Aperto* innanzitutto un processo di approssimazione, riduzione al caso finito dimensionale, e quindi un processo di miglioramento di una certa filtrazione di Fredholm costituita da varietà finito dimensionali approssimanti, miglioramento ottenuto sfruttando pesantemente la nozione di intorno tubolare.

Prima di introdurre questa importante nozione, introdurremo due nozioni ad essa strettamente legate: la prima, la nozione di *fibrato normale*, che permette di definire gli intorni tubolari stessi, la seconda, la nozione di *fibrato comprimibile*, anch'essa assai legata alla nozione di intorno tubolare.

D.1 Fibrato normale

Definizione D.1. Sia N una sottovarietà di una varietà M. Indicata con $\iota\colon N \hookrightarrow M$ l'inclusione di N in M, per ogni p in N lo spazio tangente a N in p può essere riguardato come un sottospazio di T_pM via l'inclusione lineare $d\iota_p\colon T_pN \to T_pM$, in cui si è posto $p = \iota(p)$. Il *fibrato normale* di N in M è il fibrato vettoriale $\mathcal{N}(N)$ *su* N ottenuto considerando l'unione disgiunta degli spazi vettoriali quozienti T_pM/T_pN, insieme con la proiezione naturale $\pi\colon \mathcal{N}(N) = (TM|_N)/TN \to N$. Si osservi esplicitamente che la fibra T_pM/T_pN sopra ciascun punto p della base consiste dell'insieme delle classi di equivalenza di elementi di T_pM modulo la relazione che identifica due vettori la cui differenza appartiene a T_pN: $X_1 \sim X_2$ sse $X_1 = X_2 + V$ per qualche $V \in T_pN$. Il modo usuale di lavorare con una tale struttura consiste nello scegliere un rappresentate in ciascuna classe, considerare il fibrato normale $\mathcal{N}(N)$ come un sottofibrato di $TM|_N$, e determinare così un fibrato complementare a TN nella restrizione di TM a N:

$$TM|_N = TN \oplus \mathcal{N}(N). \tag{D.1.1}$$

In generale, non c'è alcuna scelta canonica in cui identificare preferenzialmente $\mathcal{N}(N)$ come un sottofibrato di $TM|_N$. D'altra parte, quando su N è assegnata una metrica Riemanniana, in questo caso c'è una definizione naturale del fibrato complementare come il fibrato le cui singole fibre sopra i punti p di N siano il complemento ortogonale di T_pN in T_pM. Sia dunque M una varietà Riemanniana, ed N una sottovarietà, con la struttura Riemanniana indotta. Fissato un punto p di N, abbiamo una decomposizione ortogonale dello spazio tangente ad M in p data da

$$T_pM = T_pN \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{N}_p(N),$$

in cui si è indicato con $\mathcal{N}_p(N)$ il complemento ortogonale di T_pN in T_pM, $(T_pN)^\perp$. Denotiamo con $\pi_{TN}\colon TM \to TN$ e $\pi_{\mathcal{N}(N)}\colon TM \to \mathcal{N}(N)$ le proiezioni ortogonali sui fibrati rispettivi. Nella decomposizione

$$TM|_N = TN \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{N}(N),$$

una sezione di TM su N è della forma (ζ, ν), in cui $\zeta \in \mathcal{T}(N)$ è una sezione di TN, i.e. un campo di vettori su N, e ν è un *campo normale*, cioè una sezione del fibrato normale $\mathcal{N}(N)$.

D.2 Fibrati comprimibili

Introduciamo l'importante nozione di fibrato comprimibile. Come vedremo fra poco, essa risulterà utile quando indagheremo le proprietà degli intorni tubolari.

Definizione D.2. Un fibrato vettoriale $\pi\colon X \to M$ (cfr. definizione C.30) è detto *comprimibile* se, dato comunque un intorno aperto V della sezione nulla, $\zeta(M) \subset V \subset X$, esiste un aperto $\zeta(M) \subset \boldsymbol{V_1} \subset V$, ed un diffeomorfismo di classe C^∞ di X *su* V_1, $\varphi\colon X \longrightarrow V_1$, tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, leftrightarrow, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \circlearrowright & V_1 \arrow[dl, "\pi_{|V_1}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Nel caso particolarissimo in cui la varietà M base del fibrato sia ridotta ad un singolo punto, e quindi lo spazio totale X sia uno spazio di Banach E, la definizione D.2 asserisce che E è C^∞-diffeomorfo ad intorni arbitrariamente piccoli dell'origine $O \in E$, fatto sempre vero per gli spazi di Hilbert, ma problematico per gli spazi di Banach.

Definizione D.3. Sia M una varietà, e $\sigma\colon M \to \mathbb{R}^+$ una funzione continua. Sia $\pi\colon X \to M$ un fibrato di Hilbert su M. Denoteremo con $X(\sigma)$ il sottoinsieme di X costituito dai vettori v tali che, se v appartiene a X_p, allora

$$\|v\|_p < \sigma(p).$$

In particolare, $X(\sigma)$ è un intorno aperto della sezione nulla.

Proposizione D.4. *Sia M una varietà e $\pi\colon X \to M$ un fibrato di Hilbert. Se $\sigma\colon M \to \mathbb{R}^+$ è una funzione continua, allora la mappa*

$$w \longmapsto \frac{\sigma(\pi w)\, w}{\left(1 + \|w\|^2\right)^{1/2}}$$

è un diffeomorfismo di classe C^∞ di X su $X(\sigma)$.

Dimostrazione. Ovvia, la mappa inversa essendo

$$v \longmapsto \frac{v}{\left([\sigma(\pi v)]^2 - \|v\|^2\right)^{1/2}}\ .$$

□

Corollario D.5. *Siano M una varietà che ammetta partizioni dell'unità e $\pi\colon X \to M$ un fibrato di Hilbert su M. Allora X è comprimibile.*

Dimostrazione. Sia Z un intorno aperto della sezione nulla. Per ogni $p \in M$, esiste un intorno aperto V_p di p ed un numero reale strettamente positivo a_p tale che i vettori in $\pi^{-1}(V_p)$ aventi lunghezza minore di a_p appartengono a Z. Sia $\{(U_i, \varphi_i)\}$ una partizione dell'unità su M subordinata a $\{V_p\}_p$: ciò significa in particolare che per ogni i esiste $p = p(i)$ tale che $U_i \subset V_{p(i)}$. Infine, sia σ la funzione definita ponendo

$$\sigma(p) \overset{\text{def}}{:=} \sum a_{p(i)}\, \varphi_i.$$

Allora $X(\sigma)$ è contenuto in Z, e l'asserto segue dalla proposizione D.4. □

D.3 Nozione di intorno tubolare

Definizione D.6 (Intorno tubolare). Sia N una sottovarietà di una varietà M. Un *intorno tubolare* di N in M è il dato di:

IT 1. *Un fibrato vettoriale $\pi\colon X \to N$ su N.*

IT 2. *Indicata con $\zeta\colon N \to X$ la sezione nulla, un intorno aperto V di $\zeta(N)$ in X*

$$\zeta(N) \subset V \subset X.$$

IT 3. *Un insieme aperto U in M contenente N, $N \subset U \subset M$, ed un diffeomorfismo $f\colon V \to U$ per cui $f \circ \zeta = \iota\colon N \hookrightarrow U$:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, shift right, "\pi|_V"'] \arrow[dr, bend left, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ N \arrow[u, shift right, "\zeta"'] \arrow[r, hook, "\iota"'] & U \end{tikzcd}$$

La mappa f è detta la *mappa tubolare*, e V (o la sua immagine tramite f) il corrispondente *tubo* in X (o in M, rispettivamente). Diremo che l'intorno tubolare è *totale* se $V = X$, i.e., l'intero spazio totale del fibrato.

Riassumendo, un intorno tubolare di N in M è una coppia (π, f) in cui $\pi\colon X \to N$ è un fibrato vettoriale ed f è un diffeomorfismo da un intorno V della sezione nulla di X su un intorno $\mathcal{U} = f(V)$ di N in M. Chiaramente, in particolare, possiamo definire la nozione di intorno tubolare quando il diffeomorfismo f è un embedding.

Definizione D.7. Diremo che un intorno tubolare è *Hilbertiano* se il fibrato di cui al punto **IT 1** della definizione D.6 precedente è un fibrato vettoriale Hilbertiano (cfr. sottosezione C.2.2).

D.4 Esistenza degli intorni tubolari

La costruzione di intorni tubolari per sottovarietà di $\mathbb{R}^m$ è molto semplice: si considera il fibrato normale relativo alla metrica canonica euclidea e lo si realizza parzialmente con l'aiuto delle geodetiche euclidee: i segmenti. Per sottovarietà di una varietà astratta di dimensione *finita* si può procedere in modo analogo, fissando una metrica Riemanniana sul tangente e usando le geodetiche associate in luogo dei segmenti.

Più in generale, il teorema di esistenza dell'intorno tubolare per varietà astratte di dimensione *infinita* asserisce che, fissata una varietà, ogni sottovarietà ha un intorno diffeomorfo al suo fibrato normale (nel caso Riemanniano) o ad un intorno della sezione nulla di tale fibrato, nel caso Banach. In quest'ultimo ambito più generale, quando cioè non si disponga di una metrica e dunque di una *buona nozione* di fibrato normale, una comoda alternativa per dimostrare l'esistenza degli intorni tubolari è fornita dalla nozione di spray[1]. Precisamente, come accenneremo nella dimostrazione del teorema D.9, dato uno spray su una varietà di Banach M si può costruire un intorno tubolare di una sottovarietà chiusa N di M facendo uso della mappa esponenziale determinata dallo spray (cfr. sezione F.4). In particolare, quando lo spray è Riemanniano e M ammette partizioni dell'unità allora si può sempre costruire un intorno tubolare totale (cfr. osservazione D.10). Il teorema di esistenza dell'intorno tubolare nel caso Riemanniano è il seguente:

Teorema D.8. *Sia N una sottovarietà chiusa di una varietà Riemanniana M. Allora esiste un intorno tubolare di N in M.*

[1] Riportiamo nell'appendice F i risultati fondamentali a riguardo, rimandando per un'esposizione più dettagliata a [Lan 01].

Dimostrazione. Supponiamo per semplicità che M sia completa. Per ogni p in N, T_pN è un sottospazio vettoriale chiuso dello spazio di Hilbert T_pM. Denotiamo il suo complemento ortogonale con $(T_pN)^\perp$. Consideriamo la mappa esponenziale $\exp\colon TM \to M$ e denotiamo con $\exp|_{\mathcal{N}}$ la sua restrizione al fibrato normale a N, $\mathcal{N}(N)$. Identifichiamo N con la sezione nulla in $\mathcal{N}(N)$ ed osserviamo che, per ogni $p \in N$,

$$T_p\big(\mathcal{N}(N)\big) = T_pN \times (T_pN)^\perp = T_pM$$

e

$$d(\exp|_{\mathcal{N}})_p\colon T_p\big(\mathcal{N}(N)\big) \to T_pM$$

è un isomorfismo lineare. Esiste dunque un intorno W_p di p in $\mathcal{N}(N)$ tale che la restrizione della mappa esponenziale a W_p è un diffeomorfismo su un intorno di p in M. La collezione $\big\{\exp(W_p)\big\}_p$ ottenuta al variare di p in N è un ricoprimento di N costituito da insiemi aperti di M. Inoltre, per ogni p in N, possiamo assumere che $N \cap \exp(W_p)$ sia connesso. In particolare $(\exp|_{W_p})^{-1}|_N$ è l'identità. Sia $\{\mathcal{U}_i\}$ un raffinamento localmente finito di $\{\exp(W_p)\}_{p\in N}$ ed indichiamo con f_i il diffeomorfismo inverso di exp su $\mathcal{U}_i$ (diffeomorfismi inversi siffatti devono esistere, infatti, per ogni i, $\mathcal{U}_i$ è contenuto in qualche W_p; inoltre, per ogni i, possiamo assumere che $\mathcal{U}_i \cap N \neq \varnothing$). Sia ora $\{V_i\}$ un ricoprimento localmente finito di N tale che per ogni i, $\overline{V}_i \subset \mathcal{U}_i$. Se $p \in N$, allora esiste un intorno G_p di p in M che interseca solamente un numero finito dei $\overline{V}_i$, siano essi $\overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_n$. Inoltre, se G_p è abbastanza piccolo, a meno di permutare gli indici possiamo assumere che G_p sia contenuto in V_1, e che $G_p \cap \overline{V}_j \neq \varnothing$ solo se $p \in \overline{V}_j$.

Si osservi che, essendo per ogni i f_i un inverso di exp, a meno di restringere ulteriormente G_p, $f_1, \ldots, f_n$ devono coincidere su G_p (infatti, se così non fosse, allora dovrebbe esistere una successione di punti $y_m = \exp(v_{1m}) = \exp(v_{2m})$ con $v_{1m} \neq v_{2m}$ e y_m convergente a p, da cui seguirebbe che (v_{1m}), (v_{2m}) dovrebbero convergere a O_p, contraddicendo il fatto che $\exp|_{W_p}$ è un diffeomorfismo). Poniamo per $y \in G_p$, $f_p(y) := f_1(y)$, $G := \bigcup G_p$ e $f = \bigcup f_p$. Allora f è una inversa per exp sull'insieme aperto $f(G) \subset \mathcal{N}(N)$.

□

Come promesso, consideriamo la seguente generalizzazione del teorema precedente al caso delle varietà di Banach:

Teorema D.9. *Siano M una varietà di Banach di classe C^p $(3 \leq p \leq \infty)$ che ammetta partizioni dell'unità ed $N \subset M$ una sottovarietà chiusa. Allora esiste un intorno tubolare di N in M di classe C^{p-2}.*

Traccia della dimostrazione. Consideriamo la successione esatta di fibrati:

$$0 \to TN \longrightarrow TM|_N \longrightarrow \mathcal{N}(N) \to 0,$$

la quale, (cfr. eq. D.1.1) modulo l'identificazione del fibrato normale $\mathcal{N}(N)$ con un sottofibrato di $TM|_N$ può essere scritta come

$$0 \to TN \longrightarrow TN \oplus \mathcal{N}(N) \longrightarrow \mathcal{N}(N) \to 0.$$

Indicato con S uno spray su TM (la cui esistenza globale su tutto TM è garantita dall'ipotesi di esistenza di partizioni dell'unità su M, cfr. teorema F.8), consideriamo la mappa esponenziale associata ad S, sia essa $\exp\colon \mathcal{E} \to M$, e dunque, nelle notazioni della dimostrazione del teorema D.8, consideriamo la restrizione

$$\exp|_{\mathcal{N}}\colon \mathcal{E} \cap \mathcal{N}(N) \to M. \tag{D.4.1}$$

In modo analogo alla dimostrazione del teorema D.8, lavorando in carte locali si dimostra che (D.4.1) è un diffeomorfismo locale. Dunque esiste un fibrato vettoriale $X \to N$, un intorno aperto V della sezione nulla $\zeta(N)$ in X, ed una mappa $f\colon V \to M$ tale che, per ogni q di $\zeta(N)$, f è un isomorfismo locale in q. Similmente a quanto argomentato per dimostrare il teorema D.8, seguendo la costruzione indicata da Godement ([Go 58], pag. 150) è possibile determinare un sottoinsieme $G \subset V$ in modo tale che la restrizione di f a G sia un diffeomorfismo. □

Osservazione D.10. Se un fibrato vettoriale $\pi\colon X \to M$ è comprimibile (cfr. definizione D.2) e se si dispone di un intorno tubolare definito su V (V è il tubo dell'intorno tubolare, cfr. definizione D.6), allora chiaramente si può ottenere un intorno tubolare totale definito su X:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[d, shift right, "\pi_{|V}"'] \arrow[dr, bend left, "f"] & \\
N \arrow[u, shift right, "\zeta"'] \arrow[r, hook, "\iota"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & U
\end{tikzcd}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, shift right, "\pi"'] \arrow[dr, bend left, "f \circ \varphi"] & \\
N \arrow[u, shift right, "\zeta"'] \arrow[r, hook, "\iota"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & U
\end{tikzcd}
$$

In particolare, in virtù del corollario D.5, gli intorni tubolari Hilbertiani (cfr. definizione D.7) di una sottovarietà di una assegnata varietà che ammetta partizioni dell'unità sono totali.

D.5 Unicità ed estensione degli intorni tubolari

Definizione D.11. Date varietà M e N, una *isotopia di embedding* è un embedding

$$F\colon \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R} \times N$$

tale che, per ogni t in $\mathbb{R}$, F è della forma

$$F(t, \cdot\,) = \big(t, F_t(\cdot)\big), \tag{D.5.1}$$

in cui $F_t\colon M \to N$ è un embedding. Se una mappa soddisfa la proprietà D.5.1 diremo brevemente che essa *preserva i livelli*. Se $t_0 < t_1$ sono numeri reali, diremo che $[t_0, t_1]$ è un *dominio proprio* per F se $F_t = F_{t_0}$ per ogni $t \leq t_0$ e $F_{t_1} = F_t$ per ogni $t \geq t_1$.

Diremo che due embedding $f, g\colon M \to N$ sono *isotopi* e scriveremo $f \approx g$ se esiste una isotopia di embedding $F\colon \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R} \times N$ tale che, nelle notazioni precedentemente introdotte, $f = F_{t_0}$ e $g = F_{t_1}$.

Osservazione D.12. Componendo con traslazioni e moltiplicazioni per scalari è sempre possibile trasformare una assegnata isotopia in una nuova isotopia il cui dominio proprio sia contenuto nell'intervallo $(0, 1)$. Inoltre, è immediato verificare che la relazione di isotopia tra embedding è di equivalenza.

Osservazione D.13. Se $s_0 < s_1$ sono due numeri reali e $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione monotona crescente tale che $\sigma(s) = t_0$ per $s \leq s_0$ e $\sigma(s) = t_1$ per $s \geq s_1$, allora, a partire da una isotopia F_t possiamo ottenere una nuova isotopia ponendo $G_t := F_{\sigma(t)}$.

Una siffatta funzione σ può essere usata anche per ottenere una isotopia di classe C^∞ definita su tutto $\mathbb{R}$ a partire da una isotopia definita su un intervallo chiuso proprio di $\mathbb{R}$.

Osservazione D.14. Se $f_t\colon X \to Y$ è una isotopia, e se $g\colon X_1 \to X$ e $h\colon Y \to Y_1$ sono due embedding, allora il prodotto di composizione

$$h \circ f_t \circ g\colon X_1 \to Y_1$$

è ancora una isotopia.

Definizione D.15. Sia M una varietà ed N una sottovarietà. Sia $\pi\colon X \to N$ un fibrato vettoriale e Z un intorno aperto della sezione nulla. Una isotopia di *embedding aperti* $F\colon \mathbb{R} \times Z \to M$ tale che, per ogni t, $F_t\colon Z \to M$ è un intorno tubolare di N è detta una *isotopia di intorni tubolari*.

D.5.1 Unicità degli intorni tubolari

Proposizione D.16. *Su una varietà M consideriamo i fibrati vettoriali $\pi\colon X \to M$ e $\pi_1\colon X_1 \to M$. Identifichiamo M con la corrispondente sezione nulla $\zeta_{X_1} M$ di π_1 in X_1 e consideriamo un intorno tubolare di M in X_1:*

$$f\colon X \to X_1.$$

Allora esiste una isotopia $f_t\colon X \to X_1$ con dominio proprio $[0,1]$ tale che $f_1 = f$ e $f_0\colon X \to X_1$ è un isomorfismo di fibrati vettoriali. (Se f, π, π_1 sono di classe C^p $(2 \le p \le \infty)$, allora l'isotopia f_t può essere scelta di classe C^{p-1}.)

Dimostrazione. Definiamo per ogni $t \neq 0$ e per ogni e in X,

$$F_t(e) := t^{-1} f(te).$$

Chiaramente F_t è un embedding in quanto composizione di embedding (le moltiplicazioni per gli scalari t e t^{-1} sono isomorfismi di fibrati vettoriali). Dobbiamo studiare che cosa accade per $t = 0$.

Dato $e \in X$, sia U_1 un intorno aperto di πe sul quale X_1 sia banalizzato come $U_1 \times E_1$. Determiniamo quindi un intorno aperto $U \subset U_1$ di πe ed una palla aperta $B \subset E$ con centro in O, tale che, su U, X sia isomorfo a $U \times E$, e tale che la rappresentazione locale $\bar{f}$ di f su $U \times B \subset U \times E$ applichi $U \times B$ in $U_1 \times E_1$. Ciò è possibile per la proprietà di continuità di f. Su $U \times B$, $\bar{f}$ è della forma

$$\bar{f}(x, v) = \big(\varphi(x, v), \psi(x, v)\big),$$

in cui φ e ψ sono due morfismi opportuni tali che $\varphi(x, 0) = x$ e $\psi(x, 0) = 0$. Si osservi che, nella rappresentazione locale di X, se t è sufficientemente piccolo allora te è contenuto in $U \times B$.

Su $U \times B$, la rappresentazione locale di F_t è

$$\overline{F}_t(x, v) = \big(\varphi(x, tv), t^{-1}\psi(x, tv)\big). \tag{D.5.2}$$

La mappa φ è quindi un morfismo nelle tre variabili x, v, e t, anche quando $t = 0$. D'altra parte, la seconda componente di $\overline{F}_t$ può essere scritta come

$$\begin{aligned} t^{-1}\psi(x, tv) &= t^{-1} \int_0^1 D_2\, \psi(x, stv) \cdot (tv)\, ds \\ &= \int_0^1 D_2\, \psi(x, stv) \cdot v\, ds. \end{aligned} \tag{D.5.3}$$

Si conclude che (D.5.3) è un morfismo in t, per ogni t in $\mathbb{R}$. Per $t = 0$, essendo $\varphi(x, 0) = x$, in virtù di (D.5.3), (D.5.2) è della forma

$$\overline{F}_0(x, v) = \big(x, D_2\, \psi(x, 0)v\big).$$

Siccome per ipotesi f è un embedding, segue che $D_2\psi(x, 0)$ è un isomorfismo toplineare, e perciò F_0 è un isomorfismo di fibrati vettoriali. Per ottenere una isotopia con dominio proprio $[0,1]$, ricordando l'osservazione D.13 possiamo comporre con una funzione monotona crescente $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\sigma(t) = 0$ per $t \le 0$ e $\sigma(t) = 1$ per $t \ge 1$.

□

Teorema D.17 (Unicità dell'intorno tubolare). *Sia N una sottovarietà di una varietà M. Siano*

$$\pi\colon X \to N \qquad e \qquad \pi_1\colon X_1 \to N$$

due fibrati vettoriali e assumiamo che X sia comprimibile (cfr. definizione D.2). Siano $f\colon X \to M$ e $g\colon X_1 \to M$ due intorni tubolari di N in M. Allora esiste una isotopia di intorni tubolari

$$f_t\colon X \to M$$

con dominio proprio $I = [0,1]$ e un isomorfismo di fibrati vettoriali $\lambda\colon X \to X_1$ tale che $f_1 = f$ e $f_0 = g\lambda$.

Traccia della dimostrazione. Osserviamo che $f(X)$ e $g(X_1)$ sono intorni aperti di N in M. Sia $U = f^{-1}\big(f(X) \cap g(X_1)\big)$ e $\varphi\colon X \to U$ un diffeomorfismo (un tale φ esiste perché per ipotesi X è comprimibile). Posto $\psi := f|_U \circ \varphi$, allora ψ è un intorno tubolare, e $\psi(X)$ è contenuto in $g(X_1)$. Si osservi che, nelle notazioni della proposizione D.16 precedente, $g^{-1}\psi\colon X \to X_1$ giuoca lo stesso ruolo di $f\colon X \to X_1$. Segue che, per la sopra citata proposizione, esiste una isotopia di intorni tubolari di X, $G_t\colon X \to X_1$, tale che $G_1 = g^{-1}\psi$ e G_0 è un isomorfismo di fibrati vettoriali. Posto $\psi_t := gG_t$, $\psi_t\colon X \to M$ è una isotopia di intorni tubolari tale che $\psi_1 = \psi$ e $\psi_0 = g\omega$, in cui $\omega\colon X \to X_1$ è un isomorfismo di fibrati vettoriali.

Dunque abbiamo dimostrato che esiste una isotopia di intorni tubolari, per cui, in particolare, gli intorni tubolari ψ e $g\omega$ sono isotopi. Similmente si dimostra che ψ e $f\mu$ sono isotopi, in cui $\mu\colon X \to X$ è un qualche isomorfismo di fibrati.

Invocando l'osservazione D.13, si ottiene quindi una isotopia F_t di intorni tubolari da $g\omega$ a $f\mu$. Infine, per l'osservazione D.14, $F_t\mu^{-1}$ è ancora una isotopia di intorni tubolari da $g\omega\mu^{-1}$ a f, e la dimostrazione è conclusa scegliendo $\lambda := \omega\mu^{-1}$.

□

Chiaramente c'è un enunciato analogo nel caso dei fibrati vettoriali Hilbertiani:

Teorema D.18. *Sia N una sottovarietà di M. Siano $\pi\colon X \to N$ e $\pi_1\colon X_1 \to N$ due fibrati di Hilbert. Assumiamo che X sia comprimibile. Siano $f\colon X \to N$ e $g\colon X_1 \to M$ due intorni tubolari di N in M. Allora esiste una isotopia*

$$f_t\colon X \to M$$

di intorni tubolari con dominio proprio $[0,1]$ ed esiste un isomorfismo di fibrati di Hilbert $\mu\colon X \to X_1$ tale che $f_1 = f$ e $f_0 = g\mu$.

Dimostrazione. La dimostrazione ricalca nella sostanza la prova del teorema D.17. □

D.5.2 Un teorema di estensione dell'intorno tubolare

Presentiamo nel seguito un teorema di estensione dell'intorno tubolare in dimensione finita. Si tratta di un risultato interessante perché oltre a sfruttare le nozioni e le metodologie dimostrative introdotte in questa appendice, esso si rivela particolarmente utile nella parte finale della dimostrazione del lemma 2.75, permettendo di semplificare notevolmente la dimostrazione del teorema di embedding aperto.

Teorema D.19. *Sia X una varietà compatta senza bordo di dimensione n e U_0, U sottoinsiemi aperti di X con $\overline{U}_0 \subset U$. Sia $\mathbb{R}^N$ uno spazio euclideo di dimensione N con N sufficientemente grande, e $h\colon X \to \mathbb{R}^N$ un embedding per il quale $h|_U\colon U \to \mathbb{R}^N$ si estenda ad un embedding aperto $g\colon U \times \mathbb{R}^{N-n} \to \mathbb{R}^N$ in modo che $h \cup g\colon X \cup (U \times \mathbb{R}^{N-n}) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ sia un embedding. Supponiamo inoltre che la restrizione di $dg\colon T(U \times \mathbb{R}^{N-n}) \to T\mathbb{R}^N$ a $T(U \times \mathbb{R}^{N-n})_{U\times\{O\}}$,*

$$dg|_{TU\times\mathbb{R}^{N-n}}\colon TU \times \mathbb{R}^{N-n} \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

si estenda ad un isomorfismo α da $T(X \times \mathbb{R}^{N-n})_{X\times\{O\}}$ su $h(X) \times \mathbb{R}^N$,

$$\alpha\colon TX \times \mathbb{R}^{N-n} \to h(X) \times \mathbb{R}^N. \tag{D.5.4}$$

Allora, per ogni $k \in \mathbb{R}^+$, indicata con $k\mathbb{R}^{N-n}$ la palla aperta di $\mathbb{R}^{N-n}$ di raggio k e centro l'origine, la mappa

$$g|_{\overline{U}_0\times k\mathbb{R}^{N-n}}\colon \overline{U}_0 \times k\mathbb{R}^{N-n} \to \mathbb{R}^N \tag{D.5.5}$$

si estende ad un intorno tubolare

$$G\colon X \times \mathbb{R}^{N-n} \to \mathbb{R}^N \tag{D.5.6}$$

di $h(X)$. Infine G può essere scelto in modo tale che la restrizione di $dG\colon T(X \times \mathbb{R}^{N-n}) \to T\mathbb{R}^N$ a $T(X \times \mathbb{R}^{N-n})_{X\times\{O\}}$,

$$dG|_{TX\times\mathbb{R}^{N-n}}\colon TX \times \mathbb{R}^{N-n} \longrightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \tag{D.5.7}$$

sia isotopa a α, via una isotopia di isomorfismi di fibrati vettoriali.

Osservazione D.20. Alcune precisazioni sul significato del teorema: $X =: X^n$ è una varietà n-dimensionale; $U \subset X$ è un aperto di varietà, dunque U eredita da X^n la struttura di sottovarietà di dimensione n. $U_0 \subset U$ è un aperto di X ben contenuto in U (i.e., $\overline{U}_0 \subset U$); per ipotesi $h|_U\colon U \to \mathbb{R}^N$ si estende a $g\colon U \times \mathbb{R}^{N-n} \to \mathbb{R}^N$, più precisamente, $h|_{U\times\{0\}}$ definita da $h|_{U\times\{0\}}(u,0) := h(u)$ si estende a g. Il dominio ed il codominio di g sono varietà della stessa dimensione: $n+(N-n) = N$; in particolare deve essere $N \geqslant n$. Infine, un appunto sulla mappa $h \cup g$: essa è definita su $X \cup (U \times \mathbb{R}^{N-n})$, dunque, in particolare

$$\begin{cases} (h\cup g)(x) = h(x) & \text{se } x \in X, \\ (h\cup g)(x) = g(x,0) & \text{se } (x,0) \in U \times \mathbb{R}^{N-n}, \\ (h\cup g)(x,v) = g(x,v) & \text{se } (x,v) \in U \times \mathbb{R}^{N-n}. \end{cases}$$

L'idea su cui si fonda la dimostrazione del teorema è che, per estendere un embedding è sufficiente provare che esso è isotopo a un embedding estendibile. In effetti, questa tecnica di estensione è uno degli scopi principali della teoria dell'isotopia. Per le definizioni ed i teoremi utili in questo contesto si faccia riferimento al testo di Hirsch [Hir 94], Capitolo 8.1.

Dimostrazione del teorema D.19: Dimostreremo il teorema stabilendo i passi $1-3$ seguenti.

Passo 1. Sia V un sottoinsieme aperto di X tale che $\overline{U}_0 \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Posto

$$\alpha_0 \overset{\text{def}}{=} \alpha|_{TX} := \alpha|_{TX\times\{O\}\times\{O\}},$$

dalle ipotesi segue che $\alpha_0|_{TU} = dh|_{TU}$. Sia

$$b_t\colon h(X)\times\mathbb{R}^N \to h(X)\times\mathbb{R}^N$$

una isotopia di fibrati vettoriali tale che (1) $b_0 = \mathrm{id}$, (2) $b_t|_{h(\overline{V})\times\mathbb{R}^N} = \mathrm{id}$ e (3) $b_1 \circ dh = \alpha_0$. Si definisca

$$\beta\colon TX \oplus \mathbb{R}^{N-n} \longrightarrow h(X)\times\mathbb{R}^N$$

ponendo

$$\beta :\overset{\text{def}}{=} b_1^{-1} \circ \alpha.$$

Allora:

(i) α e β sono isotopi;

(ii) $\beta|_{TX} \equiv dh$;

(iii) la restrizione di β a $T(\overline{V}) \oplus \mathbb{R}^{N-n}$ coincide identicamente con $dg|_{T(\overline{V}\times\mathbb{R}^{N-n})_{\overline{V}\times\{O\}}}$;

(iv) posto $\beta_1 := \beta|_{X\times\mathbb{R}^{N-n}}$, per ogni $(x,v) \in \overline{V}\times\mathbb{R}^{N-n}$ risulta $\beta_1(x,v) = d\big(g(x,\cdot)\big)_O[v]$.

Segue che β_1 può essere visto come un morfismo di fibrati $X\times\mathbb{R}^{N-n} \to h(X)\times\mathbb{R}^N$, la cui somma con $dh\colon TX \to h(X)\times\mathbb{R}^N$ fornisce un isomorfismo di fibrati vettoriali

$$(dh \oplus \beta_1)\colon TX \oplus (X\times\mathbb{R}^{N-n}) \longrightarrow h(X)\times\mathbb{R}^N.$$

Passo 2. Fissato $k \in \mathbb{R}^+$, sia $k' > k$ arbitrario. In accordo col teorema D.9, esiste un intorno tubolare $\varphi\colon X \times \mathbb{R}^{N-n} \to \mathbb{R}^N$ di $h(X)$ in $\mathbb{R}^N$ (cfr. definizione D.6), tale che

$$g\big(U \times k' \, \mathbb{R}^{N-n}\big) \subset \varphi\big(X \times \mathbb{R}^{N-n}\big).$$

Consideriamo la composizione

$$\varphi^{-1} \circ g\colon U \times k' \, \mathbb{R}^{N-n} \longrightarrow X \times \mathbb{R}^{N-n},$$

e scriviamo

$$\varphi^{-1} \circ g(x,v) = \big(\xi(x,v), \eta(x,v)\big).$$

Denotata con $p\colon X \times \mathbb{R}^{N-n} \to \mathbb{R}^{N-n}$ la proiezione sul secondo fattore, per ogni $(x,v) \in \overline{V} \times \mathbb{R}^{N-n}$

$$\begin{aligned} D_2\eta(x,O)[v] := d\big(\eta(x,\cdot)\big)_O[v] &= p \circ d(\varphi^{-1})_{g(x,O)} \circ d\big(g(x,\cdot)\big)_O[v] \\ &= p \circ d(\varphi^{-1})_{g(x,O)} \circ \beta_1(x,v). \end{aligned} \tag{D.5.8}$$

Specificatamente $d\big(\eta(x,\cdot)\big)_O \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{N-n})$, inoltre, per il **Passo 1**, poiché β_1 è definita globalmente, $D_2\eta$ si estende ad una mappa definita su X a valori in $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^{N-n})$ (infatti $(d\varphi^{-1} \circ dh)(TX) = TX$.)

Segue che, in virtù del teorema di isotopia per gli intorni tubolari (cfr. [Hir 94], [Wa 60]), la mappa

$$\varphi^{-1} \circ g|_{\overline{U}_0 \times k \, \mathbb{R}^{N-n}} \longrightarrow X \times \mathbb{R}^{N-n}$$

si estende ad un intorno tubolare di X

$$f\colon X \times \mathbb{R}^{N-n} \longrightarrow X \times \mathbb{R}^{N-n};$$

inoltre possiamo certamente scegliere la mappa tubolare f isotopa alla mappa

$$(x,v) \longmapsto \big(x, p \circ d(\varphi^{-1})_{g(x,O)} \circ \beta_1(x,v)\big).$$

Passo 3. Sia $G := \varphi \circ f\colon X \times \mathbb{R}^{N-n} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una estensione di $g|_{\overline{U}_0 \times k \, \mathbb{R}^{N-n}}$. Allora

(i) G è un intorno tubolare di $h(X)$ in $\mathbb{R}^N$;

(ii) indicato con d_2 l'operatore di differenziazione parziale rispetto alla seconda variabile,

$$d_2 G|_{T(X \times \mathbb{R}^{N-n})_{X \times \{O\}}} = d\varphi \circ (d_2 f)|_{T(X \times \mathbb{R}^{N-n})_{X \times \{O\}}}.$$

Si osservi che f è isotopa alla mappa

$$(x,v) \longmapsto \big(x, p \circ d(\varphi^{-1})_{g(x,O)} \circ \beta_1(x,v)\big),$$

e quindi il differenziale parziale $d_2 f$ è isotopo a $(x,v,u) \mapsto \big(x, v, p \circ d(\varphi^{-1})_{g(x,0)} \circ \beta_1(x,u)\big)$. Si conclude che $d\varphi \circ d_2 f$ è isotopo alla mappa $(x,v,u) \mapsto \big(h(x), \beta_1(x,u)\big)$. Poiché $\varphi \circ f|_{X \times \{O\}} = h$, indicato con d_1 l'operatore di differenziazione parziale rispetto alla prima variabile, $d_1 G = dh$ su $X \times \{O\}$. Segue che $dG|_{T(X \times \mathbb{R}^{N-n})_{X \times \{O\}}}$ è isotopo a β, il quale è a sua volta isotopo ad α. Si conclude quindi che G soddisfa le richieste della proposizione.

□

D.6 Costruzione di una filtrazione totalmente geodetica

Scopo di questa sezione è costruire una filtrazione totalmente geodetica di una varietà Riemanniana di dimensione infinita facendo uso esclusivamente delle nozioni e delle metodologie introdotte in questa e nelle precedenti appendici, in particolare senza ricorrere alla nozione di spray (cfr. appendice F).

Sia (M, g) una varietà Riemanniana di classe C^∞ (modellata su uno spazio di Hilbert H_0 di dimensione finita o infinita). Fissato x in M, il prodotto scalare su T_xM è g_x, quindi se ξ ed η sono vettori in T_xM, il loro prodotto scalare è $g_x(\xi, \eta)$. Sia B la palla unitaria aperta di uno spazio di Hilbert H_1, con prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora $M \times B$ è ancora una varietà Riemanniana di classe C^∞, precisamente, se $(x, y) \in M \times B$ e $(\xi, \lambda), (\eta, \mu) \in T_{(x,y)}(M \times B) = T_xM \times T_yB$, il prodotto scalare di (ξ, λ) e di (η, μ) è

$$g_x(\xi, \eta) + \langle\lambda, \mu\rangle.$$

Lemma D.21. *Siano M e N varietà Hilbertiane di classe C^∞ dotate di metriche Riemanniane complete g_M e g_N rispettivamente. Allora il prodotto $g_M \times g_N$ è una metrica Riemanniana completa su $M \times N$.*

Dimostrazione. Per x in M e y in N c'è una identificazione standard $T_{(x,y)}M \times N \cong T_xM \oplus T_yN$ (indotta dai differenziali $d\pi_M$ e $d\pi_N$ delle proiezioni canoniche π_M e π_N di $M \times N$ su M e N rispettivamente).

La struttura Riemanniana prodotto $g := g_M \times g_N$ è definita in modo naturale come

$$g_{(x,y)}\big((\xi, \eta), (\xi', \eta')\big) = g_M(x)(\xi, \xi') + g_N(y)(\eta, \eta').$$

Si verifica facilmente che g è effettivamente una metrica Riemanniana. Verifichiamo la completezza. Sia $\sigma\colon [0, 1] \to M \times N$ una curva C^1 a tratti da (x, y) a (x', y') in $M \times N$. La lunghezza di σ, $L(\sigma)$, soddisfa le disuguaglianze

$$L(\sigma) \geq L\big(\pi_M\sigma\big), \qquad L(\sigma) \geq L\big(\pi_N\sigma\big). \tag{D.6.1}$$

Infatti, per ogni $0 \leq t \leq 1$, se $\dot\sigma(t_0)$ esiste allora

$$\begin{aligned} g\big(\dot\sigma(t_0), \dot\sigma(t_0)\big) &= g_M\left(\frac{d(\pi_M\sigma)}{dt}(t_0), \frac{d(\pi_M\sigma)}{dt}(t_0)\right) + g_N\left(\frac{d(\pi_N\sigma)}{dt}(t_0), \frac{d(\pi_N\sigma)}{dt}(t_0)\right) \\ &\geq g_M\left(\frac{d(\pi_M\sigma)}{dt}(t_0), \frac{d(\pi_M\sigma)}{dt}(t_0)\right). \end{aligned}$$

Analogamente

$$g\big(\dot\sigma(t_0), \dot\sigma(t_0)\big) \geq g_N\left(\frac{d(\pi_N\sigma)}{dt}(t_0), \frac{d(\pi_N\sigma)}{dt}(t_0)\right).$$

Dunque (cfr. equazione C.4.1) le disuguaglianze (D.6.1) sono soddisfatte (i punti in cui non è definito il vettore tangente sono in numero finito). Segue che la metrica intrinseca ρ associata a g (cfr. definizione C.4.2) soddisfa la seguente disuguaglianza (ρ_M e ρ_N denotino rispettivamente le metriche intrinseche associate a g_M e g_N):

$$\rho\big((x, y), (x', y')\big) \geq \max\big(\rho_M(x, x'), \rho_N(y, y')\big).$$

In particolare, se una successione (x_n, y_n) è di Cauchy rispetto alla metrica ρ, allora la successione (x_n) è di Cauchy rispetto alla metrica ρ_M, dunque è convergente ad un punto x_*. Analogamente (y_n) è di Cauchy rispetto alla metrica ρ_N e quindi è convergente a un punto y_*. Segue che

$$(x_n, y_n) \to (x_*, y_*)$$

nella topologia prodotto, che coincide con la topologia indotta da ρ. Quindi $M \times N$ è uno spazio completo rispetto alla metrica ρ. ☐

Analogamente alla nozione di *pull-back* di una metrica (cfr. definizione 1.4) si introduce la seguente comoda

Definizione D.22. Sia (M, g) una varietà Riemanniana ed $f\colon M \to N$ un diffeomorfismo tra M ed una varietà N. Il *push-forward* della metrica g mediante f è la metrica $df(g)$ su N definita ponendo

$$df(g)_p(X, Y) := g_{f^{-1}(p)}\big(df^{-1}(X), df^{-1}(Y)\big).$$

Costruzione 1. Sia M una sottovarietà chiusa di una varietà Hilbertiana N. Supponiamo che il fibrato normale di M in N sia banale. Sia g_M una struttura Riemanniana completa su M e g_N una struttura Riemanniana completa su N. Sono soddisfatte le ipotesi di applicabilità del teorema D.8 di esistenza dell'intorno tubolare. Inoltre, siccome abbiamo supposto che il fibrato normale di M in N sia banale, sfruttando la metrica g_N possiamo costruire un intorno tubolare di M in N della forma $\varphi\colon M \times H \to U$, in cui U è un aperto di N contenente M (il tubo dell'intorno tubolare), (H, g_H) è uno spazio di Hilbert di dimensione eguale alla codimensione di M in N e φ è un diffeomorfismo su U

$$\begin{tikzcd} M \times H \arrow[d, "\pi_M"'] \arrow[dr, bend left, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ M \arrow[r, hook, "\iota"'] & U \end{tikzcd} \tag{D.6.2}$$

Per il lemma D.21, $g_M \times g_H$ è una struttura Riemanniana completa su $M \times H$; inoltre tale struttura può essere trasportata su U attraverso φ, precisamente, nelle notazioni della definizione D.22, il push-forward

$$g_U := d\varphi(g_M \times g_H) \tag{D.6.3}$$

è una metrica Riemanniana completa su U. Si osservi in particolare che le fibre $\varphi(\{x\} \times H)$ e le sezioni $\varphi(M \times \{\xi\})$ $(\forall x \in M,\ \xi \in H)$ di (U, g_U) sono rispettivamente isometriche ad H e M; inoltre, come nella dimostrazione del lemma D.21, ogni curva C^1 a tratti da (x, ξ_1) a (x, ξ_2) ha lunghezza maggiore o al più uguale della corrispondente curva proiettata su H. Ne deriva che la distanza fra i punti (x, ξ_1) e (x, ξ_2) può essere calcolata a partire da curve C^1 a tratti in $\{x\} \times H$ oppure (aut) in $M \times \{\xi\}$. Denotiamo con ρ_H la metrica su H associata a g_H.

Consideriamo per δ in $\mathbb{R}^+$ l'insieme

$$U_\delta := \varphi(M \times \delta H) = \big\{\varphi(x, \xi) \,:\, (x, \xi) \in M \times H \,\wedge\, \|\xi\| < \delta\big\}. \tag{D.6.4}$$

(La notazione $M \times \delta H$ è già stata introdotta all'interno della tesi, cfr. Notazione 2.54 pag. 41.) In particolare U_δ è un intorno tubolare di M, ma *non* è un intorno tubolare totale (cfr. definizione D.6).

Siano f_1 ed f_2 funzioni definite su H tali che $f_1 \equiv 1$ su $\{\xi : \|\xi\| \leq 4\}$, $f_1 \equiv 0$ su $\{\xi : \|\xi\| \geq 5\}$; $f_2 \equiv 0$ su $\{\xi : \|\xi\| \leq 2\}$, $f_2 \equiv 1$ su $\{\xi : \|\xi\| \geq 3\}$. Si noti che f_1 ed f_2 possono essere scelte di classe C^∞ perché la norma su H è di classe C^∞ su $H \setminus \{0\}$.

Sia $\pi_H\colon M \times H \to H$ la proiezione sul secondo fattore, allora (cfr. diagramma D.6.2) per y in U, $\pi_H(\varphi^{-1}(y))$ appartiene a H e la seguente formula definisce correttamente una struttura Riemanniana sulla varietà N:

$$h(y) :\overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f_1\big(\pi_H\big(\varphi^{-1}(y)\big)\big)\, g_U(y) + f_2\big(\pi_H\big(\varphi^{-1}(y)\big)\big)\, g_N(y) & \text{se } y \in U, \\ g_N(y) & \text{se } y \in N \setminus U. \end{cases} \tag{D.6.5}$$

Si noti che h è di classe C^∞, infatti per costruzione $h \equiv g_N$ su $N \setminus U_5$ e g_N è di classe C^∞; d'altra parte, se $y \in U_6 \subset U$, la formula che definisce $h(y)$ è di classe C^∞.

Nel seguito saremo principalmente interessati alla lunghezza delle curve, quindi sarà comodo usare la notazione h, g_U, g_N, g_M per indicare la forma quadratica associata alle corrispondenti metriche. Con questa convenzione, per come sono state definite g_U e h, possiamo affermare che su U_4 risulta $g_U \leq h$, su $U_3^c := N \setminus U_3$, $g_N \leq h$ ed infine su $U_4 \cap U_3^c$, $h = g_U + g_N$.

Notazione 1. Indicheremo con $\rho, \rho_U, \rho_M, \rho_N$ le metriche intrinseche su N, U, M, N associate rispettivamente a h, g_U, g_M, g_N.

La dimostrazione del lemma seguente –seppure concettualmente elementare– è molto tecnica e lunga e per questo la ometteremo.

Lemma D.23. *La metrica Riemanniana h definita da D.6.5 è completa, equivalentemente (N, ρ) è uno spazio metrico completo.*

Definizione D.24. Sia M una sottovarietà di una varietà Riemanniana N. Diremo che M è *totalmente geodetica* se M è chiusa e se ogni geodetica in N con condizioni iniziali in (M, TM) è contenuta in M.

È un fatto ben noto che ogni geodetica in M è anche una geodetica in N.

Osservazione D.25. La struttura Riemanniana h su U_2 (ristretta da N) è isometrica alla struttura Riemanniana prodotto sul disco fibrato banale $X \times 2H$. Infatti, se $\|\xi\| < 2$ allora $f_1 \equiv 1$ e $f_2 \equiv 0$, quindi (cfr. equazione D.6.5) $h \equiv g_U$ e $(U_2, h) = (U_2, g_U)$; d'altra parte $U_2 = \varphi(M \times 2H)$ e

$$g_U := d\varphi(g_M \times g_H),$$

quindi effettivamente

$$\big(M \times 2H, g_M \times g_{2H}\big) \cong_{\varphi,\, d\varphi} (U_2, g_U) = (U_2, h).$$

Proposizione D.26. *La struttura Riemanniana h su N rende M una sottovarietà totalmente geodetica.*

Dimostrazione. Sia σ una geodetica in N con condizioni iniziali $\big(\sigma(0), \dot\sigma(0)\big)$ in (M, TM).

Dall'osservazione D.25 sappiamo che (U_2, h) è isometrica a $\big(M \times 2H, g_M \times g_{2H}\big)$, inoltre $M \subset U_2$. Sia $q = q(t)$ l'unica geodetica in $\big(M \times 2H, g_M \times g_{2H}\big)$ uscente da $(\sigma(0), 0) \in M \times \{0\}$ e diretta lungo $(\dot\sigma(0), O) \in TM \times \{O\}$. Dimostreremo che la geodetica q è della forma $q(t) = (q_1(t), 0) \in M \times \{0\}$, da cui, in virtù della sopra citata isometria, $t \mapsto q_1(t)$ risulterà una geodetica in (U_2, h) uscente da $\sigma(0)$ nella direzione $\dot\sigma(0)$. Per unicità risulterà quindi $\sigma = q_1$: in particolare σ sarà contenuta in M, e M sarà totalmente geodetica.

Sia p l'unica geodetica in (M, g_M) uscente da $\sigma(0)$ nella direzione $\dot\sigma(0)$. Posto $r := (p, 0)$, r è una curva in $M \times \{0\}$ uscente dal punto $(\sigma(0), 0)$ nella direzione $(\dot\sigma(0), O)$. In particolare r è una geodetica in $M \times 2H$ rispetto alla struttura Riemanniana prodotto $g_M \times g_{2H}$, infatti essa ha la proprietà di minimizzare la distanza tra punti sufficientemente vicini (ogni curva che connetta due punti vicini del cammino $\big(p(t), 0\big)$ e che esca da $M \times \{0\}$ avrebbe necessariamente lunghezza maggiore, a causa delle componenti in H della sua derivata). Dunque, per unicità, $q = r = (p, 0) = (\sigma, 0)$. $\square$

Costruzione 2. Per ogni n in $\mathbb{N}$, supponiamo che M_n sia una varietà di Hilbert separabile di classe C^∞ embedded come sottovarietà chiusa di classe C^∞ di M_{n+1}, tale che il fibrato normale di M_n in M_{n+1} sia banale. Eruditi dal corollario 1.5 pag. 2, dotiamo ognuna delle sottovarietà M_n con una struttura Riemanniana completa.

Sia F_0 il modello di M_0 e, per ogni $n \geq 1$, denotiamo con F_n la fibra costante del fibrato normale di M_{n-1} in M_n. Per ogni n in $\mathbb{N}^+$, F_n è uno spazio vettoriale Hilbertabile: dotiamo ognuno di essi con una fissata forma bilineare simmetrica definita positiva.

Nel seguito utilizzeremo induttivamente la costruzione che ci ha portato alla definizione D.6.5 di una nuova metrica Riemanniana h su N a partire dalle metriche g_M su $M \subset N$, g_N su N, e g_H sulla fibra costante H del fibrato normale di M in N. Se g_0 (g_M) è la data metrica Riemanniana completa su M_0 (M), sfruttando l'assegnata metrica Riemanniana completa su M_1 (g_N su N) e il prodotto scalare definito positivo su F_1 (g_H su H) definiamo come in (D.6.5) una metrica completa (cfr. lemma D.23) g_1 (h) su M_1. Similmente, data g_1 su M_1, costruiamo g_2 su M_2 sfruttando g_1 e le assegnate strutture su M_2 e F_2.

Induttivamente, supponendo di aver costruito con questo procedimento la metrica g_n, costruiamo g_{n+1} su M_{n+1} sfruttando g_n e le assegnate strutture su M_{n+1} e F_{n+1}. Per ogni n in $\mathbb{N}$, indicata con ρ_n la metrica intrinseca su M_n associata a g_n, per il lemma D.23 (M_n, ρ_n) è uno spazio metrico completo. Inoltre, per la proposizione D.26, per ogni n M_n è una sottovarietà totalmente geodetica di (M_{n+1}, g_{n+1}). Si è dunque costruito un sistema

$$\big(M_n, U(n), \iota_n, \tau(n), \pi(n), g_n, \rho_n\big)_n,$$

in cui, per ogni n in $\mathbb{N}$,

- g_n e ρ_n sono definiti come sopra,
- $\iota_n\colon M_n \to M_{n+1}$ è un embedding di classe C^∞ che realizza X_n come una sottovarietà chiusa di X_{n+1} con fibrato normale banale,
- $U(n)$ è un intorno tubolare di $\iota_n(M_n)$ in M_{n+1}, costruito per ogni n come l'intorno tubolare U del diagramma (D.6.2),
- $\tau(n) := \pi_{F_{n+1}} \circ \varphi_n^{-1}$ è la proiezione di $U(n)$ sullo spazio di Hilbert F_{n+1},
- $\pi(n) := \iota_n \circ \pi_{M_n} \circ \varphi_n^{-1}$ è la proiezione di $U(n)$ su $\iota_n(M_n)$,

come esemplificato dal seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
M_n \times F_{n+1} \arrow[d, "\pi_{M_n}"'] \arrow[dr, bend left, "\varphi_n"] & & \iota_n(M_n) & & M_n \arrow[ll, "\iota_n"'] \\
M_n \arrow[r, "\iota_n"'] & U(n) \arrow[ur, "\pi(n)"] \arrow[rr, leftrightarrow, "\varphi_n^{-1}"] \arrow[drr, "\tau(n)"'] & & M_n \times F_{n+1} \arrow[ur, "\pi_{M_n}"'] \arrow[d, "\pi_{F_{n+1}}"] & \\
& & & F_{n+1} &
\end{tikzcd}$$

Osservazione D.27. Poiché ι_n è un embedding di strutture Riemanniane, data comunque una curva σ a valori in M_n, le lunghezze di σ secondo le metriche g_n e g_{n+1} coincidono. D'altra parte, in generale, due punti di M_n possono essere connessi da una curva in M_{n+1} avente lunghezza minore di $\rho_n(x, y)$.

⌟

Costruzione 3. Nelle notazioni precedentemente introdotte, sia M_∞ il limite induttivo della successione $(M_n, \iota_n)_n$. Poiché ι_n è un embedding, dunque è un'applicazione iniettiva, per ogni n in $\mathbb{N}$ possiamo riguardare ι_n come l'applicazione di inclusione di M_n in M_{n+1} e considerare M_n come un sottoinsieme di $M_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$.

Dotiamo M_∞ della topologia indotta dalla pseudometrica ρ definita come segue: se x, y appartengono a M_∞, poniamo

$$\rho(x, y) := \lim_{m\to\infty} \rho_m(x, y). \tag{D.6.6}$$

Si noti che il limite D.6.6 esiste, infatti, se $x, y \in M_\infty$ sono fissati, allora esiste n in $\mathbb{N}$ tale che $x, y \in M_n$. Inoltre $M_n \subset M_m$ per ogni $m \geq n$ e per l'osservazione D.27 $\rho_{m+1}(x, y) \leq \rho_m(x, y)$. Chiaramente, la funzione ρ definita in D.6.6 è una pseudometrica, i.e. soddisfa la disuguaglianza triangolare. Con qualche accorgimento si può dimostrare che (M_∞, ρ) è invero uno spazio metrico, i.e. $\rho(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$.

Infine, denotato con $(\widetilde{M}_\infty, \tilde{\rho})$ il completamento di (M_∞, ρ), si può costruire una metrica Riemanniana completa g su $\widetilde{M}_\infty$ tale che per ogni n in $\mathbb{N}$, g induca la metrica g_n su M_n e $\tilde{\rho}$ sia la metrica intrinseca associata a g. Per i dettagli di questa costruzione si rimanda a [At-To 07].

Osservazione D.28. In particolare, nelle ipotesi e nelle notazioni della sezione 2.3, in virtù del teorema 2.38 di Mukherjea-Quinn sono soddisfatte le ipotesi di applicabilità della costruzione 2, grazie alla quale è possibile dotare ciascuna delle sottovarietà M_n di una metrica Riemanniana g_n cosicché $(M_n, g_n)_{n\geq 0}$ è una successione di sottovarietà Riemanniane di $(\widetilde{M_\infty}, g)$, dove $M = \widetilde{M_\infty}$ è il completamento metrico di M_∞ e g è una metrica Riemanniana completa su M che induce g_n su M_n per ogni n in $\mathbb{N}$. Inoltre, sempre in accordo con quanto osservato nella costruzione 2, per ogni n in $\mathbb{N}$, M_n è una sottovarietà totalmente geodetica di (M_{n+1}, g_{n+1}).

Appendice E

Mappe di Fredholm: teoria non lineare

Definizione E.1 (Smale, 1964). Se M ed N sono varietà di Banach, una mappa $f\colon M \to N$ di classe C^1 è detta *di Fredholm* se per ogni $p \in M$, $df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ è Fredholm lineare.

Osservazione E.2. Se M è connessa, allora $\operatorname{ind} df_p$ è indipendente da p (cfr. [Sm 65]) ed è possibile definire l'indice di Fredholm di f ponendo

$$\operatorname{ind} f := \operatorname{ind} df_p = \dim\ker df_p - \dim\operatorname{coker} df_p. \tag{E.0.1}$$

Specificatamente, $f\colon M \to N$ è una mappa Fredholm di indice zero (in breve, *f è una Φ_0-mappa*) se per ogni $p \in M$ il differenziale $df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ è Fredholm lineare di indice zero, i.e., (cfr. osservazione B.1)

$$\dim\ker df_p = \dim\operatorname{coker} df_p < \infty,$$

ove, si ricordi, $\operatorname{coker} df_p \stackrel{\text{def}}{:=} T_{f(p)}N/\operatorname{rk} df_p$.

Nel seguito proveremo che le mappe di Fredholm sono localmente proprie, cfr. teorema E.10. Ricordiamo intanto alcuni fatti riguardanti le mappe proprie, utili per la parte centrale della tesi. Per una trattazione esauriente si faccia riferimento a [Bou3 89], Capitolo 1, Sezione 10.

Definizione E.3. Una applicazione continua tra spazi topologici X e Y, $f\colon X \to Y$, è detta *propria* se, per ogni sottoinsieme compatto $K \subset Y$, l'immagine inversa $f^{-1}(K)$ è un sottoinsieme compatto di X. Equivalentemente, una mappa continua $f\colon X \to Y$ è propria se, data comunque una successione (x_n) di punti di X che abbandona i compatti di X, $(f(x_n))$ abbandona i compatti di Y (diremo che una successione (x_n) di punti di uno spazio topologico X *abbandona i compatti* di X se, per ogni sottoinsieme compatto $K \subset X$, solo un numero finito di punti di $\{x_n\}$ appartiene a K).

Definizione E.4. Una mappa $f\colon X \to Y$ è detta aperta (rispettivamente chiusa) se l'immagine di ciascun insieme aperto (risp. chiuso) in X è aperto (risp. chiuso) in Y.

Osservazione E.5. Chiaramente, ogni applicazione continua da uno spazio topologico compatto a valori in uno spazio di Hausdorff è propria e chiusa.

Osservazione E.6. Siano X uno spazio topologico di Hausdorff e (x_h) una successione convergente a x in X. Allora l'insieme $\{x_h\}_{h\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$ è compatto.

Proposizione E.7. *Siano X e Y spazi metrici. Se $f\colon X \to Y$ è una applicazione continua propria allora f è chiusa.*

Dimostrazione. Sia C un chiuso in X e sia (x_h) una successione in C con $f(x_h)$ convergente ad y in Y. Allora x_h appartiene alla controimmagine attraverso f del compatto $\{f(x_h)\}_{h\in\mathbb{N}} \cup \{y\}$. A meno di una sottosuccessione, (x_h) è convergente a $x \in C$, essendo C chiuso in X. Dalla continuità di f segue $f(x) = y$, quindi $y \in f(C)$.

□

Osservazione E.8. Se X, Y sono spazi topologici, X di Hausdorff, $f\colon X \to Y$ è una applicazione continua propria e $F \subset X$ è un chiuso, allora $f|_F\colon F \to Y$ è propria. Infatti, posto $K \subset Y$ un sottoinsieme compatto, $f^{-1}(K) \subset X$ è un compatto, dunque, essendo X separato, $f^{-1}(K)$ è un chiuso e quindi $C := f^{-1}(K) \cap F \subset X$ è un chiuso di X dunque è chiuso in $f^{-1}(K)$. D'altra parte $C \subset f^{-1}(K)$, quest'ultimo essendo compatto, dunque C è compatto in $f^{-1}(K)$, e quindi C è compatto in X. Segue che C è compatto in F e quindi $f|_F\colon F \to Y$ è propria.

Osservazione E.9. In particolare, se $X = Y = \mathbb{R}$, una funzione continua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *non* è propria se esiste un compatto $K \subset \mathbb{R}$ per cui l'immagine inversa $f^{-1}(K)$ non sia compatta in $\mathbb{R}$, se e solo se esiste una successione di punti (x_n) in $\mathbb{R}$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ tale che $\big(f(x_n)\big)$ non sia divergente.

Si osservi che, se in più f è limitata, allora ogni successione di punti nell'immagine di f è limitata, dunque ogni funzione continua limitata $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non può essere propria. Oppure, preso come compatto K la chiusura dell'immagine di f, se il dominio di f non è limitato allora la preimmagine $f^{-1}(K)$ non è compatta. Questo fenomeno non si presenta in dimensione infinita, infatti, come si è osservato nella sezione 2.2, non c'è alcuna ostruzione affinché una mappe limitata sia propria.

Teorema E.10. *Una mappa di Fredholm è localmente propria. Precisamente, se $f\colon M \to N$ è una mappa di Fredholm e $x \in M$, allora esiste un intorno chiuso U_x di x tale che $f|_{U_x}\colon U_x \to N$ è propria.*

Dimostrazione. Proviamo dapprima l'enunciato nel caso particolare in cui M ed N siano spazi di Banach E ed E' rispettivamente, essendo $f\colon E \to E'$ una generica (i.e., non necessariamente lineare) mappa di Fredholm. Sia x_0 in E, $df_{x_0}\colon E \to E'$. Siccome $\dim\ker df_{x_0} < \infty$, E può essere scritto nella forma $E_1 \times \ker df_{x_0}$, E_1 spazio di Banach e $x_0 = (p_0, q_0)$, $p_0 \in E_1, q_0 \in \ker df_{x_0}$. Indicata con $D_1 f(x_0)$ la derivata parziale di f rispetto alla prima variabile nel punto x_0, si ha che

$$D_1 f(x_0) = df_{x_0}|_{E_1}\colon E_1 \to E'.$$

Inoltre (i) $D_1 f(x_0)\colon E_1 \to E'$ è iniettivo e (ii) $\mathrm{rk}\big(D_1 f(x_0)\big) = \mathrm{rk}\,(df_0)$ è un sottospazio chiuso di E'. Per il teorema della funzione implicita esiste quindi un intorno $D_1 \times D_2$ di (p_0, q_0) in $E_1 \times \ker D_1 f(x_0)$ tale che D_2 è compatto e, se $q \in D_2$, allora f ristretta a $D_1 \times \{q\}$ è un omeomorfismo (differenziabile) con l'immagine.

Sia $(x_i) = (p_i, q_i)_i$ una successione di punti di $D_1 \times D_2$ appartenente alla preimmagine (mediante f) di un qualche compatto. Basterà dimostrare che (x_i) ammette una successione estratta convergente in $D_1 \times D_2$. Innanzitutto, a meno di passare ad una sottosuccessione, esiste $y = \lim_i f(x_i)$, inoltre siccome D_2 è compatto, a meno di passare ad una sottosuccessione si può assumere che $q_i \to q$, da cui, per la continuità di f, $f(p_i, q) \to y$. D'altra parte f ristretta a $D_1 \times \{q\}$ è un omeomorfismo con l'immagine, quindi da $f(p_i, q) \to y$ segue che $p_i \to p$ ed il teorema è provato in questo caso.

Nel caso generale in cui M ed N siano varietà di Banach la tesi segue immediatamente considerando l'espressione locale di f nelle carte coordinate di M ed N.

□

E.1 Un esempio notevole: la mappa esponenziale

In questa sezione dimostreremo che sotto opportune ipotesi la mappa esponenziale di una varietà Riemanniana è una mappa di Fredholm non lineare di indice zero.

Premettiamo alcune definizioni. Nelle notazioni introdotte nella definizione C.38 pag. 77 consideriamo la seguente

Definizione E.11. Sia $\pi\colon \mathcal{X} \to M$ un fibrato vettoriale su varietà di Hilbert M. Una *connessione* su $\mathcal{X}$ è una applicazione $\nabla\colon \mathcal{T}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$, scritta $(X, V) \mapsto \nabla_X V$, tale che

C 1. $\nabla_X V$ è $C^\infty(M)$-lineare in X:

$$\forall\, f, g \in C^\infty(M) \qquad \nabla_{fX_1+gX_2} V = f\nabla_{X_1} V + g\nabla_{X_2} V;$$

C 2. $\nabla_X V$ è $\mathbb{R}$-lineare in V:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \qquad \nabla_X(aV_1 + bV_2) = a\nabla_X V_1 + b\nabla_X V_2;$$

C 3. ∇ soddisfa un'identità di Leibniz:

$$\forall\, f \in C^\infty(M) \qquad \nabla_X(fV) = f\nabla_X V + (Xf)V.$$

Se $X \in \mathcal{T}(M)$ e $V \in \mathcal{E}(M)$, la sezione $\nabla_X V$ è detta *derivata covariante* di V lungo X. Una connessione sul fibrato tangente ad M, $\nabla\colon \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$ è detta *connessione lineare* o semplicemente *connessione* su M.

Se $\sigma\colon I \to M$ è una curva in M, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, una sezione di $\mathcal{X}$ lungo σ è un'applicazione $V\colon I \to \mathcal{X}$ di classe C^∞ tale che $V(t) \in \mathcal{X}_{\sigma(t)}$ per ogni $t \in I$. Lo spazio vettoriale delle sezioni di $\mathcal{X}$ lungo σ verrà indicato con $\mathcal{E}(\sigma)$, o con $\mathcal{T}(\sigma)$ se $\mathcal{X} = TM$. Una sezione $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ è estendibile se esiste un intorno U del sostegno di σ e una sezione $\tilde{V} \in \mathcal{E}(U)$ tale che $V(t) = \tilde{V}\big(\sigma(t)\big)$ per ogni $t \in I$.

Teorema E.12 ([Lan 01] 3.1, pag. 204). *Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale $\mathcal{X} \to M$ basato su varietà di Hilbert M, e $\sigma\colon I \to M$ una curva in M. Allora esiste un unico operatore $D\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ soddisfacente le seguenti proprietà:*

(i) è $\mathbb{R}$-lineare:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \qquad D(aV_1 + bV_2) = aDV_1 + bDV_2;$$

(ii) soddisfa una regola di Leibniz:

$$\forall\, f \in C^\infty(I) \qquad D(fV) = f'V + fDV;$$

(iii) se $V \in \mathcal{E}$ è estendibile, e $\tilde{V}$ è un'estensione di V, si ha:

$$DV(t) = \nabla_{\sigma'(t)}\tilde{V}.$$

Definizione E.13. L'operatore D la cui esistenza ed unicità è garantita dal teorema precedente è detto *derivata covariante* lungo la curva $\sigma\colon I \to M$. Se $t \in I$ e $V \in \mathcal{E}(\sigma)$, scriveremo anche $D_t V$ in luogo di $DV(t)$.

Definizione E.14. Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi\colon \mathcal{X} \to M$, e $\sigma\colon I \to M$ una curva. Una sezione $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ è detta parallela se $DV \equiv O$.

Osservazione E.15. Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi\colon \mathcal{X} \to M$, e $\sigma\colon [0,1] \to M$ una curva. Dato $v \in \mathcal{X}_{p_0}$, allora (cfr. [Lan 01] teorema 3.3, pag. 206) esiste un'unica sezione $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ parallela lungo σ tale che $V(0) = v$.

Definizione E.16. Sia ∇ una connessione su un fibrato vettoriale $\pi\colon \mathcal{X} \to M$, e $\sigma\colon [0,1] \to M$ una curva. Poniamo $p_0 = \sigma(0)$ e $p_1 = \sigma(1)$. Dato $v \in \mathcal{X}_{p_0}$, l'unica sezione $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ parallela lungo σ tale che $V(0) = v \in \mathcal{X}_{p_0}$ è detta *estensione parallela* di v lungo σ. Il *trasporto parallelo* lungo σ (relativo a ∇) è l'applicazione $\tilde{\sigma}\colon \mathcal{X}_{p_0} \to \mathcal{X}_{p_1}$ definita da $\tilde{\sigma}(v) = V(1)$, dove $V \in \mathcal{E}(\sigma)$ è l'estensione parallela di $v \in \mathcal{X}_{p_0}$.

Definizione E.17. Sia ∇ una connessione lineare su una varietà M. Una geodetica per ∇ è una curva $\sigma\colon I \to M$ tale che $D\dot{\sigma} \equiv 0$. In altre parole σ è una geodetica se e solo se il vettore tangente $\dot{\sigma}$ è parallelo lungo σ.

Definizione E.18. Una connessione ∇ su una varietà M è detta *simmetrica* se

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$

per ogni $X, Y \in \mathcal{T}(M)$. Una connessione ∇ su una varietà Riemanniana (M,g) è detta una *connessione Riemanniana* se è simmetrica e il trasporto parallelo lungo una qualsiasi curva è un'isometria.

Osservazione E.19. Esiste un'unica connessione Riemanniana corrispondente ad una data metrica Riemanniana. Essa può essere calcolata usando l'identità

$$2g\big(\nabla_X Y, Z\big) = Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) + g\big([X,Y],Z\big) + g\big([Z,X],Y\big) + g\big(X,[Z,Y]\big).$$

Questa connessione è detta la *connessione di Levi-Civita* della varietà Riemanniana.

La dimostrazione dettagliata dell'esistenza ed unicità della connessione di Levi-Civita si può trovare nel testo di Lang [Lan 01], teorema 4.1, pag. 209.

Proposizione E.20 ([Lan 01] 1.1, pag. 231). *Esiste un unico campo di tensori*

$$R\colon \mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$$

definito da

$$R(X,Y,Z) := R_{XY}Z \stackrel{\text{def}}{=} \big[\nabla_X, \nabla_Y\big]Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Grossman [Gro 65] ha fornito alcuni esempi espliciti di sottovarietà chiuse di codimensione uno di uno spazio di Hilbert reale separabile la cui metrica Riemanniana indotta ha una mappa esponenziale associata $\exp_x\colon T_xM \to M$ che *non* è Fredholm di indice zero. Precisamente, egli ha fornito alcuni esempi in cui $d(\exp_x)_v$ è iniettivo ma non surgettivo, surgettivo ma non iniettivo, e persino esempi in cui l'immagine del differenziale $d(\exp_x)_v$ è un sottospazio denso del codominio $T_{\sigma_v(1)}M$ (σ_v essendo l'unica geodetica in M uscente da x nella direzione determinata da v).

D'altra parte, come dimostrato dal seguente teorema, si prova che sotto opportune ipotesi sul tensore di curvatura, la mappa esponenziale associata alla connessione di Levi-Civita di una varietà Riemanniana è sempre Fredholm di indice zero.

Teorema E.21. *Sia (M,g) una varietà Riemanniana completa modellata su uno spazio di Hilbert H. Indicata con ∇ la connessione di Levi-Civita della varietà M, supponiamo che per ogni $p \in M$ e per ogni $w \in T_pM$ l'endomorfismo di T_pM definito da $v \mapsto R_{vw}w = \nabla_v\nabla_w w - \nabla_w\nabla_v w - \nabla_{[v,w]}w$ sia compatto. Allora la mappa esponenziale in p, $\exp_p\colon T_pM \to M$, è una mappa di Fredholm non lineare di indice zero.*

Dimostrazione. Sia $v \in T_pM$ e σ_v l'unica geodetica in M uscente da p nella direzione determinata da v. Dimostriamo che la mappa lineare

$$d(\exp_p)_v\colon T_v(T_pM) \to T_{\sigma_v(1)}M, \tag{E.1.1}$$

è un operatore lineare continuo Fredholm di indice zero (si noti che, essendo $T_pM \cong H$ uno spazio vettoriale, possiamo identificare canonicamente $T_v(T_pM)$ con T_pM).

Per ogni $p \in M$, $d(\exp_p)_O = \mathrm{id}$, dunque, in particolare, per il teorema della funzione inversa la mappa esponenziale in p è un diffeomorfismo locale in un intorno dell'origine in T_pM, esistono cioè intorni U di O in T_pM e V di p in M tali che $\exp_p|_U \colon U \to V$ sia un diffeomorfismo.

Il differenziale (E.1.1) di $\exp_p$ in un generico punto v di T_pM può essere calcolato usando l'equazione di Jacobi come segue. Indicata con $\sigma_v(t) = \exp_p(tv)$ l'unica geodetica uscente da p nella direzione v, per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ e ogni $w \in T_pM$ risulta

$$d(\exp_p)_{tv}(tw) = J(t), \tag{E.1.2}$$

in cui $J \in \mathcal{T}(\sigma)$ è l'unica soluzione del seguente problema ai valori iniziali per l'equazione di Jacobi:

$$\begin{cases} D^2J + R_{J\dot\sigma}\dot\sigma = O \\ D_0J = w \\ J(0) = O. \end{cases} \tag{E.1.3}$$

Indichiamo con $\tilde\sigma_t \colon T_{\sigma(0)}M \to T_{\sigma(t)}M$ il trasporto parallelo lungo σ determinato da ∇ da $p = \sigma(0)$ a $\sigma(t)$. Ricordiamo che il trasporto parallelo relativo alla connessione di Levi-Civita è un'isomorfismo lineare isometrico, inoltre, siccome $\tilde\sigma_t$ e $\nabla_{\dot\sigma}$ commutano, possiamo riscrivere (E.1.3) come un problema ai valori iniziali su $T_pM \cong H$:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}u(t) + A(t)u(t) = O \\ \frac{du}{dt}(0) = w \\ u(0) = O, \end{cases} \tag{E.1.4}$$

in cui $J(t) = \tilde\sigma_t \circ u(t)$ e $A(t) := \tilde\sigma_t^{-1} \circ R_{\dot\sigma} \circ \tilde\sigma_t = \tilde\sigma_t^{-1} \circ R_{\tilde\sigma_t\dot\sigma}\dot\sigma$. Precisamente, da (E.1.3) si deduce (E.1.4) in quanto:

- $\tilde\sigma_t^{-1}\big(D^2J\big) = \tilde\sigma_t^{-1}\big(\nabla_{\dot\sigma}\nabla_{\dot\sigma}\tilde\sigma_t \circ u\big) = \nabla_{\dot\sigma}\nabla_{\dot\sigma}\big(\tilde\sigma_t^{-1} \circ \tilde\sigma_t \circ u\big) = \frac{d^2u}{dt^2}$;
-
$$\begin{aligned} \tilde\sigma_t^{-1}\big(R_{J\dot\sigma}\dot\sigma\big) &= \tilde\sigma_t^{-1}\big(\nabla_{\tilde\sigma_t \circ u}\nabla_{\dot\sigma}\dot\sigma - \nabla_{\dot\sigma}\nabla_{\tilde\sigma_t \circ u}\dot\sigma - \nabla_{[\tilde\sigma_t \circ u, \dot\sigma]}\dot\sigma\big) = \\ &= \tilde\sigma_t^{-1}\big(\nabla_{\tilde\sigma_t}\nabla_{\dot\sigma}\dot\sigma - \nabla_{\dot\sigma}\nabla_{\tilde\sigma_t}\dot\sigma - \nabla_{[\tilde\sigma_t, \dot\sigma]}\dot\sigma\big) \circ u = \tilde\sigma_t^{-1} \circ R_{\tilde\sigma_t\dot\sigma}\dot\sigma \circ u; \end{aligned}$$
- $\tilde\sigma_t^{-1}\big(D^2J + R_{J\dot\sigma}\dot\sigma\big) = \tilde\sigma_t^{-1}\big(D^2J\big) + \tilde\sigma_t^{-1}\big(R_{J\dot\sigma}\dot\sigma\big) = \tilde\sigma_t^{-1}(O) = O$;
- $\tilde\sigma_0^{-1}\big(D_0J\big) = D_0(u) = \frac{du}{dt}(0) = \tilde\sigma_0^{-1}(w) = w$.

Poiché un operatore lineare compatto è limitato (per ipotesi, per ogni t, $R_{\cdot\,\dot\sigma(t)}\dot\sigma(t)$ è compatto), si ha che, per ogni t, l'operatore lineare $A(t)$ è continuo; inoltre, la dipendenza $t \mapsto A(t)$ è di classe C^∞, quindi dal teorema standard di esistenza ed unicità della soluzione per le equazioni differenziali lineari negli spazi di Hilbert segue che il problema di Cauchy E.1.4 è globalmente ben posto e l'operatore di evoluzione $U(t) \colon H \to H$ che assegna ad ogni $w \in H$ l'unica soluzione $U(t)(w) = u(t)$ è limitato nella norma di H.

Riscriviamo l'equazione differenziale del sistema E.1.4 come un'equazione integrale, precisamente:

$$u(t) = tw - \int_0^t \int_0^s A(r)u(r)\,drds = tw - \int_0^t \int_0^s A(r)U(r)(w)\,drds. \tag{E.1.5}$$

Sia (w_n) una successione limitata in H. Siccome la composizione di un operatore limitato con un operatore compatto dà luogo ad un operatore compatto, la successione $y_n(r) := A(r)\big(U(r)(w_n)\big)$ ammette, per ogni r, una sottosuccessione convergente in H: sia essa $\big(y_{n_k}(r)\big)$. Chiaramente, $y_{n_k}(r)$ dipende in modo continuo da r. Posto

$$u_{n_k} := \int_0^1 \int_0^s y_{n_k}(r)\,drds,$$

osserviamo che

$$\|u_{n_k} - u_{n_l}\|_H \leq \int_0^1 \int_0^s \|y_{n_k}(r) - y_{n_l}(r)\|_H \, drds \leq \sup_{r\in[0,1]} \|y_{n_k}(r) - y_{n_l}(r)\|_H \xrightarrow[n_k,n_l\to\infty]{} 0.$$

Segue che la successione (u_{n_k}) è di Cauchy e perciò è convergente in H. Ciò implica che l'operatore definito dall'integrale nell'equazione E.1.5 è compatto e conseguentemente,

$$\tilde{\sigma}_1^{-1} \circ d(\exp_p)_v = U(1) = \mathrm{id} + K,$$

in cui $K\colon H \to H$ è un operatore compatto. Siccome $\tilde{\sigma}_t$ è un isomorfismo, segue che $d(\exp_p)_v$ è un operatore di Fredholm di indice zero.

□

Appendice F

Spray

F.1 Campi di vettori

Sia M una varietà di classe C^∞ modellata su uno spazio di Banach E e $\pi\colon TM \to M$ il suo fibrato tangente. Ricordiamo che un campo di vettori (indipendente dal tempo) su M è una sezione del fibrato tangente, i.e. un morfismo

$$\xi\colon M \to TM$$

tale che $\xi(x)$ appartiene allo spazio tangente T_xM per ogni x in M, o, ciò che è lo stesso, tale che $\pi \circ \xi = \mathrm{id}_M$. Se TM è banale, è isomorfo cioè al fibrato prodotto $M \times E$, allora un campo di vettori $\xi\colon M \to TM$ è completamente determinato dalla sua proiezione sul secondo fattore. In una tale rappresentazione prodotto, la proiezione di ξ sul secondo fattore sarà detta la *rappresentazione locale* di ξ. Essa è una mappa

$$f\colon M \to E$$

e $\xi(x) = \big(x, f(x)\big)$. Diremo anche che ξ è rappresentato localmente da f se lavoreremo su un sottoinsieme aperto U di M sopra il quale il fibrato tangente ammetta una banalizzazione.

Sia J un intervallo aperto di $\mathbb{R}$. Il fibrato tangente di J è $J \times \mathbb{R}$. Abbiamo una sezione canonica $\iota\colon J \to J \times \mathbb{R}$ tale che $\iota(t) = 1$ per ogni t in J. Sia $\alpha\colon J \to M$ una curva di classe C^1. A partire da una assegnata curva α, possiamo sempre ottenere una mappa indotta sui fibrati tangenti:

$$\begin{tikzcd} J \times \mathbb{R} \arrow[r, "d\alpha"] & TM \arrow[d, "\pi"] \\ J \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "\alpha'"] \arrow[r, "\alpha"'] & M \end{tikzcd} \tag{F.1.1}$$

Denoteremo il prodotto di composizione $d\alpha \circ \iota$ con α'. La curva $\alpha'\colon J \to TM$ sarà detta il *sollevamento canonico* di α. In particolare, se α è di classe C^p allora α' è una curva in TM di classe C^{p-1}.

F.2 Campi di vettori del second'ordine

Sia $\alpha\colon J \to M$ una curva di classe C^∞. Un *sollevamento* di α in TM è una curva $\beta\colon J \to TM$ tale che $\pi \circ \beta = \alpha$. Tali sollevamenti esistono sempre, basti pensare per esempio alla curva α' (il sollevamento canonico di α) discussa nella precedente sezione (cfr. diagramma F.1.1).

Definizione F.1 (Campo vettoriale del second'ordine). Un *campo vettoriale del second'ordine* su M è un campo vettoriale F sul fibrato tangente TM, $F\colon TM \to T(TM)$ tale che, indicata con $\pi\colon TM \to M$ la proiezione di TM su M, risulta $d\pi \circ F = \mathrm{id}_{TM}$, i.e.

$$(\forall\, v \in TM) \qquad d\pi \circ F(v) = v. \tag{F.2.1}$$

Si osservi che la composizione ha senso, infatti $d\pi\colon T(TM) \to TM$ applica il doppio fibrato tangente $T(TM)$ nel fibrato tangente TM, come esplicato dal seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} T(TM) \arrow[r, equal] & T(TM) \arrow[d, "d\pi"] \\ TM \arrow[u, "F"] & TM \end{tikzcd}$$

Definizione F.2. Dato un campo di vettori del second'ordine F, una *curva integrale* per F con condizione iniziale v è una curva $\beta\colon J \to TM$ che applica un intervallo aperto J di $\mathbb{R}$ (contenente 0) in TM, tale che $\beta(0) = v$ e $\beta'(t) = F\big(\beta(t)\big)$ per ogni t in J.

Proposizione F.3. *Un campo di vettori $F\colon M \to TM$ è un campo di vettori del second'ordine su M se e solo se esso ogni curva integrale β di F coincide col sollevamento canonico $(\pi\beta)'$ della proiezione canonica $\pi\beta$ di β su M, i.e. $(\pi\beta)' = \beta$.*

Dimostrazione. La prova è una conseguenza immediata delle definizioni, infatti, presa comunque una curva integrale β di F, si ha che

$$(\pi\beta)' = d\pi \circ \beta' = d\pi \circ F \circ \beta = (d\pi \circ F) \circ \beta = \beta \iff d\pi \circ F = \mathrm{id}.$$

□

Definizione F.4 (Geodetica). Sia $\alpha\colon J \to M$ una curva in M, definita su un intervallo $J \subset \mathbb{R}$. Diremo che α è una *geodetica* rispetto a F se la curva $\alpha'\colon J \to TM$ è una curva integrale per F.

Osservazione F.5. Poiché $\pi\alpha' = \alpha$, possiamo esprimere equivalentemente la condizione di geodetica richiedendo che α soddisfi la relazione $\alpha'' = F(\alpha')$. Questa relazione per la curva α è detta un'*equazione differenziale del second'ordine per α determinata da F*.

Si osservi inoltre che se $\beta\colon M \to TM$ è una curva integrale per F, allora $\pi\beta$ è una geodetica per il campo vettoriale del second'ordine F.

F.2.1 Rappresentazione locale di un campo del second'ordine

Sia (V, φ) una carta di M e $\varphi(V) = U$ il corrispondente sottoinsieme aperto dello spazio di Banach E, quindi $TU = U \times E$ e $T(TU) = TU \times TE = (U \times E) \times (E \times E)$. Allora la rappresentazione di $\pi\colon TM \to M$ nella carta data è semplicemente la proiezione $\pi\colon U \times E \to U$. Abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} (U \times E) \times (E \times E) \arrow[r, "d\pi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & U \times E \arrow[d] \\ U \times E \arrow[r, "\pi"'] & U \end{tikzcd}$$

La mappa $d\pi$ è data da

$$d\pi(x, v, u, w) = (x, u). \tag{F.2.2}$$

Ogni campo vettoriale su $U \times E$ ha una rappresentazione locale

$$f\colon U \times E \to E \times E$$

che ha perciò due componenti, $f = (f_1, f_2)$, in cui $f_1, f_2\colon U \times E \to E$. La prossima proposizione fornisce una descrizione dei campi vettoriali del second'ordine in una carta assegnata.

Proposizione F.6. *Siano U un aperto dello spazio di Banach E, e $TU = U \times E$ il fibrato tangente sopra U. Una mappa*

$$f\colon U \times E \to E \times E$$

è la rappresentazione locale di un campo vettoriale del secondo ordine su U sse $f(x,v) = \big(v, f_2(x,v)\big)$, i.e.

$$\big(\forall\, (x,v) \in U \times E\big) \qquad f_1(x,v) = v. \tag{F.2.3}$$

Dimostrazione. Se f è la rappresentazione locale di un campo vettoriale del secondo ordine allora per la condizione F.2.1

$$\begin{aligned}\big(\forall\, (x,v) \in U \times E\big) \qquad d\pi \circ \big(x, v, f(x,v)\big) = d\pi\big(x, v, f_1(x,v), f_2(x,v)\big) &\overset{(F.2.2)}{=} \big(x, f_1(x,v)\big) \\ &\overset{(F.2.1)}{=} (x,v).\end{aligned} \tag{F.2.4}$$

Viceversa, se $\big(\forall\, (x,v) \in U \times E\big)$ $f_1(x,v) = v$ allora, in virtù della forma locale (F.2.2) di $d\pi$, l'equazione F.2.4 precedente ci dice che la condizione F.2.1 che caratterizza i campi vettoriali del secondo ordine è soddisfatta, quindi f è la rappresentazione locale di un campo vettoriale del second'ordine. □

Nel seguito studieremo un tipo speciale di campi vettoriali del secondo ordine: gli spray.

F.3 Spray

Sia r un numero reale, e $\pi\colon X \to M$ un fibrato vettoriale modellato su E. Se v appartiene a X, dunque appartiene a X_p per qualche p in M, poiché X_p è uno spazio vettoriale, rv è nuovamente in X_p. Denoteremo con $r_X\colon X \to X$ la mappa data da questa moltiplicazione scalare; r_X è invero un morfismo di fibrati, e persino un isomorfismo di fibrati se $r \neq 0$. Inoltre $d(r_X)\colon TX \to TX$.

In particolare, quando $X = TM$ è il fibrato tangente alla varietà M abbiamo

$$\begin{aligned} r_{TM}&\colon TM \to TM \\ r_{TTM}&\colon T(TM) \to T(TM) \\ d\big(r_{TM}\big)&\colon T(TM) \to T(TM). \end{aligned}$$

Dunque sono definite le composizioni $d(r_{TM}) \circ r_{TTM}$ e $r_{TTM} \circ d(r_{TM})$, inoltre vale l'uguaglianza

$$d(r_{TM}) \circ r_{TTM} = r_{TTM} \circ d\big(r_{TM}\big). \tag{F.3.1}$$

In particolare, la relazione (F.3.1) segue dalla linearità di r_{TM} su ciascuna fibra, e può essere dedotta direttamente dalla rappresentazione in carte locali fornita nella sottosezione F.3.1.

Definizione F.7 (Spray). Uno *spray* su M è un campo vettoriale del second'ordine

$$S\colon TM \to T(TM)$$

che soddisfa la seguente condizione quadratica omogenea:

SPR 1. *Per ogni r in $\mathbb{R}$ e v in TM,* $\quad S(rv) = \big[d(r_{TM})\big]\big(rS(v)\big)$.

$$\begin{tikzcd} T(TM) \arrow[r, "d(r_{TM})"] & T(TM) \\ TM \arrow[u, "rS"] \arrow[ur, "S(r\cdot)"'] & \end{tikzcd}$$

È immediato verificare dalla condizione che definisce gli spray (campi vettoriali del second'ordine che soddisfano la condizione **SPR 1**) che gli spray costituiscono un insieme convesso. Quindi, se siamo in grado di esibire gli spray su sottoinsiemi aperti di uno spazio di Banach allora possiamo incollarli insieme per mezzo di una partizione dell'unità, e ottenere così il seguente teorema di esistenza globale:

Teorema F.8. *Sia M una varietà modellata su uno spazio di Banach E. Se M ammette partizioni dell'unità, allora esiste uno spray su M.*

F.3.1 Rappresentazione locale di uno spray

Sia (V, φ) una carta di M e $\varphi(V) = U$ il corrispondente sottoinsieme aperto del modello di Banach E. In particolare $TU = U \times E$ e

$$T(TU) = TU \times TE = (U \times E) \times (E \times E).$$

Le rappresentazioni di r_{TU}, r_{TTU} e di $d(r_{TU})$ nelle carte rispettive sono date dalle mappe

$$r_{TU} \colon (x, v) \mapsto (x, rv) \qquad d\big(r_{TU}\big) \colon (x, v, u, w) \mapsto (x, rv, u, rw)$$
$$r_{TTU} \colon (x, v, u, w) \mapsto (x, v, ru, rw).$$

Così

$$r_{TTU} \circ d\big(r_{TU}\big) \colon (x, v, u, w) \mapsto r_{TTU}(x, rv, u, rw) = (x, rv, ru, r^2 w).$$

Diamo ora la condizione locale affinché un campo di vettori del second'ordine S sia uno spray.

Proposizione F.9. *In una carta $U \times E$ per TM, sia S rappresentato da $s \colon U \times E \to E \times E$. Allora s rappresenta uno spray se e solo se*

$$(\forall\, r \in \mathbb{R}) \qquad s_2(x, rv) = r^2 s_2(x, v).$$

Dimostrazione. Supponiamo che s rappresenti uno spray, allora

$$\begin{aligned}\big(x, rv, s(x, rv)\big) &= \big(x, rv, s_1(x, rv), s_2(x, rv)\big) \overset{\text{(i)}}{=} \big[d(r_{TU})\big]\big(x, v, rs_1(x, v), rs_2(x, v)\big) \overset{\text{(ii)}}{=} \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} \big[d(r_{TU})\big]\big(r_{TTU}\big(x, v, s_1(x, v), s_2(x, v)\big)\big) \overset{\text{(iii)}}{=} r_{TTU} \circ d(r_{TU})\big(x, v, s_1(x, v), s_2(x, v)\big) \overset{\text{(iv)}}{=} \\ &\overset{\text{(iv)}}{=} r_{TTU}\big(x, rv, s_1(x, v), rs_2(x, v)\big) \overset{\text{(v)}}{=} \big(x, rv, rs_1(x, v), r^2 s_2(x, v)\big).\end{aligned} \tag{F.3.2}$$

Giustifichiamo brevemente i passaggi:

(i) s rappresenta lo spray S, quindi $S(rv) = \big[d(r_{TM})\big]\big(rS(v)\big)$;

(ii) $(x, v, ru, rw) = r_{TTU}(x, v, u, w)$;

(iii) in virtù dell'equazione F.3.1, $d(r_{TU}) \circ r_{TTU} = r_{TTU} \circ d(r_{TU})$;

(iv) $d(r_{TU})(x, v, u, w) = (x, rv, u, rw)$;

(v) $r_{TTU}(x, v, u, w) = (x, v, ru, rw)$.

Dunque, in particolare, da (F.3.2) si ottiene $s_2(x, rv) = r^2 s_2(x, v)$.

Viceversa, se $s_2(x, rv) = r^2 s_2(x, v)$ allora

$$\begin{aligned}\big[d(r_{TU})\big]\big(x, v, rs(x, v)\big) &= \big[d(r_{TU})\big]\big(x, v, rs_1(x, v), rs_2(x, v)\big) \\ &= \big[d(r_{TU})\big]\big(r_{TTU}\big(x, v, s_1(x, v), s_2(x, v)\big)\big) \\ &= r_{TTU} \circ d(r_{TU})\big(x, v, s_1(x, v), s_2(x, v)\big) \\ &= \big(x, rv, rs_1(x, v), r^2 s_2(x, v)\big) \\ &\overset{\downarrow}{=} \big(x, rv, rs_1(x, v), s_2(x, rv)\big) \\ &= \big(x, rv, s_1(x, rv), s_2(x, rv)\big) = \big(x, rv, s(x, rv)\big),\end{aligned} \tag{F.3.3}$$

in cui la penultima eguaglianza segue dal fatto che, in particolare, s è la rappresentazione locale di un campo vettoriale del second'ordine, quindi per la F.2.3 è $rs_1(x,v) = rv = s_1(x,rv)$. Dunque per la F.3.3 $\big[d(r_{TU})\big]\big(x,v,rs(x,v)\big) = \big(x,rv,s(x,rv)\big)$, i.e. s soddisfa la proprietà **SPR 1** di spray. $\square$

Dunque s rappresenta uno spray se e solo se la sua parte principale è omogenea di grado due rispetto alla seconda variabile, i.e. per ogni r in $\mathbb{R}$, $s_2(x,rv) = r^2 s_2(x,v)$, se e solo se –e questo è un fatto di algebra lineare elementare– indicato con D_2^2 l'operatore di derivata seconda rispetto alla seconda variabile,

$$s_2(x,v) = \frac{1}{2}\big(D_2^2 s_2\big)_{(x,0)}(v,v).$$

Segue che, in una carta, uno spray –o meglio la sua parte principale– è indotta da una applicazione bilineare simmetrica che diremo *associata allo spray*, data in ogni punto da

$$\Gamma(x) = -\frac{1}{2}\big(D_2^2 s_2\big)_{(x,0)}.$$

Γ è detto anche il *simbolo di Christoffel dello spray* nella carta assegnata. Posto

$$\Gamma(x;v,v) = \Gamma(x)(v,v),$$

risulta chiaramente

$$\Gamma(x;v,w) = \frac{1}{2}\big[s_2(x,v) + s_2(x,w) - s_2(x,v+w)\big]. \tag{F.3.4}$$

F.3.2 Formula di cambiamento di variabile per gli spray

Scopo di questa sottosezione è studiare come varia la parte principale di uno generico spray su TM quando muta l'intorno coordinato. Se U è un sottoinsieme aperto di uno spazio di Banach E, indichiamo come consueto la rappresentazione locale di uno spray S su TU con

$$s_U = \big(s_{U,1}, s_{U,2}\big)\colon (x,v) \in U \times E \mapsto \big(s_{U,1}(x,v), s_{U,2}(x,v)\big) = \big(v, s_{U,2}(x,v)\big) \in E \times E.$$

Sia V un sottoinsieme aperto di E e $h\colon U \to V$ un diffeomorfismo di U su V. Nel nuovo sistema di coordinate determinato da h, sia $s_V\colon V \times E \to E \times E$ la rappresentazione locale dello spray S.

Nel seguito, per comodità di notazione, converrà denotare l'operatore di differenziazione con la notazione T – l'operatore tangenziale – anziché con "d", mettendo così in risalto il suo carattere funtoriale.
Su TU, il tangenziale di h, $Th\colon U \times E \to V \times E$, è rappresentato da $Th(x,v) = \big(h(x), h'(x)(v)\big)$. Consideriamo dunque l'ulteriore sollevamento al doppio fibrato tangente TTU, e la corrispondente mappa

$$TTh\colon (U \times E) \times (E \times E) \to (V \times E) \times (E \times E)$$

data da

$$TTh\big((x,v),(u,w)\big) = \big(Th(x,v), (Th)'(x,v)(u,w)\big). \tag{F.3.5}$$

Schematicamente la situazione è rappresentata dal seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
(U\times E)\times(E\times E) \arrow[r, "TTh=(Th,(Th)')"] \arrow[d, "\pi_{U\times E}"'] & (V\times E)\times(E\times E) \arrow[d, "\pi_{V\times E}"'] \\
U\times E \arrow[r, "Th=(h,h')"] \arrow[u, bend right, "s_U"'] \arrow[d, "\pi_U"'] & V\times E \arrow[u, bend right, "s_V"'] \arrow[d, "\pi_V"'] \\
U \arrow[r, "h"] & V
\end{tikzcd}$$

Calcoliamo $(Th)'(x,v)$:

$$(Th)'(x,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h(x)}{\partial x} & \frac{\partial h(x)}{\partial v} \\ \frac{\partial h'(x)(v)}{\partial x} & \frac{\partial h'(x)(v)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h'(x) & 0 \\ h''(x)(v) & h'(x) \end{pmatrix}$$

e quindi $$(Th)'(x,v)(u,w) = \begin{pmatrix} h'(x) & 0 \\ h''(x)(v) & h'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \big(h'(x)(u), h''(x)(v,u) + h'(x)(w)\big),$$

per cui, in definitiva, sostituendo in (F.3.5) si ottiene

$$TTh\big((x,v),(u,w)\big) = \big(h(x), h'(x)(v), h'(x)(u), h''(x)(v,u) + h'(x)(w)\big). \tag{F.3.6}$$

Le rappresentazioni locali s_U e s_V dello spray sono legate dalla formula F.3.7 seguente (si consideri il seguente circuito commutativo dedotto dal diagramma precedente)

$$\begin{tikzcd} (U \times E) \times (E \times E) \arrow[r, "(Th)'"] & E \times E \\ U \times E \arrow[u, "\mathrm{Id}_{U\times E} \times s_U"] \arrow[r, "Th=(h,h')"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & V \times E \arrow[u, "s_V"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} s_V\big(Th(x,v)\big) = s_V\big(h(x), h'(x)(v)\big) &= \big(h'(x)(v), s_{V,2}\big(h(x), h'(x)(v)\big)\big) \\ &= (Th)'\big(x, v; s_U(x,v)\big) = (Th)'\big(x, v; v, s_{U,2}(x,v)\big) \\ &= \big(h'(x)(v), h''(x)(v,v) + h'(x) \circ s_{U,2}(x,v)\big), \end{aligned} \tag{F.3.7}$$

da cui si deduce la formula di cambiamento di variabile per la parte quadratica di uno spray:

$$\boxed{s_{V,2}\big(h(x), h'(x)(v)\big) = h''(x)(v,v) + h'(x) \circ s_{U,2}(x,v)} \tag{F.3.8}$$

In particolare, dalla formula F.3.8 di cambiamento di variabile per la parte principale di uno spray, si ottiene la corrispondente legge di trasformazione per il simbolo di Christoffel:

$$\Gamma_V\big(h(x); h'(x)(v), h'(x)(w)\big) = -h''(x)(v,w) + h'(x)\,\Gamma_U(x; v, w).$$

Si noti che Γ *non* trasforma come un tensore.

Alcune proprietà più fini riguardanti gli spray sono state introdotte nella sottosezione 2.1.3.

F.4 La mappa esponenziale di uno spray

La condizione **SPR 1** che abbiamo considerato per definire uno spray è equivalente ad altre riguardanti le curve integrali dei campi vettoriali del second'ordine F. Elencheremo nel seguito queste condizioni.

Se v è un vettore in TM, denoteremo con σ_v l'unica curva integrale di F con condizione iniziale v (i.e. tale che $\sigma_v(0) = v$):

$$\begin{cases} F(\sigma_v) = \sigma_v' \\ \sigma_v(0) = v. \end{cases}$$

Proposizione F.10. Per ogni v in TM la condizione espressa da **SPR 1** è equivalente ad una qualunque delle seguenti:

SPR 2. La curva σ_{rv} è definita in t se e solo se rt appartiene al dominio di σ_v ed in tal caso

$$\sigma_{rv}(t) = r\sigma_v(rt).$$

SPR 3. Se r e t sono numeri, rt appartiene al dominio di σ_v se e solo se r appartiene al dominio di σ_{tv}, ed in tal caso
$$\pi\sigma_{tv}(r) = \pi\sigma_v(rt).$$

SPR 4. Un numero t appartiene al dominio di σ_v se e solo se 1 appartiene al dominio di σ_{tv}, ed in tal caso
$$\pi\sigma_v(t) = \pi\sigma_{tv}(1).$$

Considereremo nel seguito ulteriori proprietà delle curve integrali di uno spray. Sia
$$S\colon TM \to T(TM)$$
uno spray su M. Sia $\mathcal{E}$ l'insieme dei vettori v in TM tali che σ_v è definita in un intervallo contenente $[0, 1]$. Allora $\mathcal{E}$ è un sottoinsieme aperto di TM, inoltre la mappa
$$v \mapsto \sigma_v(1)$$
è un morfismo di $\mathcal{E} \subset TM$ in TM.

Definizione F.11 (Mappa esponenziale di uno spray). La mappa esponenziale $\exp\colon \mathcal{E} \to M$ è il morfismo definito da
$$\exp(v) = \pi\sigma_v(1).$$
L'insieme $\mathcal{E}$ è detto il dominio della mappa esponenziale (associata allo spray S).

Se x è un punto della varietà M, indicato con O_x il vettore nullo di T_xM, da **SPR 1**, posto $r = 0$ si ottiene $F(O_x) = 0$. Quindi
$$\exp(O_x) = \pi\big(\sigma_{O_x}(1)\big) = \pi(O_x) = x.$$
Denoteremo con $\exp_x$ la restrizione di exp a $\mathcal{E}_x := \mathcal{E} \cap T_xM$.

Appendice G

Analisi funzionale lineare

G.1 Richiami di analisi lineare negli spazi di Banach

Se E ed F sono spazi normati, indicheremo con $\mathcal{L}(E,F)$ lo spazio degli operatori lineari e continui da E a F, equivalentemente lo spazio degli operatori di E in F per cui esista una costante C tale che per ogni x in E, $\|Tx\| \leq C\|x\|$, ossia, in altri termini, lo spazio degli operatori limitati sui limitati, comunemente chiamati –con abuso di linguaggio– *operatori limitati.*

Teorema G.1 (della mappa aperta). *Siano E ed F spazi di Banach. Se φ in $\mathcal{L}(E,F)$ è un operatore surgettivo, allora φ è un'applicazione aperta, ossia per ogni aperto A di E l'insieme $\varphi(A)$ è aperto in F.*

Corollario G.2. *Siano E, F spazi di Banach e sia φ in $\mathcal{L}(E,F)$. Se φ è bigettivo, allora φ è un isomorfismo toplineare, ossia $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.*

Dimostrazione. Ovviamente φ^{-1} è lineare; inoltre per il teorema G.1 della mappa aperta φ trasforma aperti in aperti, dunque la controimmagine attraverso φ^{-1} di un aperto è un aperto. Pertanto φ^{-1} è continua e quindi $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$. Notiamo in particolare che si ha

$$(\forall\, x \in E) \qquad \|x\|_E \leq c\,\|\varphi(x)\|_F,$$

ove $c = \|\varphi^{-1}\|_{\mathcal{L}(F,E)}$. □

Corollario G.3. *Siano F, G sottospazi chiusi di E tali che $F + G = E$ e $F \cap G = \{0\}$. Allora la mappa $F \times G \to E$ definita da $(x,y) \mapsto x + y$ è un isomorfismo toplineare.*

Dimostrazione. Essa è continua e bigettiva, dunque la tesi segue applicando il corollario G.2. □

Definizione G.4. Nelle ipotesi del corollario G.3 diremo che E è la *somma diretta* di F e G e scriveremo $E = F \oplus G$. Diremo che un sottospazio chiuso F di uno spazio di Banach E è *complementato* se esiste un sottospazio chiuso $G \subset E$ tale che $E = F \oplus G$. In tal caso diremo anche che F e G sono sottospazi *complementari*. Chiaramente, in generale, la scelta di G non è unica. In particolare (cfr. teorema G.18) se E è uno spazio di Hilbert e F è un sottospazio chiuso, allora $E = F \oplus F^\perp$. Dunque ogni sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert è complementato.

Sia E uno spazio di Banach e F un sottospazio chiuso. Definiamo una norma sullo spazio quoziente E/F ponendo

$$\|x + F\| = \inf_{y \in F} \|x + y\|. \tag{G.1.1}$$

Lo spazio E/F munito della norma G.1.1 è uno spazio completo. Si osservi che se F *non* è chiuso allora G.1.1 *non* definisce una norma su E/F, infatti uno spazio normato è uno spazio metrico, dunque di Hausdorff: se F non è chiuso in E allora la topologia quoziente su E/F non è di Hausdorff.

Siano E, G spazi di Banach e φ in $\mathcal{L}(E,G)$. Allora chiaramente l'immagine $\varphi(E)$ di E mediante φ è un sottospazio di G, non necessariamente chiuso. Sia F il nucleo di φ. Dunque abbiamo l'usuale mappa lineare $E/F \to G$ indotta da φ, specificatamente, la mappa definita da

$$x + F \mapsto \varphi(x) = \varphi(x + F).$$

Si tratta di una mappa continua, infatti esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni x in E risulta

$$\|\varphi(x)\| \leq C\|x + F\|.$$

Siccome $\varphi(x) = \varphi(x + y)$ per ogni y in F, segue che

$$(\forall\, y \in F) \qquad \|\varphi(x + y)\| \leq C\|x + F\|,$$

da cui la continuità di $E/F \to G$. Dunque, per il corollario G.2, se φ è surgettiva allora la mappa $E/F \to G$ è un isomorfismo toplineare.

Sia E uno spazio vettoriale ed F un sottospazio. La *codimensione* di F in E è, per definizione, la dimensione di E/F.

Corollario G.5. *Sia E uno spazio di Banach ed F un sottospazio chiuso di dimensione o codimensione finita. Allora F ammette un sottospazio complementare chiuso.*

Dimostrazione. Se F ha dimensione finita, il corollario è una conseguenza ovvia del teorema di Hahn-Banach. Assumiamo dunque che F abbia codimensione finita, e sia $\{y_1, \ldots, y_n\}$ una base di E/F. Siano $x_1, \ldots, x_n$ gli elementi di E applicati in $y_1, \ldots, y_n$ rispettivamente dall'applicazione naturale $E \to E/F$. Indicato con G il sottospazio generato da $x_1, \ldots, x_n$, G è di dimensione finita, dunque è chiuso, e $F \cap G = \{0\}$ mentre $F + G = E$. Possiamo quindi applicare il corollario G.3 e concludere la prova anche in questo caso. $\square$

Proposizione G.6. *Se F è un sottospazio chiuso di E di codimensione finita e G è un sottospazio di E tale che $F \subset G \subset E$, allora G è chiuso.*

Dimostrazione. L'immagine di G nello spazio quoziente E/F è contenuta in uno spazio vettoriale di dimensione finita, dunque è chiusa. Ne discende che G è esso stesso un sottospazio chiuso. $\square$

Corollario G.7. *Siano E, G spazi di Banach. Sia φ in $\mathcal{L}(E,G)$ tale che l'immagine $\varphi(E) \subset G$ sia di codimensione finita. Allora $\varphi(E)$ è chiusa.*

Dimostrazione. Come nel corollario G.5, possiamo trovare un sottospazio di dimensione finita F di G tale che $G = \varphi(E) + F$. Sicuramente quest'ultima è una somma diretta algebrica, non ancora topologica. Fattorizzando il nucleo di φ, possiamo assumere senza ledere la generalità che φ sia iniettivo. Componiamo φ con la mappa naturale $G \to G/F$. Allora la composizione

$$E \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} G/F$$

è una mappa lineare bigettiva e continua di E su G/F, quindi è un isomorfismo toplineare in virtù del corollario G.2. Segue che la mappa inversa $(\psi \circ \varphi)^{-1}$ è continua, dunque è continua la mappa

$$\varphi \circ (\psi \circ \varphi)^{-1}$$

che applica G/F su $\varphi(E)$. Quindi $\varphi(E)$ è toplinear isomorfo a G/F. Poiché G/F è completo, segue che $\varphi(E)$ è completo, e quindi $\varphi(E)$ è chiuso in G, come volevasi dimostrare. $\square$

Definizione G.8. Sia X uno spazio normato. Diremo che una successione (x_n) di X converge debolmente a x in X se

$$\big(\forall\, \phi \in X^*\big) \qquad \phi(x_n) \to \phi(x).$$

In tal caso scriveremo $x_n \rightharpoonup x$.

Proposizione G.9.

$$x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow \|x\| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$

Dimostrazione. Ricordiamo che il limite inferiore di una successione (s_n) di numeri reali,

$$\liminf_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} s_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} s_n,$$

è il minimo limite di tutte le sottosuccessioni convergenti di (s_n). Sia dunque (x_{n_i}) una sottosuccessione di (x_n) tale che

$$\|x_{n_i}\| \xrightarrow[i\to+\infty]{} \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$

In particolare, per ogni $\varepsilon > 0$, i termini della successione (x_{n_i}) appartengono definitivamente alla palla chiusa centrata in 0 ed avente raggio $\varepsilon + \liminf \|x_n\|$. Siccome la palla chiusa è anche debolmente sequenzialmente chiusa (si ricordi che, come conseguenza del teorema di Mazur, ogni insieme convesso chiuso è anche debolmente sequenzialmente chiuso), e siccome (x_{n_i}) converge a x debolmente, abbiamo che x appartiene alla palla, i.e.

$$\|x\| \leq \varepsilon + \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$

Per l'arbitrarietà con cui si è scelto $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ si conclude che

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$

□

Definizione G.10 (Base di Schauder). Sia V uno spazio vettoriale topologico di dimensione infinita, i.e., uno spazio vettoriale reale di dimensione infinita con una topologia di Hausdorff in cui l'addizione vettoriale e la moltiplicazione scalare siano congiuntamente continue.

Una *base di Schauder* per V è una successione $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ di elementi di V tale che per ogni v in V esiste un'unica successione di scalari (a_i) per cui $v = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i\, x_i$ (la convergenza essendo rispetto alla topologia di V) tale che, per ogni i, la funzione f_i definita da $f_i(v) = a_i$ è continua.

Definizione G.11. Sia E uno spazio di Banach di dimensione infinita dotato di una base di Schauder $\mathcal{B} = (e_i)_{i\geq 1}$. Diremo che $\mathcal{B}$ è *monotona* se, per ogni x in E, la mappa

$$n \in \mathbb{N}^+ \mapsto \|\pi_n(x)\| \in \mathbb{R}^+$$

è una funzione *non decrescente* di n.

Proposizione G.12 ([Fa 01]). *$\mathcal{B}$ è monotona se e solo se per ogni n in $\mathbb{N}^+$ risulta $\|\pi_n\| \leqslant 1$.*

Proposizione G.13 ([Fa 01]). *Sia E uno spazio di Banach di dimensione infinita, dotato di una base di Schauder $\mathcal{B} = (e_i)_{i\geq 1}$. Allora E ammette una norma equivalente relativamente alla quale $\mathcal{B}$ è monotona.*

Proposizione G.14. *Sia E uno spazio di Banach di dimensione infinita dotato di una base di Schauder $\mathcal{B} = (e_i)_{i\geq 1}$ (per esempio si può considerare il caso in cui $E = H$ sia uno spazio di Hilbert di dimensione infinita separabile) e $(z_n)_n$ una successione di punti di E convergente a z_0 in E. Sia $\pi^n \colon E \to E^n$ il proiettore canonico su $E^n := \overline{\operatorname{Span}} \left\{e_{n+j} : j \in \mathbb{N}^+\right\}$. Allora*

$$\pi^n(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Dimostrazione. Risulta $\pi^n \rightrightarrows O$, i.e. $\pi^n(x) \to 0$ per ogni x in H, dunque, in particolare

$$\|\pi^n(z_0)\| \to 0.$$

Siccome per ogni x in E $\lim_n \|\pi^n x\| = 0$, in particolare deve essere $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\pi^n x\| < \infty$ e quindi, per il teorema di Banach-Steinhaus, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\pi^n\| < \infty$, i.e., esiste C in $\mathbb{R}^+$ tale che, per ogni n in $\mathbb{N}$, $\|\pi^n\| \leq C$. Infine

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\pi^n(z_n)\| &= \|\pi^n(z_n - z_0 + z_0)\| = \|\pi^n(z_n - z_0) + \pi^n(z_0)\| \leq \|\pi^n(z_n - z_0)\| + \|\pi^n(z_0)\| \\ &\leq \|\pi^n\| \cdot \|z_n - z_0\| + \|\pi^n(z_0)\| \leq C \cdot \|z_n - z_0\| + \|\pi^n(z_0)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} C \cdot 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

e quindi $\pi^n(z_n) \to 0$.

Nel caso in cui $E = H$ sia uno spazio di Hilbert separabile si arriva alla stessa conclusione senza bisogno di invocare il teorema di Banach-Steinhaus, essendo infatti $\|\pi^n\| = 1$ per ogni n in $\mathbb{N}^+$. □

G.2 Richiami di analisi lineare negli spazi di Hilbert

Proposizione G.15. *Sia $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ uno spazio pre-hilbertiano. Allora $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è una funzione congiuntamente continua nelle due variabili rispetto alla norma indotta, i.e.,*

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad \wedge \quad \|y_n - y\| \to 0 \;\Rightarrow\; \langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle.$$

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza immediata della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. □

Definizione G.16. Un insieme di vettori S in uno spazio con prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è detto un *sistema ortogonale* se $0 \notin S$ e per ogni $x, y \in S$ tali che $x \neq y$ risulta $x \perp y$, i.e. $\langle x, y\rangle = 0$. Un sistema ortogonale S in uno spazio con prodotto scalare è detto *ortonormale* se $\|s\| = 1$ per ogni s in S. Si noti che se S è un sistema ortogonale, allora l'insieme dei vettori $\big\{x/\|x\| : x \in S\big\}$ è automaticamente un sistema ortonormale.

Un sottoinsieme convesso chiuso di uno spazio di Hilbert contiene un unico vettore che realizza la distanza da un vettore assegnato. Precisamente:

Teorema G.17. *Se A è un sottoinsieme convesso chiuso non vuoto di uno spazio di Hilbert H, allora per ogni x in H esiste un unico y in A tale che*

$$d(x, A) = \|x - y\|.$$

Sia H uno spazio con prodotto scalare. Se A è un sottoinsieme non vuoto di H, allora il complemento ortogonale $A^\perp$ di A consiste di tutti i vettori che sono ortogonali ad ogni vettore di A, i.e.,

$$A^\perp := \big\{x \in H \,:\, x \perp y \text{ per ogni } y \in A\big\}.$$

Dalla linearità e dalla continuità del prodotto scalare è chiaro che $A^\perp$ è sempre un sottospazio chiuso di H tale che $A^\perp = (\overline{A})^\perp$ e $A \cap A^\perp = \{0\}$. Inoltre, quando H è uno spazio di Hilbert e A è un sottospazio chiuso, allora A insieme con $A^\perp$ genera l'intero spazio di Hilbert:

Teorema G.18. *Se M è un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert H, allora $H = M \oplus M^\perp$.*

Dimostrazione. Siccome $M \cap M^\perp = \{0\}$, è sufficiente dimostrare che ogni vettore x in H è della forma $x = y + z$, con y in M e z in $M^\perp$. Poiché M è un insieme chiuso e (in quanto spazio vettoriale) convesso, per il teorema G.17 *della minima norma* esiste un unico vettore y in M tale che $d(x, M) = \|x - y\|$. Posto $z = x - y$ si verifica che $z \perp M$. □

In uno spazio di Hilbert i sottospazi densi hanno una interessante caratterizzazione in termini della nozione di ortogonalità.

Corollario G.19. *Un sottospazio vettoriale M di uno spazio di Hilbert è denso se e solo se il vettore nullo è il solo vettore ortogonale ad M, i.e., $M^\perp = \{0\}$.*

Dimostrazione. Sia M un sottospazio vettoriale di uno spazio di Hilbert H e denotiamo con $\overline{M}$ la sua chiusura rispetto alla topologia indotta dalla norma. Assumiamo dapprima che $\overline{M} = H$ e sia $x \perp M$. Si consideri una successione (x_n) di punti di M tale che $x_n \to x$ e si noti che $0 = \langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle$ implica $\langle x, x\rangle = 0$, i.e., $x = 0$.

Viceversa, assumiamo che $M^\perp = \{0\}$. Poiché $(\overline{M})^\perp = M^\perp$, per il teorema G.18

$$\overline{M} = \overline{M} \oplus \{0\} = \overline{M} \oplus (\overline{M})^\perp = H,$$

e quindi M è denso in H. □

Siccome il prodotto scalare è una funzione congiuntamente continua (cfr. proposizione G.15) segue che ogni vettore y in uno spazio pre-hilbertiano H definisce un funzionale lineare continuo $f_y\colon H \to \mathbb{R}$ via la formula $f_y(x) = \langle x, y\rangle$. Se H è uno spazio di Hilbert, allora tutti i funzionali lineari continui su H sono di questa forma.

Teorema G.20 (Riesz). *Se H è uno spazio di Hilbert e $f\colon H \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare continuo, allora esiste uno ed un solo vettore y in H tale che*

$$\big(\forall x \in H\big) \qquad f(x) = \langle x, y\rangle. \tag{G.2.1}$$

Inoltre risulta $\|f\|_{\mathcal{L}(H)} = \|y\|_H$.

Se H è uno spazio di Hilbert, allora il teorema G.20 mostra che è possibile definire una mappa da H su H^*, $y \mapsto f_y := \langle x, y\rangle$. Inoltre, siccome si verifica subito che

$$f_y + f_z = f_{y+z} \qquad \alpha f_y = f_{\alpha y} \qquad \|f_y\| = \|y\|,$$

segue che l'associazione $y \mapsto f_y := \langle x, y\rangle$ è invero una isometria lineare da H su H^* (si ricordi che un operatore lineare $T\colon X \to Y$ tra due spazi normati è detto una *isometria* se, per ogni x in X, $\|Tx\| = \|x\|$). Per mezzo di questa isometria, si stabilisce il seguente importante:

Corollario G.21. *Ogni spazio di Hilbert è uno spazio di Banach riflessivo.*

Ricordiamo adesso alcuni fatti riguardanti i sistemi ortogonali ed i sistemi ortonormali.

Definizione G.22. Diremo che un sistema ortogonale S di uno spazio con prodotto scalare è *completo* se $x \perp s$ per ogni s in S implica $x = 0$.

Eruditi dal corollario G.19 è bene porre in evidenza che, nella collezione di tutti i sistemi ortonormali di uno spazio di Hilbert H, un sistema ortonormale S è completo se e solo se lo spazio vettoriale da esso generato (ossia l'insieme di tutte le combinazioni lineari *finite* di elementi di S) è denso in H.

Teorema G.23. *Ogni spazio con prodotto scalare ha un insieme ortogonale completo, e quindi, in particolare, ha un insieme ortonormale completo.*

Dimostrazione. Il teorema segue dal lemma di Zorn osservando che la collezione di tutti i sistemi ortogonali, ordinata dall'inclusione, ha un elemento massimale. Per concludere la prova, si noti che un sistema ortogonale è massimale se e solo se esso è completo. □

Un sistema ortogonale completo è un sistema ortogonale massimale. Per il teorema G.23 sappiamo che ogni spazio con prodotto scalare ha un sistema ortogonale completo.

Definizione G.24. In uno spazio di Hilbert chiameremo *base di Hilbert* oppure *base ortonormale* un *sistema ortonormale completo.* Riassumendo, una famiglia di vettori $(e_i)_{i\in I}$ di uno spazio di Hilbert è una *base ortonormale* se e solo se

BO 1. $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, in cui δ_{ij} è il simbolo di Kronecker, e

BO 2. per ogni i in I, $\langle x, e_i\rangle = 0$ implica $x = 0$.

Si osservi esplicitamente che una base ortonormale non è necessariamente una "base" nel senso dell'algebra astratta, non è vero cioè che ogni elemento dello spazio è una combinazione lineare di un numero finito di elementi di una base di Hilbert.

Gli spazi di Hilbert con una base ortonormale numerabile sono precisamente gli spazi di Hilbert di dimensione infinita *separabili*:

Teorema G.25. *Uno spazio di Hilbert di dimensione infinita è separabile se e solo se ammette una base ortonormale numerabile. In questo caso, ogni base ortonormale dello spazio è numerabile.*

Osservazione G.26. Due spazi di Hilbert sono toplinear-isomorfi, equivalentemente unitariamente isomorfi, se e solo se hanno sistemi ortonormali completi della stessa cardinalità: infatti ogni isomorfismo unitario trasforma biiettivamente un sistema ortonormale completo di uno spazio in un sistema ortonormale completo dell'altro, ed inversamente ogni biiezione di sistemi ortonormali completi si estende ad un isomorfismo unitario tra gli spazi. Escluso il caso di dimensione finita, la cardinalità di un sistema ortonormale completo coincide con il *carattere di densità dello spazio*, ossia con la minima cardinalità di un sottoinsieme (topologicamente) denso nello spazio. Nel caso di dimensione finita, naturalmente la dimensione è anche la cardinalità di un base ortonormale. Dato che per ogni cardinale finito n ed ogni cardinale infinito α si ha $n+\alpha = \alpha$, in uno spazio di Hilbert H di dimensione infinita ogni sottospazio V di codimensione finita è unitariamente isomorfo e quindi, in particolare, toplinear-isomorfo ad H stesso. Infatti, se W è il supplementare ortogonale di V, con $\dim W = n$, ed $u_1, \dots, u_n$ è una base ortonormale di W, prendiamo un sistema ortonormale completo $\{u_\iota : \iota \in I\}$ di V, con $\mathrm{Card}\,(I) = \alpha$, α carattere di densità di V, necessariamente infinito; allora $\{u_1, \dots, u_n\} \cup \{u_\iota : \iota \in I\}$ è un sistema ortonormale completo di H, di cardinale $n + \alpha = \alpha$. Un isomorfismo unitario di H su V si trova usando una biiezione di $\{1, \dots, n\} \cup I$ su I (si suppone che $I \cap \{1, \dots, n\} = \varnothing$); a sua volta tale biiezione in genere si stabilisce così: si fissa un'iniezione $k \mapsto \iota(k)$ di $\{1, 2, 3, \dots\}$ in I, iniezione che esiste perché I è infinito; detta A l'immagine di tale iniezione, si definisce η di $\{1, \dots, n\} \cup I$ su I nel modo seguente: $\eta(j) = \iota(j)$ per $j \in \{1, \dots, n\}$; $\eta(\iota(k)) = \iota(k + n)$ per ogni $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$; $\eta(\iota) = \iota$ se $\iota \in I \setminus A$ (si noti che l'insieme $I \setminus A$ non viene toccato, quindi è come se stessimo lavorando in un sottospazio separabile). Tale biiezione η si estende ad un isomorfismo unitario di H su V, isomorfismo che è essenzialmente uno shift applicato n volte.

In generale, dato uno spazio di Hilbert H, ed una sua decomposizione $H = V \overset{\perp}{\oplus} W$ in somma diretta ortogonale di due suoi sottospazi, H è unitariamente isomorfo ad uno almeno dei due: basta ricordare che una somma di due cardinali, uno almeno dei quali infinito, coincide con il più grande fra i due.

Diremo che un operatore lineare $L\colon H_1 \to H_2$ tra due spazi di Hilbert *preserva il prodotto scalare* se $\langle Lx, Ly\rangle = \langle x, y\rangle$ per ogni $x, y \in H_1$.
Il seguente lemma è una conseguenza immediata del noto risultato secondo cui una norma su uno spazio vettoriale è hilbertiana se e solo se soddisfa l'uguaglianza del parallelogramma:

Lemma G.27. *Un operatore lineare $L\colon H_1 \to H_2$ tra due spazi di Hilbert preserva la norma (i.e. è una isometria) se e solo se preserva il prodotto scalare.*

In uno spazio di Hilbert separabile, scelto un sistema ortonormale completo (e_i), ogni vettore x in H si scrive in modo unico come $x = \sum x_i e_i$. Questa identificazione induce un isomorfismo di spazi di Hilbert da H su ℓ^2 in cui si corrispondono x e $\{x_i\}$. Innanzitutto, detta mappa è ben definita ed è un'isometria perché $\sum |x_i|^2 = \|x\|^2$. La mappa è iniettiva per l'unicità dei coefficienti di Fourier, ed è suriettiva in quanto, per ogni elemento (x_i) di ℓ^2 risulta $\sum |x_i|^2 < \infty$, dunque la formula $x := \sum x_i e_i$ definisce un elemento di H. Chiaramente questo isomorfismo non è naturale infatti richiede la scelta di una base.

Teorema G.28. *Uno spazio di Hilbert H di dimensione infinita è separabile se e solo se è linearmente isometrico a ℓ^2.*

Infine, ricordiamo il seguente utile risultato in analisi di Fourier, per la cui dimostrazione rimandiamo a [Fo 99], pag. 241.

Teorema G.29. *Siano p e q esponenti coniugati, f in L^p e g in L^q. Allora $f * g(x)$ esiste per ogni x, $f * g$ è limitato e uniformemente continuo, e $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Se $1 < p < \infty$ (e quindi anche $1 < q < \infty$), allora $f * g$ si annulla all'infinito (anche se né f, né g tendono a 0 all'infinito).*

Esempio G.30. Proviamo a titolo di esempio, senza fare ricorso alla teoria della convoluzione, che

$$\forall\, g \in L^2(\mathbb{R}), \qquad \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2}\, g(t)\, dt = 0.$$

Si osservi che se $g \in L^1(\mathbb{R})$ allora la maggiorante sommabile dell'integrando è $|g|$ stessa, è ovvio infatti che si ha $|e^{-(x-t)^2} g(t)| \leq |g(t)|$ per ogni $x, t \in \mathbb{R}$. Quindi, se $g \in L^1(\mathbb{R})$ si conclude subito che $\lim_{x\to\pm\infty} G * g(x) = 0$, in virtù del teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata. Scriviamo ora

$$\big|G * g(x)\big| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2} g(t)\, dt\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2} |g(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(e^{-(x-t)^2/2}\big)\big(e^{-(x-t)^2/2}|g(t)|\big)\, dt$$

e applichiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz alle funzioni $t \mapsto e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}$, $t \mapsto e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}|g(t)|$ ottenendo

$$\big|G * g(x)\big| \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2}\, dt\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2}\, |g(t)|^2\, dt\right)^{1/2} = \pi^{1/4}\big(G * |g|^2(x)\big)^{1/2}.$$

Per quanto appena visto si ha $\lim_{x\to\pm\infty} G * |g|^2(x) = 0$ dato che $|g|^2 \in L^1(\mathbb{R})$.

G.3 Piega in dimensione infinita

Proposizione G.31. *Sia X uno spazio di Banach dotato di una base di Schauder $(e_i)_{i\geq 1}$. Allora esiste una mappa propria non surgettiva di classe C^∞ di X in X Fredholm di indice zero.*

Dimostrazione. Si indichi con x il generico elemento di X e con $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$ le coordinate di x rispetto a $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$. Identifichiamo gli elementi di X con le coordinate rispetto alla base di Schauder $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^+}$. Si consideri la mappa

$$f\colon (x_i)_{i\in\mathbb{N}^+} \in X \longmapsto \big(x_1^2, (x_i)_{i\geq 2}\big) \in X.$$

Allora chiaramente si tratta di una mappa non surgettiva.

Verifichiamo che f è una applicazione propria: vediamo la f come decomposta nell'identità sugli elementi di X del tipo $(0, x_2, x_3, \ldots)$ sommata alla funzione $x_1 \mapsto x_1^2$. Più precisamente, sia

$$x = (x_1, x_2, \ldots) = (x_1, 0, \ldots) + (0, x_2, x_3, \ldots) =: x_1 e + y \in X,$$

in cui si è posto $x_1 e := (x_1, 0, \ldots)$ e $y := (0, x_2, x_3, \ldots)$. Allora $f(x) = x_1^2 e + y$.

Se K è un compatto di X, sia $(x^{(h)})_h$ una successione in $f^{-1}(K)$: dobbiamo provare che $(x^{(h)})_h$ ammette una sottosuccessione convergente a un punto di $f^{-1}(K)$. Si ha $(x^{(h)})_h = \big(t_h e + y^{(h)}\big)_h$ e

$\big(f(x^{(h)})\big)_h = \big(t_h^2 e + y^{(h)}\big)_h$, che è una successione in K. Dunque $\big(f(x^{(h)})\big)_h$ ammette una sottosuccessione $\big(f(x^{(h_i)})\big)_i = \big(t_{h_i}^2 e + y^{(h_i)}\big)_i$ convergente a un punto z di K. Segue che esistono[1] punti re ed $y = (0, y_2, y_3, \ldots)$ tali che $\big(t_{h_i}^2 e\big)_i$ e $\big(y^{(h_i)}\big)_i$ convergono a re ed $y = (0, y_2, y_3, \ldots)$ rispettivamente, ed inoltre $re + y = z \in K$. In particolare, a meno di passare a una sottosuccessione segue che $\big(t_{h_i} e\big)_i$ converge a un certo te (tale che $t^2 = r$). L'elemento $te + y \in X$ è invero un elemento di $f^{-1}(K)$, infatti $f\big(te + y\big) = t^2 e + y = re + y = z \in K$, inoltre

$$\lim_{i\to\infty} x^{(h_i)} = \lim_{i\to\infty} \big(t_{h_i} e + y^{(h_i)}\big) = te + y.$$

⌟

Verifichiamo che f è Fredholm di indice zero. Per questo scopo occorre calcolare il differenziale di Fréchèt df_{x_0} di f in $x_0 = a\,e + b$, dove $b = (0, b_2, b_3, \ldots)$, con $a, b_2, b_3, \ldots \in \mathbb{R}$. Se $x = (x_1, x_2, \ldots)$ si ha

$$df_{x_0}(x) = (2a\,x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

di modo che: se a $a \neq 0$ allora df_{x_0} è un isomorfismo, la mappa inversa essendo

$$(y_j)_{j\geq 1} \mapsto (y_1/(2a), y_2, y_3, \ldots);$$

se $a = 0$, df_{x_0} ha come nucleo $\mathbb{R}\,e$ (dimensione 1) e come immagine lo spazio dei vettori con prima coordinata nulla, supplementare di $\mathbb{R}\,e$ e quindi di codimensione 1.

□

Osservazione G.32. La proposizione G.31 si generalizza a spazi del tipo $X = \mathbb{R} \times V$, con V spazio di Banach, prendendo $f(t, v) = (t^2, v)$.

Osservazione G.33. Chiaramente il risultato espresso dalla proposizione precedente continua ad essere vero quando in luogo dello spazio di Banach X dotato di una base di Schauder si consideri uno spazio di Hilbert separabile.

[1] Siccome $\big(f(x^{(h_i)})\big)_i$ è convergente, essa è di Cauchy, i.e., $\big\|t_{h_i}^2 e + y^{(h_i)} - t_{h_j}^2 e - y^{(h_j)}\big\|_2 \xrightarrow{i,j\to\infty} 0$. Segue che $\big(t_{h_i}^2\big)_i$ e $\big(y^{(h_i)}\big)_i$ sono di Cauchy, da cui, per la completezza di $\mathbb{R}$ e X, esse sono convergenti.

Bibliografia

[Abr 62] R. Abraham, *Lectures of Smale on Differential Topology*, Notes at Columbia University (Mimeographed). New York (1962–1963).

[Ab-Ro 67] R. Abraham, J. Robbin, *Transversal Mappings and Flows*. W.A. Benjamin Inc. (1967).

[Ada 62] J.F. Adams, *Vector fields on spheres*, Ann. of Math. **75** (1962), 603–632.

[APS 60] W. Ambrose, R.S. Palais and I.M. Singer, *Sprays*, Anais. Acad. Brasileira Ciencias. **Vol. 32**, no. 2 (1960), 163-178.

[Arl 66] D. Arlt, *Zusammenziehbarkeit der allgemeinen linearen Gruppe des Raumes co der Nullfolgen*, Invent. Math. **1** (1966), 36–44.

[AS 03] M. Atiyah, G. Segal, *Twisted K-theory*. The author provides an electronic version of the manuscript at http://arxiv.org/Atiyah-Segal.

[Atk 75] C.J. Atkin, *The Hopf-Rinow theorem is false in infinite dimensions*, Bull. London Math. Soc. 7 **3** (1975), 261–266.

[At-To 07] C. Atkin, R. Tozzi, *Riassunto della corrispondenza scritta di Christopher Atkin e Raul Tozzi*. Febbraio-Maggio 2007.

[BCS 00] D. Bao, S. Chern, Z. Shen, *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*. Springer, New York (2000).

[Be 66] C. Bessaga, *Every infinite-dimensional Hilbert space is diffeomorphic with its unit sphere*, Bull. Acad. Polon. Sci. **XIV**, 1 (1966), 27–31.

[Be 75] C. Bessaga, A. Pełczyński, *Selected topics in infinite-dimensional topology*. PWN-Polish Scientific Publishers. Varsavia (1975).

[Bou1 71] N. Bourbaki, *Varietes differentielles et analytiques. Fascicule de resultats*, Paragraphes 1 a 7. Paris, Hermann, (1971).

[Bou2 71] N. Bourbaki, *Varietes differentielles et analytiques. Fascicule de resultats*, Paragraphes 8 a 15. Paris, Hermann, (1971).

[Bou3 89] N. Bourbaki, *General Topology*, Chapters 1-4. Springer (1989).

[Bou4 90] N. Bourbaki, *General Topology*, Chapters 5-10. Springer (1989).

[Cal 41] J.W. Calkin, *Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space*, Ann. of Math. **42** (1941), 839–873.

[Cr 04] M.V. Cruz, *An introduction to cobordism*. The author provides an electronic version of the manuscript at http://math.berkeley.edu.

[Da 58] M.M. Day, *Normed linear space*, Ergebn. Math. Heft. **21** (1958).

[De 85] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis.* Springer, Berlin (1985).

[Di 69] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press, New York and London (1969).

[DGZ 93] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces.* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 64 (1993).

[Dou 65] A. Douady, *Un espace de Banach dont la groupe linéaire n'est pas connexe*, Indag. Math. **68** (1965), 787–789.

[Do 98] R.G. Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory.* Springer, Berlin (1998).

[Du 66] J. Dugundji, *Topology.* Allyn and Bacon, Inc. (1966).

[Ee 67] J. Eells, *Fredholm structures*, in Proc. Symp. Non-linear Functional Analysis. Chicago (1967).

[Ee-El 68] J. Eells, K.D. Elworthy, *On the differential topology of Hilbertian manifolds.* In Proc. Summer Institute on Global Analysis (1968).

[Ee-El 70] J. Eells, K.D. Elworthy, *Open embeddings of certain Banach manifolds.* Ann. of Math. (2) **91** (1970), 465–485.

[El 72] K.D. Elworthy, *Embeddings, Isotopy and Stability of Banach manifolds*, Compositio Mathematica (2) **24** (1972), 175–226.

[El 70] K.D. Elworthy, *Structure Fredholm sur les variétés banachiques.* Analyse Globale, Sém. Math. Supérieures, Presses University of Montréal, Montreal (1970), 112–147.

[El 68] K.D. Elworthy, *Fredholm maps and $GL_c(E)$-structures*, Oxford Thesis (1967). Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 582–586.

[El-Tr 68] K.D. Elworthy, A.J. Tromba, *Fredholm maps and differential structures on Banach manifolds.* In Proc. Summer Institute on Global Analysis (1968).

[Fa 01] M. Fabian, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry.* Springer, Berlin (2001).

[Fo 99] G.F. Folland, *Real Analysis.* Interscience Wiley & Sons, Inc., New York (1999).

[Go 58] R. Godement, *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux.* Hermann 1958.

[Gro 65] N. Grossman, *Hilbert manifolds without epiconjugate points.* Proc. Am. Math. Soc. **16** (1965), 1365–1371.

[Gu 89] M. Gunther, *On the perturbation problem associated to isometric embeddings of Riemannian manifolds.* Ann. of Global Analysis and Geometry. **7** (1989), 69–77.

[He 78] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces.* Academic Press New York (1978).

[He 69] D.W. Henderson, *Infinite-dimensional manifolds are open subsets of Hilbert space.* Bull. AMS **75** (1969), 759–762.

[He 70] D.W. Henderson, *Infinite-dimensional manifolds are open subsets of Hilbert space.* Topology **9** (1970), 25–34.

[Hil 72] E. Hille, *Methods in Classical and Functional Analysis.* Addison-Wesley. Reading (1972).

[Hir 94] M. Hirsch, *Differential Topology.* Springer New Vork 1994.

[Ion 73] A. Ionushauskas, *On smooth partitions of unity on Hilbert manifolds*, Lithuanian Mathematical Journal **13** (4) (1973), 595–601.

[Jan 65] J. Jänich, *Vektorraumbundel und der Raum der Fredholm–Operatoren*, Math. Ann. **161** (1965), 129–142.

[Ka 47] S. Kaplan, *Homology properties of arbitrary subsets of euclidean spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **62** (1947), 248–271.

[Ka 80] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators.* Springer Berlin 1980.

[Kel 55] J.L. Kelley, *General Topology.* Springer, Berlin (1955).

[KG 83] A.A. Kirillov, A.D. Gvišiani, *Teoremi e problemi dell'analisi funzionale.* Mir Mosca 1983.

[Kl 53] V.L. Klee, *Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space.* Trans. Amer. Math. Soc., **74** (1953), 10–43.

[Kl 82] W. Klingenberg, *Riemannian geometry.* De Gruyter studies in Mathemathics. New York 1982.

[Ko-No 63] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry, I.* Interscience Wiley & Sons, Inc., New York (1963).

[Ku 65] N.H. Kuiper, *The homotopy type of the unitary group of Hilbert spaces.* Topology **3** (1965), 19–30.

[Ku-Bu 69] N.H. Kuiper, D. Burghelea, *Hilbert manifolds.* Ann. of Math. **90** (1969), 379–417.

[Lan 01] S. Lang, *Fundamentals of Differential Geometry.* Springer New York (2001).

[Lan 83] S. Lang, *Real Analysis.* Addison-Wesley publishing company (1983).

[Lo 63] E.R. Lorch, D. Laugwitz, *Riemannian metrics associated with convex bodies in normed spaces.* Am. J. Math. **78**, (4) (1956), 889–894.

[McL 98] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician.* Springer New York (1998).

[Mi 61] J. Milnor, *Differentiable structures.* Notes at Princeton Univ. (1961).

[Mi 63] J. Milnor, *Morse Theory.* Ann. Math. Studies **53**, Princeton University Press (1963).

[Mi 68] J. Milnor, *Topology from the differential viewpoint.* The University Press of Virginia Charlottesville (1968).

[Mo 68] N. Moulis, *Sur les variétés Hilbertiennes et les fonctions non dégénerées*, Indag. Math. **30** (1968), 497-511.

[Mo 70] N. Moulis, *Stability of Hilberts manifolds*, Global Analysis Proc. Sympos. Pure Math. **15** (1970), 157-165.

[Mu 68] K.K. Mukherjea, *Fredholm structures and cohomology.* Cornell Thesis (1968). Bull Amer. Math. Soc. **74** (1968), 493-496.

[Mu 70] K.K. Mukherjea, *The homotopy theory of Fredholm manifolds.* Transactions of the American Mathematical Society **149** (1970), 653-663.

[Mu 71] K.K. Mukherjea, *The algebraic topology of Fredholm manifolds*. Analyse Globale, Sém. Math. Supérieures **42** Presses University of Montréal, Montreal (1971), 163-177.

[Mun 00] J. Munkres, *Topology*. 2nd edition, Prentice Hall, (2000).

[Na 56] J.F. Nash, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*. Ann. of Math. **63** (1956), 20–63.

[Neu 67] G. Neubauer, *On a class of sequence spaces with contractible linear group*, Notes, University of California, Berkeley, Calif. (1967).

[Nom 61] K. Nomizu, H. Ozeki, *The Existence of Complete Riemannian Metrics*. Proc. Am. Math. Soc. **12** (1961), 889–891.

[Os 82] H. Osborne, *Vector Bundles, Volume I*. Academic Press London 1982.

[PA 73] G. Prodi, A. Ambrosetti, *Analisi Non Lineare, I quaderno*. Pisa (1973).

[Pa 63] R. Palais, *On the homotopy of a certain class of Banach algebras*. Notes at Brandeis University (Mimeographed). (1963).

[Pa 66] R. Palais, *Homotopy theory of infinite dimensional manifolds*. Topology **5** (1966), 1-16.

[PW 51] R. Putnam, A. Winter, *The connectedness of the orthogonal group in Hilbert space*, Proc. Nat. Acad. Sci., Wash. **37** (1951), 110–112.

[PW 52] R. Putnam, A. Winter, *The orthogonal group in Hilbert space*, Am. J. Math. **74** (1952), 52–78.

[Ri 55] F. Riesz, B. Sz.-Nagy *Functional Analysis*. Ungar Publishing Co., New York, (1955).

[Ro 94] J.M. Roig, E.O. Domínguez, *Embedding of Hilbert Manifolds with smooth boundary into semispaces of Hilbert spaces*. The author provides an electronic version of the manuscript at http://citeseer.ist.psu.edu/roig.

[Sm 58] S. Smale, *A classification of immersions of the two-sphere*. Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1958), 281–290. MR 0104227 (21:2984).

[Sm 59] S. Smale, *The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces*. Ann. of Math. **69** (1959), 27–34. MR 0105117 (21:3862).

[Sm 65] S. Smale, *An Infinite Dimensional Version of Sard's Theorem*. American Journal of Mathematics (4) **87** (1970), 861–866.

[Sol 98] R.M. Solovay, *About the last part of Nash's proof for "The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds"*. There is an electronic version of the manuscript at http://www.math.princeton.edu.

[Sp 79] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry: Volume II*. Publish or Perish, Inc. (1979).

[St 65] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Press. Princeton 1965.

[Th 57] R. Thom, *La classification des immersions*. Sém. Bourbaki (1957/58), Exp. 157.

[Tor 73] H. Toruńczyk, *Smooth partitions of unity on some non-separable Banach spaces*. Studia Math. **46** (1973), 43-51. There is an electronic version of the manuscript at http://matwbn.icm.edu.pl.

[Wa 60] C.T.C. Wall, *Differential topology.* Notes at Cambridge Univ. (1960/61).

[Wa 87] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Springer New York (1987).

[Ze 86] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications I. Fixed-point theorems. Springer* New York-Berlin (1986).