

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

**Teorema del punto fisso  
di  
Poincaré-Birkhoff**

30 settembre 2011

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Candidato

**Umberto Lardo**

`lardo@mail.dm.unipi.it`

Relatore

**Prof. Alberto Abbondandolo**

Università di Pisa

ANNO ACCADEMICO 2010/2011





# Introduzione

Il teorema oggetto di questa tesi fu congetturato da J.H. Poincaré nei primi anni del Novecento. È noto in letteratura come *Ultimo teorema geometrico di Poincaré* e asserisce che un omeomorfismo twist del cilindro in sé che conserva l'area ammette almeno due punti fissi. Intuitivamente tramite una mappa twist le due componenti di bordo del cilindro ruotano in senso opposto. L'enunciato venne pubblicato nel marzo del 1912 dalla rivista Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, senza dimostrazione. Nell'introduzione all'articolo *Sur un théorème de géométrie* Poincaré afferma:

*“Je n'ai jamais présenté au public un travail aussi inachevé; je crois donc nécessaire d'expliquer en quelques mots les raisons qui m'ont déterminé à le publier, et d'abord celles qui m'avaient engagé à l'entreprandre. J'ai démontré, il y a longtemps déjà, l'existence des solutions périodiques du problème des trois corps; le résultat laissait cependant encore à désirer; car, si l'existence de chaque sorte de solution était établie pour les petites valeurs des masses, on ne voyait pas ce qui devait arriver pour des valeurs plus grandes, quelles étaient celles de ces solutions qui subsistaient et dans quel ordre elles disparaissaient. En réfléchissant à cette question, je me suis assuré que la réponse devait dépendre de l'exactitude ou de la fausseté d'un certain théorème de géométrie dont l'énoncé est très simple, du moins dans le cas du problème restreint et des problèmes de Dynamique où il n'y a que deux degrés de liberté.*

*J'ai donc été amené à rechercher si ce théorème est vrai ou faux, mais j'ai rencontré des difficultés auxquelles je ne m'attendais pas. J'ai été obligé d'envisager séparément un très grand nombre de cas particuliers; mais les cas possibles sont trop nombreux pour que j'ai pu les étudier tous. J'ai reconnu l'exactitude du théorème dans tous ceux que j'ai traités. Pendant deux ans, je me suis efforcé sans succès, soit de trouver une démonstration générale, soit de découvrir un exemple où le théorème soit en défaut.*

*Ma conviction qu'il est toujours vrai s'affermait de jour en jour, mais je restais incapable de l'asseoir sur des fondements solides.*

*Il semble que dans ces conditions, je devrais m'abstenir de toute publication tant que je n'aurai pas résolu la question; mais après les inutiles efforts que j'ai faits pendant de longs mois, il m'a paru que le plus sage était de laisser le problème mûrir, en m'en reposant durant quelques années; cela serait très bien si j'étais sûr de pouvoir le reprendre un jour; mais à mon âge je ne puis en répondre. D'un autre côté, l'importance du sujet est trop grande (et je chercherai plus loin à la faire comprendre) et l'ensemble des résultats obtenus trop considérable déjà, pour que je me résigne à les laisser définitivement infructueux. Je puis espérer que les géomètres qui s'intéresseront à ce problème*

*et qui seront sans doute plus heureux que moi, pourront en tirer quelque parti et s'en servir pour trouver la voie dans laquelle ils doivent se diriger.*

*Je pense que ces considérations suffisent à me justifier.”*

*“Non ho mai presentato al pubblico un lavoro così incompleto, credo dunque necessario spiegare le ragioni che mi hanno condotto alla pubblicazione, come quelle che mi hanno indotto a intraprendere il lavoro. Ho dimostrato, tempo fa, l'esistenza di soluzioni periodiche per il problema dei tre corpi, tuttavia il risultato lascia ancora a desiderare: infatti se l'esistenza di un qualche tipo di soluzione è stata stabilita per piccoli valori delle masse non si vede cosa debba succedere per dei valori più grandi; quali sono le soluzioni che rimangono e con che ordine queste scompaiono. Riflettendo su questo fatto mi sono convinto che la risposta debba dipendere dalla veridicità o dalla falsità di un certo teorema di geometria, il cui enunciato è molto semplice, almeno nel caso del problema ristretto e dei problemi di dinamica dove non ci siano che due gradi di libertà. Sono dunque stato spinto a capire se questo teorema sia vero o falso, ma ho incontrato difficoltà che non mi sarei aspettato. Sono stato obbligato a trattare un gran numero di casi particolari, ma i casi possibili sono troppo numerosi affinché possa studiarli tutti. Ho riconosciuto l'esattezza del teorema in tutti quelli che ho trattato. Per due anni mi sono sforzato senza successo sia di trovare una dimostrazione generale, sia di scoprire un esempio in cui il teorema fallisca.*

*La mia convinzione che questo sia vero si rafforza di giorno in giorno ma resto incapace di basarla su solide fondamenta.*

*Sembra che sotto queste condizioni dovrò astenermi da ogni pubblicazione fin tanto che non avrò risolto il problema. Ma dopo gli inutili sforzi che ho fatto in questi lunghi mesi mi è parso sia più saggio lasciar morire il problema e riposarmi per qualche anno. Sarà una gran cosa se un giorno sarò in grado di riprenderlo, ma alla mia età non posso saperlo. D'altro canto l'importanza del soggetto è troppo grande (e cercherò più avanti di farlo comprendere) e l'insieme dei risultati ottenuti è già troppo considerevole perchè io mi rassegni ad abbandonare definitivamente il problema lasciandolo incompleto. Posso sperare che i geometri che si interesseranno a questo problema e che saranno senza dubbio più fortunati di me potranno avvantaggiarsi dei miei risultati e in qualche modo servirsene per trovare la strada verso la quale si devono dirigere.*

*Penso che queste considerazioni siano sufficienti a giustificarmi.”*

Una prima dimostrazione del teorema venne pubblicata nel gennaio del 1913 da G.D. Birkhoff nell'articolo *Proof of Poincaré's Geometric Theorem*; tale prova, però, non era corretta. Lo stesso Birkhoff, infatti, qualche anno più tardi (1925) pubblicò una nuova dimostrazione del teorema insieme a una piccola generalizzazione. Nel 1977 M. Brown e W.D. Neumann proposero una revisione di quest'ultima nell'articolo *Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem*.

In questa tesi, divisa in tre capitoli, si trova una dimostrazione dettagliata del teorema del punto fisso di Poincaré-Birkhoff.

Nel primo capitolo è riportata la definizione di mappa twist, vi sono dei richiami di topologia e dei risultati sul sollevamento di omeomorfismi del cilindro in sé che permettono di affrontare la dimostrazione del teorema.

Il secondo capitolo è interamente dedicato alla dimostrazione. Dato un omeomorfismo twist del cilindro, ci si riconduce, utilizzando gli strumenti forniti nel Capitolo 1, a un omeomorfismo di un particolare sottoinsieme  $S$  di  $\mathbb{R}^2$ , con determinate proprietà. A questo punto si procede per assurdo supponendo che l'omeomorfismo in questione abbia al più un punto fisso. Sotto tali ipotesi si riesce a costruire un cammino che porta alla contraddizione cercata.

Nel terzo capitolo, invece, si trovano alcune applicazioni del teorema: esistenza di orbite periodiche su biliardi convessi di  $\mathbb{R}^2$ , esistenza di tre geodetiche chiuse su una sfera a curvatura positiva, teorema di Hartman-Jacobowitz (esistenza di orbite periodiche per particolari equazioni differenziali non lineari del secondo ordine).

*Umberto Lardo*

*Pisa, settembre 2011*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Richiami e definizioni preliminari</b>	<b>6</b>
1.1 Notazione . . . . .	6
1.2 Numero di rotazione . . . . .	6
1.3 Indice . . . . .	8
1.4 Mappe e orientazione . . . . .	9
1.5 Sollevamento di omeomorfismi del cilindro . . . . .	10
<b>2 Teorema del punto fisso di Poincaré-Birkhoff</b>	<b>14</b>
2.1 Dimostrazione . . . . .	14
2.2 Controesempio . . . . .	21
<b>3 Applicazioni</b>	<b>22</b>
3.1 Infinite orbite periodiche per $\psi$ . . . . .	22
3.2 Biliardi . . . . .	23
3.3 Geodetiche chiuse su $S^2$ . . . . .	25
3.4 Teorema di Hartman-Jacobowitz . . . . .	27
<b>Bibliografia</b>	<b>28</b>

# Capitolo 1

## Richiami e definizioni preliminari

Lo scopo di questo capitolo è quello di fissare la notazione, dare alcune definizioni preliminari e fornire gli strumenti necessari per affrontare la dimostrazione del teorema di Poincaré-Birkhoff.

### 1.1 Notazione

Indichiamo il toro unidimensionale, quoziente di  $\mathbb{R}$  sotto l'azione del gruppo generato dalla traslazione  $x \mapsto x + 1$ , con

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

il cilindro con

$$C = \mathbb{T} \times [0, 1].$$

Osseviamo che la striscia

$$S = \mathbb{R} \times [0, 1]$$

riveste  $C$  con la mappa  $p : (x, y) \mapsto (u, v)$  dove

$$u = x \pmod{1} \quad \text{e} \quad v = y.$$

Infine indichiamo con

$$\text{Fix}(\phi) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(P) = P\}$$

l'insieme dei punti fissi di un'applicazione  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

### 1.2 Numero di rotazione

Se  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$  sono cammini (ossia curve continue), scriviamo  $\alpha \sim \beta$  per indicare che  $\alpha$  e  $\beta$  sono due cammini omotopi, l'omotopia è da intendersi a estremi fissi. Indichiamo con  $*$  l'operatore di giustapposizione e con  $i(\alpha)$  il

cammino  $\alpha$  percorso nel verso opposto. Sia, inoltre,  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$  il cerchio unitario, allora  $S^1$  risulta essere un gruppo con la moltiplicazione e  $\mathbb{R}$  con la mappa  $t \mapsto e^{it}$  il suo rivestimento universale.

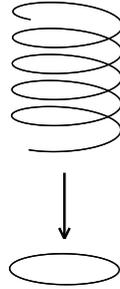


Figura 1.1: Rivestimento di  $S^1$

**Definizione 1.1.** Siano  $\alpha : [0, 1] \rightarrow S^1$  un cammino e  $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  un sollevamento di  $\alpha$  relativo al rivestimento  $t \mapsto e^{it}$ . Allora si dice numero di rotazione del cammino  $\alpha$  lo scalare

$$\omega(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0).$$

Osserviamo che il cammino  $\tilde{\alpha}$  è unico a meno di morfismi di rivestimento, nel nostro caso unico a meno di costanti additive della forma  $2k\pi$ , per qualche intero  $k$ . Allora  $\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0)$  non dipende dal sollevamento e  $\omega(\alpha)$  risulta ben definito.

**Proposizione 1.2.** Siano  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow S^1$ . Il numero di rotazione  $\omega$  gode delle seguenti proprietà

- (i) se  $z \in S^1$  allora  $\omega(z \cdot \alpha) = \omega(\alpha)$ ;
- (ii)  $\omega(i(\alpha)) = -\omega(\alpha)$ ;
- (iii)  $\omega(\alpha * \beta) = \omega(\alpha) + \omega(\beta)$ ;
- (iv) se  $\alpha \sim \beta$  allora  $\omega(\alpha) = \omega(\beta)$ ;
- (v) se  $\alpha_\varepsilon$  è una famiglia di cammini a un parametro, allora  $\omega$  varia con continuità col parametro.

*Dimostrazione.* Tali proprietà seguono dalla definizione di  $\omega$ , dal lemma di monodromia e dal sollevamento dell'omotopia [5].

- (i) Se  $z$  è della forma  $e^{i\vartheta}$  si ottiene

$$\omega(z \cdot \alpha) = (\vartheta + \tilde{\alpha}(1)) - (\vartheta + \tilde{\alpha}(0)) = \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0) = \omega(\alpha).$$

(ii)  $i : \alpha(t) \mapsto \alpha(1 - t)$ , quindi

$$\omega(i(\alpha)) = \tilde{\alpha}(0) - \tilde{\alpha}(1) = -\omega(\alpha).$$

(iii) Se imponiamo  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0)$ , il sollevamento di  $\alpha * \beta$  risulta essere  $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}$  e

$$\begin{aligned} \omega(\alpha * \beta) &= \tilde{\alpha} * \tilde{\beta}(1) - \tilde{\alpha} * \tilde{\beta}(0) = \tilde{\beta}(1) - \tilde{\alpha}(0) = \\ &= \tilde{\beta}(1) - \tilde{\beta}(0) + \tilde{\beta}(0) - \tilde{\alpha}(0) = \\ &= \tilde{\beta}(1) - \tilde{\beta}(0) + \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0) = \\ &= \omega(\alpha) + \omega(\beta). \end{aligned}$$

(iv) Fissiamo lo stesso punto base per i sollevamenti  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$ , cioè  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$ , allora segue dal lemma di monodromia che

$$\alpha \sim \beta \quad \text{se e soltanto se} \quad \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1).$$

(v) Segue immediatamente dal sollevamento dell'omotopia. □

### 1.3 Indice

Siano  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un omeomorfismo e  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  un cammino che non passa per alcun punto fisso di  $\phi$ . Allora è ben definito il cammino a valori in  $S^1$

$$t \mapsto \frac{\phi \circ \gamma(t) - \gamma(t)}{\|\phi \circ \gamma(t) - \gamma(t)\|}.$$

**Definizione 1.3.** Si dice indice del cammino  $\gamma$  rispetto alla mappa  $\phi$  il numero

$$\text{Ind}_\phi(\gamma) = \omega \left( \frac{\phi \circ \gamma - \gamma}{\|\phi \circ \gamma - \gamma\|} \right).$$

**Proposizione 1.4.** Siano  $\gamma, \delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  cammini che non passano per alcun punto fisso di  $\phi$ . L'indice appena definito gode delle seguenti proprietà

(i)  $\text{Ind}_\phi(i(\gamma)) = -\text{Ind}_\phi(\gamma);$

(ii)  $\text{Ind}_\phi(\gamma * \delta) = \text{Ind}_\phi(\gamma) + \text{Ind}_\phi(\delta);$

(iii)  $\text{Ind}_\phi(\gamma) = \text{Ind}_{\phi^{-1}}(\phi(\gamma));$

(iv) se  $\gamma \sim \delta$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(\phi)$  allora  $\text{Ind}_\phi(\gamma) = \text{Ind}_\phi(\delta);$

(v) se  $\gamma_\varepsilon$  è una famiglia di cammini a un parametro a valori in  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(\phi)$ , allora  $\text{Ind}_\phi(\gamma_\varepsilon)$  varia con continuità col parametro;

(vi) se  $\phi_\varepsilon$  è una famiglia di omeomorfismi a un parametro tale che  $\gamma([0, 1]) \cap \text{Fix}(\phi_\varepsilon) = \emptyset$  per ogni  $\varepsilon$ , allora  $\text{Ind}_{\phi_\varepsilon}(\gamma)$  varia con continuità col parametro.

*Dimostrazione.* Le proprietà dell'indice seguono banalmente da quelle del numero di rotazione dimostrate nella sezione precedente. Proviamo soltanto la proprietà (iii), l'unica ad aver bisogno di un piccola giustificazione.

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\phi^{-1}}(\phi(\gamma)) &= \omega \left( \frac{\phi^{-1} \circ \phi(\gamma) - \phi(\gamma)}{\|\phi^{-1} \circ \phi(\gamma) - \phi(\gamma)\|} \right) = \omega \left( \frac{\gamma - \phi \circ \gamma}{\|\gamma - \phi \circ \gamma\|} \right) = \\ &= \omega \left( \frac{\phi \circ \gamma - \gamma}{\|\phi \circ \gamma - \gamma\|} \right) = \text{Ind}_\phi(\gamma). \end{aligned}$$

Dove abbiamo utilizzato la proprietà (i) del numero di rotazione per ottenere la terza uguaglianza.  $\square$

## 1.4 Mappe e orientazione

**Teorema 1.5** (della curva di Jordan). *Sia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva semplice chiusa. Allora  $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([0, 1])$  consta di due componenti connesse, una limitata e una illimitata. Inoltre  $\gamma$  è la frontiera di entrambe le componenti.*

**Definizione 1.6.** *Diciamo che un cammino semplice chiuso in  $\mathbb{R}^2$  è orientato in senso positivo se, scelto  $P$  nella regione di piano limitata individuata dal cammino stesso, si ha  $\omega \left( \frac{\gamma - P}{\|\gamma - P\|} \right) > 0$ , diciamo che è orientato in senso negativo se vale  $\omega \left( \frac{\gamma - P}{\|\gamma - P\|} \right) < 0$ .*

**Definizione 1.7.** *Siano  $A \subset \mathbb{R}^2$  un aperto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  un omeomorfismo con l'immagine. Allora  $f$  preserva l'orientazione se ogni cammino semplice chiuso orientato bordo di un semplicemente connesso di  $A$  e la sua immagine tramite  $f$  hanno la stessa orientazione.*

**Osservazione 1.8.** *Supponiamo  $A$  connesso, allora per verificare se una mappa  $f$  conserva l'orientazione è sufficiente farlo su un unico cammino  $\gamma$  bordo di un aperto semplicemente connesso di  $A$ . Infatti se  $\gamma$  è semplice chiuso vale  $\omega(\gamma) = \pm 2\pi$ . Quindi, se  $F$  è una isotopia tra due cammini semplici chiusi  $\gamma$  e  $\gamma'$  che bordano rispettivamente due semplicemente connessi di  $A$ , si ottiene per continuità di  $F$*

$$\omega(F(s, t)) = \omega(F(0, t)) = \pm \omega(f \circ F(0, t)) = \pm \omega(f \circ F(s, t))$$

per ogni  $s \in [0, 1]$ .

**Osservazione 1.9.** *Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  è un diffeomorfismo con l'immagine, allora  $f$  conserva l'orientazione (nel senso appena definito) se e soltanto se  $\det(J_f) > 0$ .*

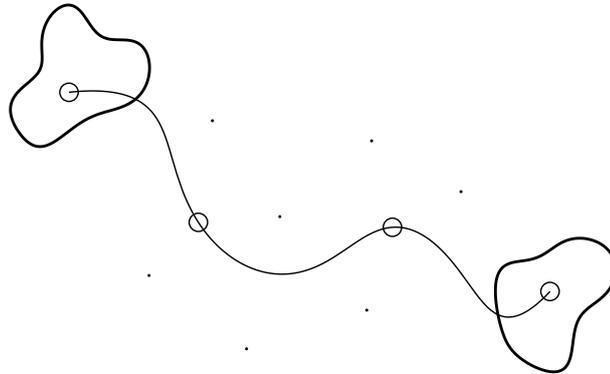


Figura 1.2: *Idea di isotopia tra due semplicemente connessi di  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p.ti\}$*

### 1.5 Sollevamento di omeomorfismi del cilindro

In questa sezione dimostriamo alcune proprietà dei sollevamenti di un omeomorfismo del cilindro in sé.

**Definizione 1.10.** *Sia  $\psi : C \rightarrow C$  un omeomorfismo. Allora un sollevamento di  $\psi$  è una mappa  $\phi : S \rightarrow S$  che fa commutare il seguente diagramma*

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{\phi} & S \\
 \downarrow p & \dashrightarrow \tilde{\phi} & \downarrow p \\
 C & \xrightarrow{\psi} & C
 \end{array}$$

dove  $p$  è la proiezione al quoziente.

Osserviamo che ogni omeomorfismo  $\psi : C \rightarrow C$  si solleva ad un omeomorfismo del rivestimento universale  $\phi : S \rightarrow S$ . Infatti  $\tilde{\phi}$  si ottiene per composizione con  $p$  e si solleva ad una mappa  $\phi$  poiché  $S$  è semplicemente connessa. Inoltre tale sollevamento è univocamente determinato dalla scelta dell'immagine di un punto fissato. Più precisamente, per ogni  $x_0 \in C$ ,  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ ,  $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(\psi(x_0))$  vi è un unico sollevamento  $\phi$  tale che  $\phi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ , facciamo riferimento a [5] per la teoria generale sui rivestimenti.

Resta da mostrare che  $\phi$  è un omeomorfismo di  $S$  in sé. Consideriamo il seguente diagramma.

$$\begin{array}{ccccc}
 S & \xrightarrow{\phi} & S & \xrightarrow{\hat{\phi}} & S \\
 \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow p \\
 C & \xrightarrow{\psi} & C & \xrightarrow{\psi^{-1}} & C
 \end{array}$$

Fissiamo  $x_0 \in C$  e  $\tilde{x}_0 \in S$  tale che  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ . Allora per quanto appena detto esiste anche una mappa  $\widehat{\phi}$  sollevamento di  $\psi^{-1}$ , e si può richiedere che  $\widehat{\phi}(\phi(\tilde{x}_0)) = \tilde{x}_0$ . A questo punto  $\phi \circ \widehat{\phi}$  e  $id_S$  risultano essere sollevamenti di  $id_C$  che fissano entrambi il punto  $\tilde{x}_0$ . Per l'unicità del sollevamento si conclude che  $\widehat{\phi} \circ \phi = id_S$ . In modo analogo si ottiene  $\phi \circ \widehat{\phi} = id_S$ . Perciò  $\phi$  è un omeomorfismo e  $\phi^{-1} = \widehat{\phi}$ .

Consideriamo la traslazione

$$s : (x, y) \mapsto (x + 1, y),$$

allora, dal fatto che  $\phi$  è un sollevamento di  $\psi$  e vale la relazione  $p \circ s = p$ , si ottiene  $p \circ \phi \circ s = \psi \circ p \circ s = \psi \circ p = p \circ \phi$ . Quindi  $\phi \circ s = s^h \circ \phi$ , per qualche intero  $h$ , cioè

$$\phi_1(x + 1, y) - \phi_1(x, y) = h \quad \text{e} \quad \phi_2(x + 1, y) - \phi_2(x, y) = 0.$$

Dato che anche  $\phi^{-1}$  è un sollevamento esiste un intero  $k$  tale che  $\phi^{-1} \circ s = s^k \circ \phi^{-1}$ . L'identità  $\phi \circ \phi^{-1} = id$  ci dice che  $hk = 1$ , cioè  $h = k = \pm 1$ . Infatti da  $\phi \circ s = s^h \circ \phi$  si ricava  $s = \phi^{-1} \circ s^h \circ \phi$  e utilizzando ripetutamente la relazione  $\phi^{-1} \circ s = s^k \circ \phi^{-1}$  si ottiene

$$\begin{aligned} s &= \phi^{-1} \circ s^h \circ \phi = s^k \circ \phi^{-1} \circ s^{h-1} \circ \phi = s^{2k} \circ \phi^{-1} \circ s^{h-2} \circ \phi = \dots = \\ &= s^{(h-1)k} \circ \phi^{-1} \circ s \circ \phi = s^{hk} \circ \phi^{-1} \circ \phi = \\ &= s^{hk}. \end{aligned}$$

**Proposizione 1.11.** *Con la notazione precedente si ha  $h = 1$  se e solo se  $\phi$  fissa separatamente componenti di bordo e orientazione oppure scambia le componenti di bordo e inverte l'orientazione.*

*Dimostrazione.* Sappiamo che  $\phi$  ristretta a  $\mathbb{R} \times \{0\}$  è un omeomorfismo con  $\mathbb{R} \times \{0\}$  oppure con  $\mathbb{R} \times \{1\}$ , quindi  $\phi_1(\cdot, 0)$  è strettamente monotona. Utilizzando la relazione  $\phi_1(x + 1, y) - \phi_1(x, y) = h$  si ottiene

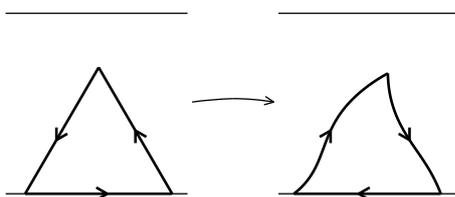
$$\phi_1(1, 0) = -1 + \phi_1(0, 0) < \phi_1(0, 0)$$

se  $h = -1$ , mentre se  $h = 1$

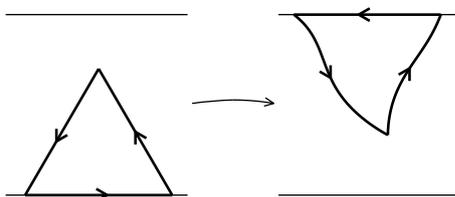
$$\phi_1(1, 0) = 1 + \phi_1(0, 0) > \phi_1(0, 0),$$

cioè  $\phi_1(\cdot, 0)$  è strettamente decrescente se  $h = -1$  e strettamente crescente se  $h = 1$ . A questo punto si presentano quattro casi.

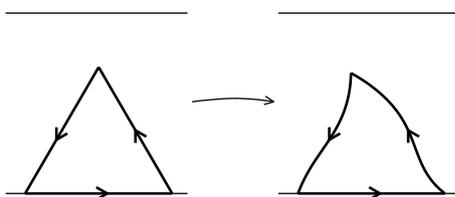
*Caso 1.* Se  $\phi_1(\cdot, 0) : \mathbb{R} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}$  e  $h = -1$ . Allora il cammino  $\gamma$  orientato in senso positivo viene trasformato nel cammino  $\delta$  orientato in senso negativo come mostra la figura.



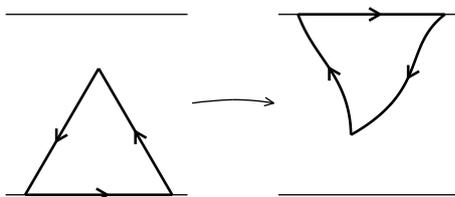
*Caso 2.* Se  $\phi_1(\cdot, 0) : \mathbb{R} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times \{1\}$  e  $h = -1$ . Allora il cammino  $\gamma$  orientato in senso positivo viene trasformato nel cammino  $\delta$  orientato in senso positivo come mostra la figura.



*Caso 3.* Se  $\phi_1(\cdot, 0) : \mathbb{R} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}$  e  $h = 1$ . Allora il cammino  $\gamma$  orientato in senso positivo viene trasformato nel cammino  $\delta$  orientato in senso positivo come mostra la figura.



*Caso 4.* Se  $\phi_1(\cdot, 0) : \mathbb{R} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times \{1\}$  e  $h = 1$ . Allora il cammino  $\gamma$  orientato in senso positivo viene trasformato nel cammino  $\delta$  orientato in senso negativo come mostra la figura.



Grazie all' Osservazione 1.8 si conclude che la mappa  $\phi$  conserva l'orientazione soltanto nel secondo e nel terzo caso, mentre la inverte nel primo e nel quarto.

□

Perciò se richiediamo che  $\phi$  preservi l'orientazione e fissi separatamente le componenti del bordo di  $S$  troviamo  $h = 1$ , cioè

$$\phi \circ s = s \circ \phi.$$

**Definizione 1.12.** *Un omeomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  conserva l'area se per ogni aperto  $A \subset \mathbb{R}^2$  si ha*

$$\iint_A dx \wedge dy = \iint_{f(A)} dx \wedge dy$$

La definizione è analoga per le superfici munite di una forma d'area. Possiamo, ora, osservare che  $\phi$  conserva l'area se e soltanto se la conserva  $\psi$ .

**Definizione 1.13.** *Un omeomorfismo  $\psi : C \rightarrow C$  soddisfa la condizione di twist se*

$$(i) \quad \psi(\mathbb{T} \times \{0\}) = \mathbb{T} \times \{0\}, \quad \psi(\mathbb{T} \times \{1\}) = \mathbb{T} \times \{1\};$$

$$(ii) \quad \text{esiste } \phi \text{ sollevamento di } \psi \text{ tale che } (\phi_1(x, 0) - x)(\phi_1(x, 1) - x) < 0.$$

Notiamo che la condizione di twist implica che  $\psi$  e  $\phi$  conservano l'orientazione. Infatti  $\phi_1(x, 0)$  e  $\phi_1(x, 1)$  devono necessariamente essere crescenti altrimenti avremmo  $(\phi_1(x, 0) - x)(\phi_1(x, 1) - x) = 0$  per qualche  $x$ .

*Esempio.* Nel caso particolare in cui  $\psi : C \rightarrow C$  ristretto a ciascuna componente di bordo risulta essere una rotazione, si ha che il sollevamento  $\phi$  di  $\psi$  è tale che

$$\phi : (x, 0) \mapsto (x + a, 0) \quad \text{e} \quad \phi : (x, 1) \mapsto (x + b, 1).$$

Inoltre, per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  la mappa

$$(x, y) \mapsto \phi(x, y) + (k, 0)$$

è ancora un sollevamento di  $\psi$ . Perciò affinché  $\psi$  sia twist si deve avere

$$(x + b + k - x)(x + a + k - x) = (b + k)(a + k) < 0, \quad (1.1)$$

per qualche intero  $k$ . Quindi  $a \neq b$  e senza perdere di generalità possiamo supporre  $a < b$ . In questo caso, la disuguaglianza (1.1) è verificata per qualche intero  $k$  se e solo se, detto  $h$  il più piccolo intero per cui  $b + h > 0$ , ossia

$$h = \min \{k \mid b + k > 0\} = 1 - [b]$$

risulta  $a + h < 0$ , cioè

$$a < [b] - 1.$$

Quando  $b$  non è un intero, questo equivale a chiedere l'esistenza di  $n \in \mathbb{Z}$  tale che  $a < n < b$ . Se  $b$  è un intero, invece,  $a < b - 1$ .

## Capitolo 2

# Teorema del punto fisso di Poincaré-Birkhoff

### 2.1 Dimostrazione

In questo capitolo diamo una dimostrazione dettagliata del teorema che segue.

**Teorema 2.1** (del punto fisso di Poincaré-Birkhoff). *Un omeomorfismo twist  $\psi : C \rightarrow C$  che conserva l'area ha almeno due punti fissi nella parte interna di  $C$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo un sollevamento  $\phi$  di  $\psi$  e osserviamo che se  $F$  è tale che  $\phi(F) = F$ , allora per ogni  $j \in \mathbb{Z}$  risulta  $\phi(s^j(F)) = s^j(\phi(F)) = s^j(F)$ . Vogliamo, quindi, provare che  $\phi$  ammette almeno due punti fissi  $F_1, F_2$  non equivalenti, cioè  $s^j(F_1) \neq F_2$  per ogni  $j \in \mathbb{Z}$ . Estendiamo  $\phi$  a un omeomorfismo di  $\mathbb{R}^2$  come segue

$$(\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)) = (\phi_1(x, 0), y) \quad \text{per } y \leq 0;$$

$$(\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)) = (\phi_1(x, 1), y) \quad \text{per } y \geq 1.$$

Possiamo supporre

$$\phi_1(x, 0) - x > 0, \quad \phi_1(x, 1) - x < 0. \tag{2.1}$$

Siano, inoltre,  $H^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1\}$  e  $H^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$ .

**Lemma 2.2.** *Se  $\phi$  è un omeomorfismo di  $S$  in sé tale che*

(i)  $\phi \circ s = s \circ \phi$ ;

(ii) *fissa separatamente le componenti di bordo;*

(iii)  $\phi$  non ha punti fissi su  $\partial S$ ;

(iv)  $\text{Fix}(\phi) = \emptyset$  oppure  $\text{Fix}(\phi) = \{s^j(F_1) \mid j \in \mathbb{Z}\}$ .

Allora per ogni coppia di cammini  $\gamma, \gamma' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(\phi)$  da  $H^-$  a  $H^+$  si ha  $\text{Ind}_\phi(\gamma) = \text{Ind}_\phi(\gamma')$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo l'estensione di  $\phi$  a tutto  $\mathbb{R}^2$ . Sia  $\gamma$  un cammino da  $H^-$  a  $H^+$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(\phi)$ , è facile verificare che la parte di cammino non contenuta in  $S$  non contribuisce all'indice, quindi l'indice è invariante rispetto alle omotopie che lasciano il primo estremo in  $H^-$  e il secondo in  $H^+$ . Perciò se  $\text{Fix}(\phi) = \emptyset$  si ottiene immediatamente la tesi. Verifichiamo che l'indice non dipende da  $\gamma$  anche se  $\text{Fix}(\phi) = \{s^j(F_1) \mid j \in \mathbb{Z}\}$ ; per far ciò è sufficiente mostrare che l'indice è nullo sui generatori del gruppo fondamentale di  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(\phi)$ . Notiamo che si può supporre  $F_1 \in \{x = 0\}$ . In particolare possiamo scegliere come generatori i rettangoli di base 1 e altezza 2 simmetrici rispetto alle rette della forma  $x = k$  con  $k$  intero e alla retta  $y = \frac{1}{2}$ .

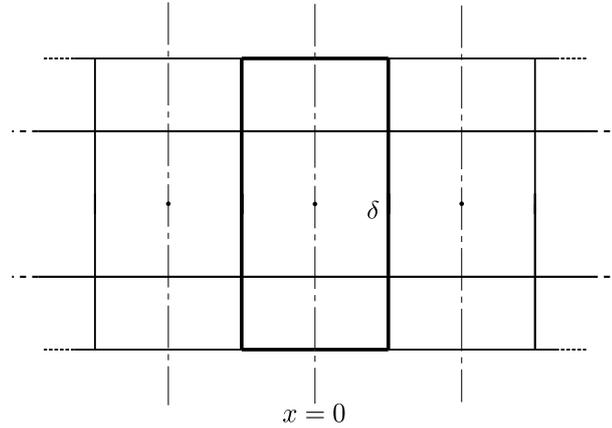


Figura 2.1: Generatori del gruppo fondamentale di  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(\phi)$ .

Allora i contributi delle basi sono nulli, mentre usando la periodicità di  $\phi$ , si trova che i contributi dei segmenti verticali sono uno l'opposto dell'altro. Perciò se  $\delta$  parametrizza il bordo di un rettangolo si ha  $\text{Ind}_\phi(\delta) = 0$ .  $\square$

**Lemma 2.3.** *Se  $\phi$  è un omeomorfismo di  $S$  in sé che conserva l'area, soddisfa la condizione (2.1) (condizione di twist positivo) e vale*

$$\text{Fix}(\phi) = \emptyset \quad \text{oppure} \quad \text{Fix}(\phi) = \{s^j(F_1) \mid j \in \mathbb{Z}\}$$

*esiste un cammino  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(\phi)$  da  $H^-$  a  $H^+$  che realizza  $\text{Ind}_\phi(\gamma) = \pi$ .*

*Dimostrazione.* Nel caso  $\text{Fix}(\phi) = \{s^j(F_1) \mid j \in \mathbb{Z}\}$  possiamo, ancora una volta, supporre che  $F_1 \in \{x = 0\}$ . Costruiamo, quindi, un cammino  $\gamma$  tale che  $\text{Ind}_\phi(\gamma) = \pi$ . Siano

$$W = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid k + \frac{1}{4} \leq x \leq k + \frac{3}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$\tau_\varepsilon : (x, y) \mapsto \left( x, y + \frac{\varepsilon}{2} \left[ |\cos(2\pi x)| - \cos(2\pi x) \right] \right)$$

e

$$\phi_\varepsilon \doteq \tau_\varepsilon \circ \phi.$$

Allora  $\tau_\varepsilon$  è un omeomorfismo che conserva l'area. Infatti se  $(x_1, y_1)$  sono coordinate in arrivo si ha

$$dx_1 \wedge dy_1 = dx \wedge d \left( y + \frac{\varepsilon}{2} \left[ |\cos(2\pi x)| - \cos(2\pi x) \right] \right) = dx \wedge dy.$$

**Lemma 2.4.** *La funzione  $\text{dist}(P, \phi(P))$  ammette minimo positivo in  $W$ .*

*Dimostrazione.* Se  $P \in W$  esiste un intero  $k$  tale che  $P = (\tilde{x} + k, y)$  con  $\tilde{x} \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$  perciò se  $y \geq 0$  e  $y \leq 1$

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, \phi(P)) &= \left\| (\tilde{x} + k, y) - (\phi_1(\tilde{x} + k, y), \phi_2(\tilde{x} + k, y)) \right\| = \\ &= \left\| (\tilde{x} + k, y) - (\phi_1(\tilde{x}, y) + k, \phi_2(\tilde{x}, y)) \right\| = \\ &= \left\| (\tilde{x} - \phi_1(\tilde{x}, y), y - \phi_2(\tilde{x}, y)) \right\| \end{aligned}$$

che è una funzione continua definita sul compatto  $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \times [0, 1]$  e che quindi ammette minimo  $\mu_1 > 0$  in quanto  $\phi$  non ha punti fissi in  $W$ . Se invece  $y \leq 0$  oppure  $y \geq 1$ ,  $\text{dist}(P, \phi(P))$  dipende solo dalla prima componente, quindi ci si riduce al compatto  $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$  e perciò in questa regione ci sarà un minimo  $\mu_2 > 0$ . Dunque  $\text{dist}(P, \phi(P)) \geq \min\{\mu_1, \mu_2\} > 0$ .  $\square$

Quindi se  $0 < \varepsilon < \text{dist}(P, \phi(P))$  per ogni  $P \in W$ , allora  $\text{Fix}(\phi_\varepsilon|_W) = \emptyset$ . Infatti se esistesse  $P \in W$  tale che  $\phi_\varepsilon(P) = P$  si avrebbe

$$\varepsilon \geq \|\phi_\varepsilon(P) - \phi(P)\| = \|P - \phi(P)\| > \varepsilon.$$

Dalla condizione di twist positivo si ottiene subito che se  $\gamma$  va da  $H^-$  a  $H^+$

$$\text{Ind}_{\phi_\varepsilon}(\gamma) = (2k + 1)\pi + \sigma(\varepsilon) \tag{2.2}$$

con  $\sigma(\varepsilon)$  che tende a zero quando  $\varepsilon$  tende a zero.

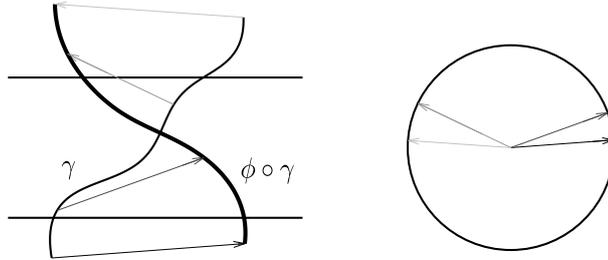


Figura 2.2: Giustificazione intuitiva del fatto che  $\text{Ind}_{\phi_\varepsilon}(\gamma) = (2k + 1)\pi + \sigma(\varepsilon)$ .

Siano

$$D_0 = H^- \setminus \phi_\varepsilon^{-1}(H^-) \quad \text{e} \quad D_j = \phi_\varepsilon^j(D_0) \quad \text{per ogni } j \in \mathbb{Z}$$

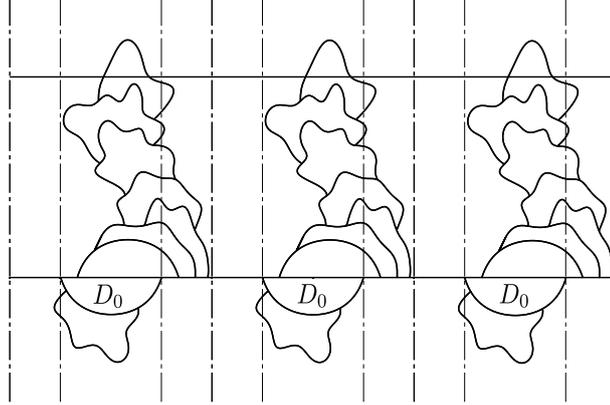


Figura 2.3: Esempio dei  $D_j$ .

Dal momento che  $D_1 \subset \text{Int}(S) \cup H^+$  e  $\phi_\varepsilon(\text{Int}(S) \cup H^+) \subset \text{Int}(S) \cup H^+$  vale  $D_j \subset \text{Int}(S) \cup H^+$  per ogni  $j \geq 1$ . In modo analogo si ottiene  $D_j \subset H^-$  per ogni  $j \leq 0$ . In particolare per  $j > 0$   $D_j \cap D_0 = \emptyset$  e applicando potenze di  $\phi_\varepsilon$  si ottiene  $D_j \cap D_k = \emptyset$  appena  $j \neq k$ . Sia, ora,

$$\tilde{D}_j = p(D_j)$$

per ogni  $j \in \mathbb{Z}$ , allora  $\tilde{D}_j \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ , inoltre  $\tilde{D}_j \cap \tilde{D}_k = \emptyset$  se  $j \neq k$ . Infatti se fosse  $\tilde{D}_j \cap \tilde{D}_k \neq \emptyset$  esisterebbe  $h \in \mathbb{Z}$  tale che  $s^h(D_j) \cap D_k \neq \emptyset$  per  $j \neq k$  e utilizzando ripetutamente la relazione  $\phi_\varepsilon \circ s = s \circ \phi_\varepsilon$  si avrebbe

$$\begin{aligned} \emptyset \neq s^h \circ \phi_\varepsilon^j(D_0) \cap \phi_\varepsilon^k(D_0) &= s^{h-1} \circ \phi_\varepsilon^j \circ s(D_0) \cap \phi_\varepsilon^k(D_0) = \\ &= s^{h-1} \circ \phi_\varepsilon^j(D_0) \cap \phi_\varepsilon^k(D_0) = \dots = \phi_\varepsilon^j(D_0) \cap \phi_\varepsilon^k(D_0) = \\ &= D_j \cap D_k = \emptyset. \end{aligned}$$

Dal fatto che l'area di  $C$  è 1 e  $\phi$  conserva l'area si ottiene

$$m(\tilde{D}_j) = m(\tilde{D}_1) > 0 \quad \text{se} \quad \tilde{D}_j \subset C.$$

Quindi i  $\tilde{D}_j$  non possono essere tutti contenuti in  $C$  e di conseguenza i  $D_j$  non possono essere tutti contenuti in  $S$ . Poiché  $D_n \subset \phi_\varepsilon^n(H^-)$  esiste un intero  $N > 0$  tale che

$$\phi_\varepsilon^N(H^-) \cap H^+ \neq \emptyset.$$

Sia  $P_N$  un punto in  $\phi_\varepsilon^N(H^-)$  con la massima componente  $y$ . Osserviamo che tale massimo esiste in quanto grazie alla periodicità di  $\phi$  ci possiamo ridurre al compatto  $\phi_\varepsilon^N(H^-) \cap \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, y \geq 0\}$ . Definiamo

$$P_j = \phi_\varepsilon^{j-N}(P_N)$$

allora  $P_{j+1} = \phi_\varepsilon(P_j)$ ; i punti  $P_{-1}$  e  $P_0$  appartengono al semipiano  $H^-$ , mentre i punti  $P_N$  e  $P_{N+1}$  al semipiano  $H^+$ . Consideriamo l'applicazione  $t \mapsto \gamma(t)$  con

$$\gamma(t) = tP_0 + (1-t)P_{-1} \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1;$$

ponendo

$$\gamma(t+j) = \phi_\varepsilon^j \circ \gamma(t) \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1, \quad j = 1, \dots, N+1$$

si ha che  $\gamma(t)$  è definita per  $0 \leq t \leq T = N+2$  e connette i punti

$$\gamma(0) = P_{-1}, \quad \gamma(T) = P_{N+1}.$$

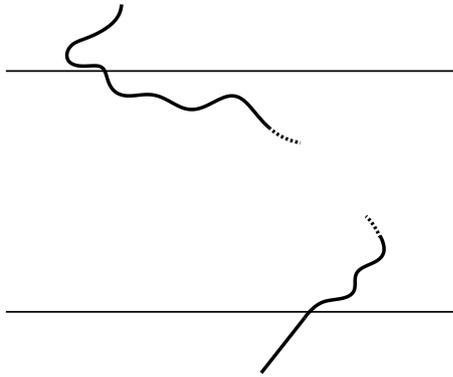


Figura 2.4: Il cammino  $\gamma$ .

Inoltre per costruzione la curva definita ristretta a  $[0, T-1]$  è interamente contenuta nella striscia delimitata dalle rette parallele all'asse  $x$  passanti per  $P_{-1}$  e per  $P_N$ . Ovviamente  $\gamma$  è semplice, cioè

$$\gamma(t) \neq \gamma(s) \quad \text{per ogni } 0 \leq t < s \leq T.$$

Infatti

$$\{\gamma(t) \mid j \leq t < j+1\} \subset D_j$$

e poiché i  $D_j$  sono disgiunti si può avere

$$\gamma(t) = \gamma(s) \quad \text{solo se } j \leq t < s \leq j+1,$$

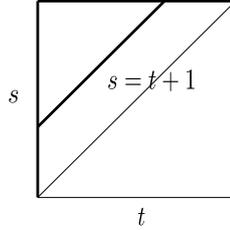
ma questa parte di  $\gamma(t)$  è immagine del segmento per  $P_{-1}$  e  $P_0$  tramite l'omeomorfismo  $\phi_\varepsilon^j$  ed è quindi priva di autointersezioni. Sia

$$\Delta = \left\{ (t, s) \in [0, T-1] \times [0, T-1] \mid s > t \right\}$$

allora è ben definita l'applicazione  $\sigma : \Delta \rightarrow S^1$

$$(t, s) \mapsto \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{\|\gamma(s) - \gamma(t)\|}$$

osserviamo inoltre che se  $s = t + 1$  vale  $\gamma(s) = \phi_\varepsilon(\gamma(t))$ , quindi calcolare  $\text{Ind}_{\phi_\varepsilon}(\gamma)$  equivale a calcolare il numero di rotazione di  $\sigma(t, t + 1)$  con  $t \in [0, T - 1]$ .



Il cammino  $\sigma(t, t + 1)$  è omotopo a  $\sigma(0, s) * \sigma(t, T)$  dove  $s \in [1, T]$  e  $t \in [0, T - 1]$ . È sufficiente quindi calcolare  $\omega(\sigma(0, s) * \sigma(t, T))$ . Il versore  $\sigma(0, s)$  giace sempre nel semipiano positivo quindi  $0 \leq \text{Ind}(\sigma(0, s)) \leq \pi$ . Grazie alla scelta fatta per  $P_N$  possiamo usare la stessa stima per  $\sigma(t, T)$ . Abbiamo così ottenuto

$$0 < \text{Ind}_{\phi_\varepsilon}(\gamma) < 2\pi.$$

Dal momento che data una famiglia di omeomorfismi a un parametro l'indice varia con continuità con esso, per  $\varepsilon$  che tende a zero si ha

$$\text{Ind}_\phi(\gamma) = \pi.$$

□

Consideriamo la riflessione  $\rho : (x, y) \mapsto (-x, y)$  e definiamo

$$\eta \doteq \rho^{-1} \circ \phi \circ \rho$$

allora  $\rho : \text{Fix}(\eta) \rightarrow \text{Fix}(\phi)$  è una bigezione e  $\eta$  soddisfa le ipotesi del teorema. Infatti da  $\phi_2(x, 0) = 0$  e  $\phi_2(x, 1) = 1$  si ottiene  $\eta(\mathbb{R} \times \{i\}) = \mathbb{R} \times \{i\}$  per  $i = 0, 1$ . Resta da verificare che  $\eta \circ s = s \circ \eta$  e che la mappa è twist. È chiaro invece che  $\eta$  conserva l'area perché composizione di mappe con tale proprietà. Poiché  $s \circ \phi = \phi \circ s$

$$\begin{aligned} \eta \circ s &= \left( -\phi_1(-x - 1, y), \phi_2(-x - 1, y) \right) = \\ &= \left( -\phi_1(-x, y) + 1, \phi_2(-x, y) \right) = \\ &= s \circ \eta. \end{aligned}$$

Infine verifichiamo che  $\eta$  è twist:

$$(-\phi_1(-x, 0) - x)(-\phi_1(-x, 1) - x) = (\phi_1(-x, 0) + x)(\phi_1(-x, 1) + x) < 0$$

Notiamo che il twist di  $\eta$  è opposto a quello di  $\phi$ , in particolare  $\eta$  non soddisfa la condizione (2.1).

**Lemma 2.5.** *Se  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  estende un omeomorfismo della striscia in sé,  $\text{Fix}(\phi) = \emptyset$  oppure  $\text{Fix}(\phi) = \{s^j(F_1) \mid j \in \mathbb{Z}\}$  e  $\gamma$  è un cammino in  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Fix}(\phi)$  da  $H^-$  a  $H^+$ , allora*

(i)  $\text{Ind}_\eta(\gamma) = -\text{Ind}_\phi(\gamma)$

(ii)  $\text{Ind}_{\phi^{-1}}(\gamma) = \text{Ind}_\phi(\gamma)$ .

*Dimostrazione.* Sotto tali ipotesi abbiamo già dimostrato che l'indice “non dipende” dal cammino. Possiamo perciò supporre che  $\gamma$  sia la curva parametrizzata da  $t \mapsto (\frac{1}{2}, t)$  con  $t \in [0, 1]$ . Indichiamo inoltre con  $\tilde{\alpha}_1$  e  $\tilde{\alpha}_2$  i sollevamenti rispettivamente dei cammini

$$\alpha_1 = \frac{\eta \circ \gamma - \gamma}{\|\eta \circ \gamma - \gamma\|} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{\phi \circ \gamma - \gamma}{\|\phi \circ \gamma - \gamma\|}.$$

Poiché i cammini  $\eta \circ \gamma$  e  $\phi \circ \gamma$  sono uno il simmetrizzato dell'altro rispetto alla retta  $x = \frac{1}{2}$  si ottiene per ogni  $t \in [0, 1]$  la seguente configurazione

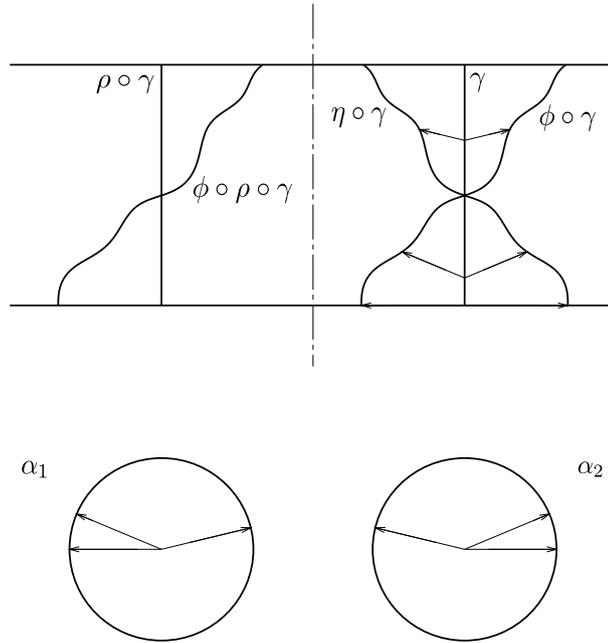


Figura 2.5: I cammini  $\eta \circ \gamma$  e  $\phi \circ \gamma$ .

cioè  $\tilde{\alpha}_1(t) = \pi - \tilde{\alpha}_2(t)$ , quindi

$$\begin{aligned} \text{Ind}_\eta(\gamma) &= \omega(\alpha_1) = \\ &= \tilde{\alpha}_1(1) - \tilde{\alpha}_1(0) = \\ &= \pi - \tilde{\alpha}_2(1) - (\pi - \tilde{\alpha}_2(0)) = \\ &= -\omega(\alpha_2) = \\ &= -\text{Ind}_\phi(\gamma). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo punto è sufficiente osservare che se  $\gamma$  va da  $H^-$  a  $H^+$  allora anche  $\phi^{-1}(\gamma)$  ha la stessa proprietà. Dalla Proposizione 1.4 segue

$$\text{Ind}_\phi(\gamma) = \text{Ind}_\phi(\phi^{-1}(\gamma)) = \text{Ind}_{\phi^{-1}}(\gamma).$$

□

Infine se  $\phi$  soddisfa la condizione (2.1) allora la soddisfa anche  $\eta^{-1}$ . Utilizzando i lemmi appena dimostrati troviamo

$$\pi = \text{Ind}_{\eta^{-1}}(\gamma) = \text{Ind}_\eta(\gamma) = -\text{Ind}_\phi(\gamma) = -\pi$$

perciò  $\phi$  deve avere almeno due punti fissi non equivalenti. □

## 2.2 Controesempio

In questa sezione mostreremo che l'ipotesi  $\psi$  conserva l'area è necessaria, infatti togliendo tale ipotesi si riescono a costruire omeomorfismi twist del cilindro in sé che non hanno punti fissi. Sul cilindro  $C$  fissiamo coordinate  $(u, v)$  con  $u \in \mathbb{T}$  e  $v \in [0, 1]$  e consideriamo la seguente mappa

$$\psi : (u, v) \mapsto \left( u + \varepsilon \left( \frac{1}{2} - v \right), v^2 \right)$$

con  $\varepsilon \not\equiv 0 \pmod{1}$ . Osservando che  $\psi$  è continua ed esiste l'inversa  $\psi^{-1} : (u, v) \mapsto \left( u - \varepsilon \left( \frac{1}{2} - v \right), \sqrt{v} \right)$ , anch'essa continua, si ottiene che  $\psi$  è un omeomorfismo. Inoltre  $\psi$  è twist, in quanto

$$\psi(u, 0) = \left( u + \frac{\varepsilon}{2}, 0 \right) \quad \text{e} \quad \psi(u, 1) = \left( u - \frac{\varepsilon}{2}, 1 \right).$$

Tale omeomorfismo, però, non conserva l'area. Siano, infatti,  $(u_1, v_1)$  coordinate in arrivo, allora vale

$$du_1 \wedge dv_1 = d \left( u + \varepsilon \left( \frac{1}{2} - v \right) \right) \wedge dv^2 = 2v du \wedge dv.$$

Ci resta da provare che  $\psi$  così definita non può avere punti fissi. Supponiamo per assurdo che esiste  $(u, v) \in C$  tale che  $\psi(u, v) = (u, v)$ . Allora da

$$\left( u + \varepsilon \left( \frac{1}{2} - v \right), v^2 \right) = (u, v)$$

si ottiene  $v^2 = v$ , cioè  $v = 0, 1$  e quindi

$$u + \frac{\varepsilon}{2} = u \quad \text{oppure} \quad u - \frac{\varepsilon}{2} = u.$$

Quest'ultima ci dà l'assurdo cercato, dal momento che, in entrambi i casi, si ottiene  $\varepsilon \equiv 0 \pmod{1}$ .

## Capitolo 3

# Applicazioni

Il Teorema 2.1 ha innumerevoli applicazioni. In questo capitolo ne sono illustrate, senza molti dettagli, tre: il Teorema di Birkhoff che riguarda l'esistenza di orbite periodiche su biliardi convessi di  $\mathbb{R}^2$ , un caso particolare del teorema di Lusternik-Schnirelmann (per il risultato generale si veda [4]) sull'esistenza di più geodetiche chiuse su  $S^2$  e il Teorema di Hartmann-Jacobowitz. Si possono trovare, inoltre, esempi di mappe twist e applicazioni del teorema nel libro [6]. Grazie al Teorema 2.1, è possibile dimostrare anche il celebre di Birkhoff-Lewis. Quest'ultimo riguarda l'esistenza di orbite periodiche vicino a un punto di equilibrio ellittico e a un'orbita periodica ellittica non-costante [2].

### 3.1 Infinite orbite periodiche per $\psi$

Come conseguenza del teorema di Poincaré-Birkhoff si possono costruire infinite orbite periodiche per un omeomorfismo  $\psi$  del cilindro in sé.

**Definizione 3.1.** *Un punto  $P \in C$  si dice periodico per  $\psi$  se esiste  $N \geq 1$  tale che  $\psi^N(P) = P$ .*

**Definizione 3.2.** *Per ogni  $P \in C$  chiamiamo l'insieme  $\{\psi^j(P) | j \in \mathbb{Z}\}$  orbita di  $P$ .*

Osserviamo che se  $P$  è periodico l'orbita consta di un numero finito di punti.

**Teorema 3.3.** *Sia  $\psi : C \rightarrow C$  un omeomorfismo che conserva l'area. Allora se esiste un sollevamento  $\phi$  di  $\psi$  che (a meno di sostituire  $x$  con  $-x$ ) soddisfa*

$$\phi_1(x, 1) - x \leq c_1 < c_2 \leq \phi_1(x, 0) - x, \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+,$$

*$\psi$  ammette infinite orbite periodiche nella parte interna di  $C$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\frac{p}{q}$  un qualsiasi razionale tale che

$$c_1 < \frac{p}{q} < c_2. \tag{3.1}$$

Allora la mappa  $s^{-p}\phi^q$  soddisfa la condizione di twist: infatti

$$\phi_1^q(x, 1) - p - x \leq qc_1 - p < 0 < qc_2 - p \leq \phi_1^q(x, 0) - p - x.$$

Quindi per ogni coppia di interi  $p, q$  che soddisfano la condizione (3.1) esiste un punto fisso  $F$  per la mappa  $s^{-p}\phi^q$ . Inoltre se  $p', q'$  è un'altra coppia che soddisfa la condizione (3.1) e  $F'$  è un punto fisso per  $s^{-p'}\phi^{q'}$ , allora  $F$  e  $F'$  non sono equivalenti, cioè  $F' \neq s^j F$  per ogni  $j \in \mathbb{Z}$ . Infatti dal momento che  $s$  commuta con  $\phi$  potremmo concludere, utilizzando le relazioni  $F' = s^j F$  e  $s^{-p'}\phi^{q'}(F') = F'$ , che

$$\phi^{q'}(F) = s^{-j} \circ \phi^{q'}(F') = s^{-j+p'}(F') = s^{p'} F$$

quindi

$$\phi^{qq'}(F) = s^{qp'}(F) = s^{q'p}(F)$$

e per la simmetria in  $\frac{p}{q}$  e  $\frac{p'}{q'}$  avremmo  $qp' = p'q$ . □

## 3.2 Biliardi

Siamo interessati a provare l'esistenza di orbite periodiche su biliardi convessi di  $\mathbb{R}^2$  con bordo differenziabile. A tal proposito enunciamo un risultato dovuto a G.D. Birkhoff.

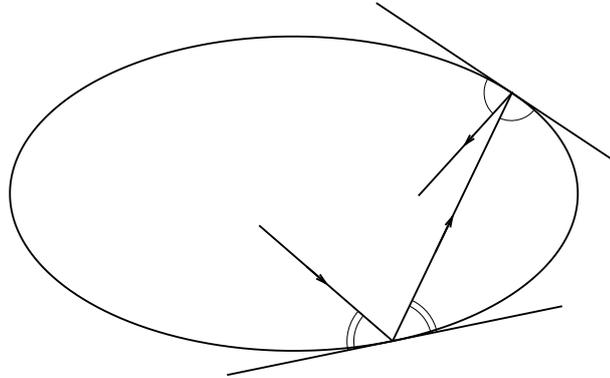


Figura 3.1: Esempio di biliardo.

**Teorema 3.4.** *Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  un convesso limitato con frontiera differenziabile. Allora in  $D$  esistono infinite orbite periodiche.*

*Dimostrazione.* Associamo al biliardo  $D$  una mappa del cilindro in sé, i cui punti periodici corrispondono alle orbite periodiche da noi cercate. Introduciamo quindi delle coordinate. Sia  $s$  il parametro lungo il bordo orientato di  $D$ , parametrizzato per lunghezza d'arco in modo da ottenere  $L(\partial D) = 1$ .

L'angolo che la traiettoria forma con la tangente orientata sarà denotato con  $t$ . Abbiamo così ottenuto la striscia aperta

$$S = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq \pi\}$$

che diventa un cilindro se identifichiamo  $(s, t)$  con  $(s', t)$  se  $s - s' \in \mathbb{Z}$ . Su tale striscia possiamo definire una mappa

$$\phi : (s, t) \mapsto (s_1, t_1)$$

con

$$s_1 = s + f(s, t) \quad \text{e} \quad t_1 = g(s, t).$$

Il punto  $(s_1, t_1)$  è l'intersezione successiva dell'orbita con il bordo di  $D$ . Osserviamo che la funzione  $f$  è definita a meno di costanti additive intere e che la mappa  $\phi$  può essere estesa a un omeomorfismo della striscia chiusa. Infatti se  $t$  tende a zero, la distanza tra i punti  $(s, t)$  e  $(s_1, t_1)$  tende a zero. Ha senso, perciò, porre

$$f(s, 0) = 0 \quad \text{e} \quad g(s, 0) = 0. \quad (3.2)$$

Notiamo che questa scelta fissa la mappa  $f$ . Quindi se  $t$  tende a  $\pi$ ,  $f(s, \pi)$  tende a un qualche intero  $k$  non nullo. Dalla condizione (3.2) si ottiene

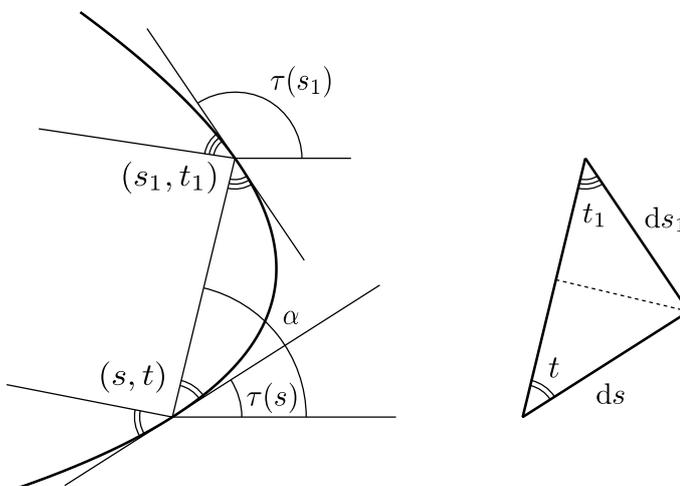
$$f(s, \pi) = 1 \quad \text{e} \quad g(s, \pi) = \pi.$$

È facile vedere che fissando  $s$  e facendo variare  $t \in [0, \pi]$  il punto  $(s_1, t_1)$  si muove in modo iniettivo lungo il bordo di  $D$ . Per applicare il teorema del punto fisso è necessario provare che  $\phi$  conserva l'area.

**Proposizione 3.5.** *La mappa  $\phi$  appena definita conserva l'elemento d'area*

$$\sin(t) dt \wedge ds.$$

*Dimostrazione.* Sia  $\tau(s)$  l'angolo tra la tangente alla curva  $\partial D$  orientata e una direzione fissata (ad esempio quella orizzontale) e sia  $\alpha = t + \tau(s)$ .



Allora dalla figura si evince che

$$\alpha = t + \tau(s) = -t_1 + \tau(s) \quad \text{e} \quad \sin(t)ds = -\sin(t_1)ds_1.$$

Quindi

$$\sin(t)ds \wedge d\alpha = -\sin(t_1)ds_1 \wedge d\alpha, \quad (3.3)$$

sostituendo

$$d\alpha = dt + \tau'(s)ds = -dt_1 + \tau'(s_1)ds_1$$

nell'equazione (3.3) si ottiene la tesi.  $\square$

Effettuando il cambiamento di coordinate

$$\frac{1}{2}r^2 = c - \cos(t), \quad \theta = s, \quad \text{con} \quad c > 1$$

troviamo

$$\sin(t)dt \wedge ds = r dr \wedge d\theta$$

che è l'elemento d'area standard. Inoltre è evidente che i due bordi sono fissati dall'omeomorfismo e che si può applicare il Teorema 3.3. Perciò, dato un qualsiasi razionale  $\frac{p}{q} \in (0, 1)$  esiste un punto fisso per l'omeomorfismo  $s^{-p}\phi^q$ , notiamo che vale  $\phi \circ s = s \circ \phi$ . Chiaramente i punti fissi di tale mappa corrispondono alle orbite chiuse da noi cercate.  $\square$

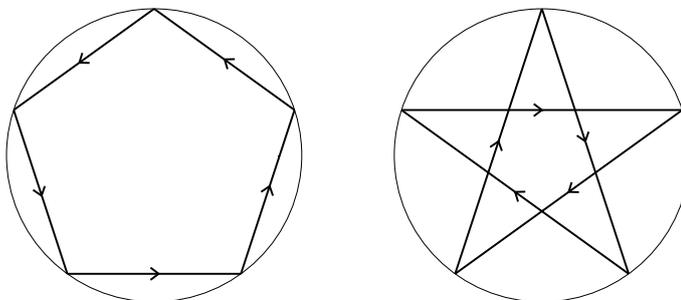


Figura 3.2: Esempio di orbite periodiche su un biliardo circolare con  $\frac{p}{q} = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$ .

### 3.3 Geodetiche chiuse su $S^2$

In questa sezione daremo un'idea della dimostrazione di un caso particolare del teorema di Lusternik-Schnirelmann, mostrando com'è possibile applicare il teorema di Poincaré-Birkhoff per provare l'esistenza di più geodetiche chiuse su una sfera ( $S^2$ ) dotata di una metrica a curvatura positiva.

**Teorema 3.6.** *Sia  $S^2$  una sfera con metrica a curvatura positiva. Allora esistono, su tale sfera, almeno tre geodetiche chiuse.*

*Dimostrazione.* Supponiamo di aver provato l'esistenza di una geodetica  $\gamma$  semplice chiusa (risultato dovuto a G.D. Birkhoff). Allora  $S^2 \setminus \gamma$  consta di due componenti connesse. Nella Figura 3.3 le rappresentiamo rispettivamente come l'emisfero nord e l'emisfero sud. Osserviamo inoltre che  $\gamma$  è omeomorfa a  $S^1$ , e dal momento che una geodetica risolve un'equazione differenziale del secondo ordine possiamo scegliere per ogni  $P \in \gamma$  e per ogni direzione  $v \in T_P^1 S^2 = \{v \in T_P S^2 \mid |v|_P = 1\}$ , una geodetica  $\delta$  tale che  $\delta(0) = P$  e  $\dot{\delta}(0) = v$ . L'esistenza locale di tale geodetica è garantita dal teorema di Cauchy-Lipschitz, mentre quella globale segue dalla compattezza di  $T^1 S^2$ . Sia, ora,

$$X = \{v_P \in T_P^1 S^2 \mid P \in \gamma, v_P \text{ punta a nord}\}.$$

Scegliamo un vettore  $v_P \in X$  e seguiamo la geodetica da esso generata. Grazie all'ipotesi di curvatura positiva si può dimostrare che tale geodetica interseca trasversalmente  $\gamma$  una prima volta in direzione NS e una seconda in direzione SN, sia  $P'$  tale punto di intersezione. Allora è ben definita  $\psi : X \rightarrow X$

$$v_P \mapsto v_{P'}.$$

Notiamo che  $X$  è omeomorfo a  $S^1 \times (0, \pi)$  e  $\psi$  si può estendere per continuità a un omeomorfismo di  $S^1 \times [0, \pi]$ .

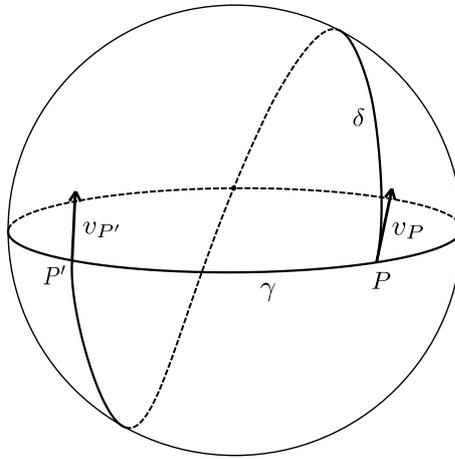


Figura 3.3: *Mappa di Birkhoff.*

Tale omeomorfismo soddisfa le ipotesi del teorema di Poincaré-Birkhoff, in quanto è chiaramente twist e il flusso geodetico conserva l'area. Esistono quindi almeno due punti fissi per  $\psi$  che corrispondono alle geodetiche chiuse cercate.  $\square$

### 3.4 Teorema di Hartman-Jacobowitz

Tale risultato prova l'esistenza di infinite orbite periodiche per particolari equazioni differenziali non lineari del secondo ordine. In questo caso, però, non daremo una dimostrazione dettagliata ma ci limiteremo a costruire la mappa twist e a giustificare il fatto che si può applicare il teorema di Poincaré-Birkhoff. Per i dettagli si veda [7].

**Teorema 3.7** (di Hartman-Jacobowitz). *Sia  $f(t, x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$  tale che*

$$(i) \quad f(t+1, x) = f(t, x);$$

$$(ii) \quad f(t, 0) = 0;$$

$$(iii) \quad \frac{f(t, x)}{x} \rightarrow +\infty \text{ per } x \rightarrow \pm\infty \text{ uniformemente in } t.$$

Allora l'equazione differenziale

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(t, x) = 0 \tag{3.4}$$

ha infinite soluzioni periodiche di periodo 1. Più precisamente esiste un intero  $N_0$  tale che per ogni  $N \geq N_0$  la suddetta equazione ha esattamente  $2N$  zeri in  $[0, 1)$ . Inoltre se  $n_0$  è il numero di zeri di una soluzione non banale  $y(t)$  di

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial f(t, 0)}{\partial x} = 0$$

in  $[0, 1)$ , si può scegliere  $N_0$  come il più piccolo intero maggiore o uguale a  $\frac{n_0}{2} + 1$ .

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $\Phi^t(x_0, y_0)$  la soluzione del sistema dinamico associato all'equazione (3.4) con condizione iniziale  $(x_0, y_0)$ . Consideriamo la seguente mappa

$$\phi : (x_0, y_0) \mapsto \Phi^1(x_0, y_0).$$

Allora  $\phi$  conserva l'area. Questo segue dal fatto che l'equazione (3.4) può essere scritta come un sistema Hamiltoniano

$$\dot{x} = H_y(t, x, y), \quad \dot{y} = -H_x(t, x, y)$$

dove

$$H(t, x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x f(t, u)du.$$

Inoltre  $\phi$  ha l'origine come punto fisso dal momento che  $X \equiv 0$  è soluzione. Passiamo in coordinate polari e consideriamo la "corona circolare" che ha come bordo interno l'origine e come bordo esterno una circonferenza di raggio  $R > 0$ . Osserviamo che tale bordo potrebbe non essere invariante per  $\phi$ , tuttavia si può dimostrare che se  $R$  è sufficientemente grande la condizione di twist (in un senso un po' più generale di quello usato precedentemente) è soddisfatta. Si

può, quindi, applicare una versione del teorema del punto fisso. Notiamo che nell'argomentazione precedente abbiamo tralasciato, tra gli altri, un dettaglio abbastanza rilevante: la buona definizione di  $\phi$ . Infatti le soluzioni del sistema differenziale potrebbero cessare di esistere per tempi strettamente minori di 1 per qualche condizione iniziale. Si veda [7].  $\square$

# Bibliografia

- [1] G.D.Birkhoff, *Proof of the Poincaré Geometric Theorem*, Transactions of the American Mathematical Society 14, 14-22, 1913.
- [2] G.D.Birkhoff, D.C.Lewis, *On the periodic motions near a given periodic motion of a dynamical system*, Annals of Mathematics 12, 117-133, 1934.
- [3] M.Brown, W.D.Neumann, *Proof of the Poincaré-Birkhoff fixed point theorem*, Michigan Mathematical Journal 24, 21-31, 1977.
- [4] L.Lusternik, L.Schnirelmann, *Sur le problème des trois géodésiques fermées sur les surfaces de genre 0*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, I Math. 189, 269-271, 1929.
- [5] M.Manetti, *Topologia*, Springer, 2008.
- [6] J.N.Mather, G.Forni, *Action minimizing orbits in Hamiltonian systems in Transition to chaos in classical and quantum mechanics*, Springer, 1994.
- [7] J.Moser, E.J.Zehnder, *Notes on Dynamical Systems*, American Mathematical Society, 2005.
- [8] J.Moser, *Proof of a generalized form of a fixed point theorem due to G.D. Birkhoff*, Geometry and Topology, Lectures Notes in Mathematics 597, 464-494, 1977.
- [9] J.H.Poincaré, *Sur un théorème de géométrie*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 33, 375-407, 1912.