

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

# Mappe twist e biliardi

16 luglio 2010

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Candidato

**Luca Asselle**

asselle@mail.dm.unipi.it

Relatore

**Prof. Alberto Abbondandolo**

Università di Pisa

ANNO ACCADEMICO 2009/2010



# Introduzione

Scopo di questa tesi è quello di illustrare le proprietà principali di una classe di diffeomorfismi di  $S^1 \times (a, b)$  in sè che si sollevano a particolari diffeomorfismi di  $\mathbb{R} \times (a, b)$ , detti *applicazioni twist monotone*; tali applicazioni si ritrovano nello studio di diversi problemi matematici. L'attenzione sarà rivolta soprattutto allo studio della dinamica nei biliardi in aperti convessi di  $\mathbb{R}^2$ , i quali possiedono una naturale applicazione twist monotona ricavata a partire dall'applicazione  $b : S^1 \times (0, \pi) \longrightarrow S^1 \times (0, \pi)$  che a una coppia  $(P, \phi)$  (dove  $P$  è un punto del bordo del dominio e  $\phi$  è l'angolo formato con la tangente al bordo da una retta passante per  $P$ ) associa la coppia  $(P', \phi')$  dove  $P'$  è il secondo punto di incontro tra la retta e il bordo e  $\phi'$  è l'angolo formato dalla retta con la tangente al bordo nel punto  $P'$ . Le traiettorie nel biliardo sono completamente determinate dalle orbite dell'applicazione twist monotona, in particolare si corrispondono traiettorie e orbite periodiche. In un biliardo il *numero di rotazione* intuitivamente, almeno nel caso razionale, indica il numero di urti contro il bordo e il numero di giri fatti prima di ripassare dalla stessa posizione (con la stessa velocità); un risultato dovuto a G.D.Birkhoff afferma che, qualsiasi sia il biliardo considerato, per ogni numero di rotazione razionale  $\omega$  compreso tra 0 e 1 (estremi esclusi) esistono almeno due orbite periodiche con numero di rotazione  $\omega$ . Lo stesso risultato vale più in generale per ogni applicazione twist monotona  $f$  e per ogni numero di rotazione nell'intervallo di twist di  $f$ . Il punto centrale della teoria di Aubry-Mather (e anche ciò di cui ci occuperemo) è quello di cercare di capire come (e se) si possa estendere il Teorema di Birkhoff ai numeri di rotazione irrazionali nell'intervallo di twist. Dal momento che per i numeri irrazionali non ha senso parlare di orbite periodiche bisogna per prima cosa cercare di definire un concetto che estenda quello di periodicità ai numeri irrazionali. Una volta fatto questo si vedrà che la risposta alla domanda che ci siamo posti è affermativa; per la precisione vedremo che per ogni numero di rotazione  $\omega$  nell'intervallo di twist di un'applicazione twist monotona esiste un'orbita minimale con numero di rotazione  $\omega$ .

Luca Asselle  
Pisa, Giugno 2010.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Biliardi convessi in <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>3</b>
1.1 Definizioni . . . . .	3
1.2 Orbite periodiche: Esistenza . . . . .	6
1.2.1 Il caso $n = 2$ . . . . .	6
1.2.2 Il caso $n > 2$ . . . . .	8
1.3 Orbite periodiche: Il teorema di Birkhoff . . . . .	10
<b>2 Definizioni ed esempi</b>	<b>12</b>
2.1 Applicazioni twist monotone . . . . .	12
2.2 Il principio variazionale . . . . .	13
2.3 Esempi . . . . .	14
2.3.1 Il modello di Frenkel-Kontorova . . . . .	15
2.3.2 La forma normale di Birkhoff . . . . .	16
<b>3 Insiemi minimizzanti</b>	<b>18</b>
3.1 Caso twist infinito . . . . .	18
3.2 Caso generale . . . . .	23
<b>4 Configurazioni minimali</b>	<b>24</b>
4.1 Definizione . . . . .	24
4.2 Configurazioni periodiche . . . . .	27
4.3 Numero di rotazione . . . . .	28
4.3.1 Numeri di rotazione irrazionali . . . . .	32
4.3.2 Numeri di rotazione razionali . . . . .	33
4.4 Lo spazio dei simboli $\mathcal{S}$ . . . . .	34
4.5 Il teorema del grafico-Lipschitz . . . . .	34
<b>A Richiami di topologia generale</b>	<b>39</b>
A.1 Topologia prodotto e Teorema di Tychonoff . . . . .	39
A.2 La distanza di Hausdorff . . . . .	39
<b>Bibliografia</b>	<b>40</b>

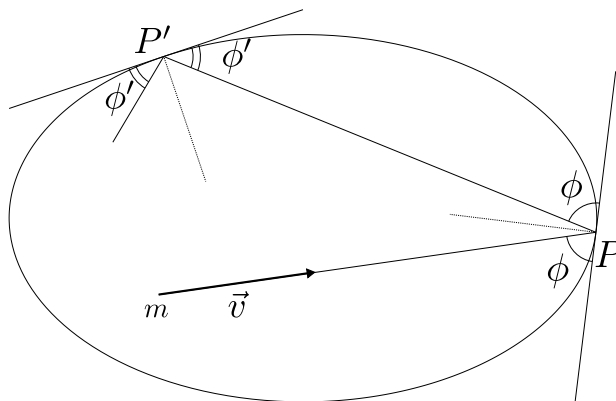
# Capitolo 1

## Biliardi convessi in $\mathbb{R}^2$

### 1.1 Definizioni

Sia  $K$  un aperto convesso, limitato e con bordo di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}^2$ ; in  $K$  consideriamo il moto di una pallina che si muove con velocità costante e che, quando urta il bordo di  $K$ , viene riflessa secondo la regola:

*L'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione.*



**Figura 1.1:** Biliardo in un aperto convesso di  $\mathbb{R}^2$ .

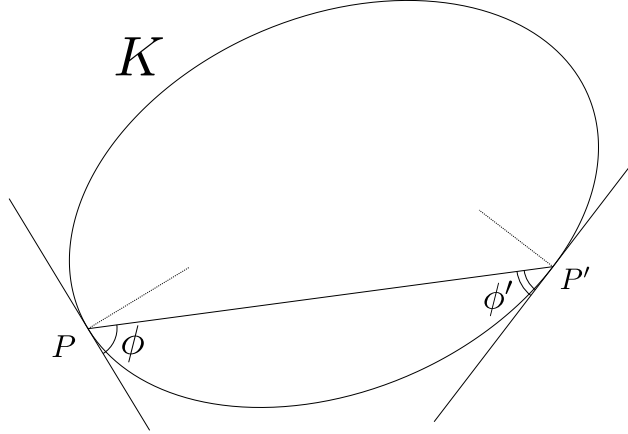
E' chiaro che tenere conto del moto della pallina quando è lontana dal bordo di  $K$  è inutile; basta infatti tenere conto dei punti in cui la sua traiettoria incontra  $\partial K$  e dell'angolo che la sua velocità forma con la tangente al bordo nel punto di incidenza.

In altri termini, se  $P$  è un punto di  $\partial K$  e  $\phi \in (0, \pi)$ , possiamo considerare il segmento all'interno di  $K$  che parte da  $P$  e forma un angolo  $\phi$  con la tangente a  $\partial K$  nel punto  $P$  ( $\phi$  è inteso in senso antiorario), e termina in  $P'$  (secondo punto di incontro tra il segmento e  $\partial K$ ) e forma un angolo  $\phi'$

(inteso in senso orario) con la tangente a  $\partial K$  nel punto  $P'$ . Risulta dunque naturale definire una funzione  $b : \partial K \times (0, \pi) \rightarrow \partial K \times (0, \pi)$  ponendo

$$b : (P, \phi) \mapsto (P', \phi').$$

Osserviamo che l'applicazione può essere estesa per continuità a tutto  $\partial K \times [0, \pi]$  ponendo semplicemente  $b|_{\partial K \times \{0\}} = Id$  e  $b|_{\partial K \times \{\pi\}} = Id$ .



**Figura 1.2:** Definizione dell'applicazione twist monotona per i biliardi.

La dinamica del biliardo in  $K$  è completamente determinata dalla funzione  $b$ , in particolare le traiettorie periodiche nel biliardo corrispondono alle orbite periodiche di  $b$ . Consideriamo il cambiamento di coordinate

$$(x, y) = (s, -\cos \phi) \in \mathbb{R} \times (-1, 1)$$

dove  $s$  è il parametro (multiplo di) arco-lunghezza per  $\partial K$ , tramite cui  $b$  è coniugata a  $g : (s, -\cos \phi) \mapsto (s', -\cos \phi')$ , ossia il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} \times (-1, 1) & \xrightarrow{g} & \mathbb{T} \times (-1, 1) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \partial K \times (0, \pi) & \xrightarrow{b} & \partial K \times (0, \pi) \end{array}$$

è commutativo. Sia  $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \partial K$  parametrizzazione (per multiplo di lunghezza d'arco) antioraria, di classe  $C^1$  e semplice di  $\partial K$ ; definiamo il *principio variazionale* associato ad un biliardo convesso di  $\mathbb{R}^2$

$$h : (x, x') \mapsto -\|\gamma(x) - \gamma(x')\| \quad \text{con } x' \in (x, x + 1).$$

Tale applicazione è dunque definita naturalmente sulla striscia di piano  $A := \{(x, x') \in \mathbb{R}^2 \mid x < x' < x + 1\}$  e si estende banalmente per continuità a tutto  $\mathbb{R}^2$  ponendo  $h(x, x') = 0$  per ogni  $(x, x') \in \mathbb{R}^2 - A$ .

**Prop. 1.0.1** *Siano  $g, h$  come definite sopra; allora  $g(x, y) = (x', y')$  se e solo se  $y = -\partial_1 h(x, x')$  e  $y' = \partial_2 h(x, x')$ .*

**dim.**

Per definizione  $h(x, x') = -\sqrt{\langle \gamma(x) - \gamma(x'), \gamma(x) - \gamma(x') \rangle}$ ; perciò

$$\begin{aligned} \partial_1 h(x, x') &= -\frac{\langle \dot{\gamma}(x), \gamma(x) - \gamma(x') \rangle}{\|\gamma(x) - \gamma(x')\|} = \frac{\langle \dot{\gamma}(x), \gamma(x') - \gamma(x) \rangle}{\|\gamma(x') - \gamma(x)\|} = \\ &= \langle \dot{\gamma}(x), \frac{\gamma(x') - \gamma(x)}{\|\gamma(x') - \gamma(x)\|} \rangle = \cos(\phi) = y; \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \partial_2 h(x, x') &= \frac{\langle \dot{\gamma}(x'), \gamma(x) - \gamma(x') \rangle}{\|\gamma(x) - \gamma(x')\|} = -\frac{\langle \dot{\gamma}(x'), \gamma(x') - \gamma(x) \rangle}{\|\gamma(x') - \gamma(x)\|} = \\ &= -\langle \dot{\gamma}(x'), \frac{\gamma(x') - \gamma(x)}{\|\gamma(x') - \gamma(x)\|} \rangle = -\cos(\phi') = -y'; \end{aligned}$$

Da ciò si deduce facilmente la tesi. □

Dalla proposizione 1.0.1 deduciamo che l'applicazione  $g$  preserva la formula dell'area standard  $dx \wedge dy$  (che nelle coordinate originali è la 2-forma  $d(-\cos \phi) \wedge ds = \sin \phi d\phi \wedge ds$ ). Consideriamo un sollevamento  $f$  di  $g$  al rivestimento universale  $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ ; nelle nuove coordinate, se  $(x', y') = f(x, y)$ , è soddisfatta la condizione di twist  $\frac{\partial x'}{\partial y} > 0$ . Diciamo quindi che la mappa  $f$  è l'*applicazione twist monotona* associata al biliardo all'interno di  $K$ . Possiamo vedere il *numero di rotazione* di un'orbita  $\{(x_i, y_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  di un'applicazione twist monotona  $f$  (anche se effettivamente non abbiamo ancora detto cosa sia) come

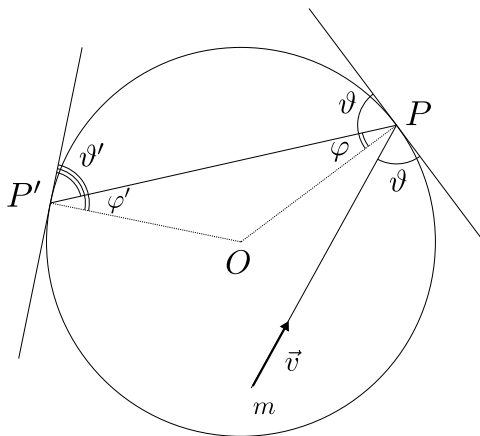
$$\omega := \lim_{|i| \rightarrow \infty} \frac{x_i}{i} = \lim_{|i| \rightarrow \infty} \frac{x_i - x_0}{i}$$

qualora tale limite esista. Il principio variazionale è molto importante per lo studio della dinamica all'interno di un biliardo convesso in  $\mathbb{R}^2$ ; in particolare si vedrà che per ogni  $\omega \in (0, 1)$  esiste un'*orbita minimale* (concetto che verrà precisato in seguito) con numero di rotazione  $\omega$ , per la precisione se  $\omega$  è razionale allora l'orbita è periodica. Tutti questi concetti vanno chiaramente precisati e resi rigorosi; di questo ci occuperemo nei prossimi capitoli, in particolare dedicheremo tutto il capitolo 4 alla definizione e allo studio delle proprietà delle configurazioni minimali e del numero di rotazione.

Un primo esempio molto semplice di biliardo è quello all'interno del cerchio unitario di  $\mathbb{R}^2$ ; dal momento che il cerchio ha simmetria rotazionale,

l'angolo di incidenza  $\vartheta$  che la traiettoria forma con la tangente alla circonferenza si conserva dopo ogni urto. Se vediamo  $S^1$  come il quoziente  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , allora l'applicazione  $b$  è data semplicemente da

$$b : (x, \vartheta) \mapsto (x + 2\vartheta, \vartheta).$$



**Figura 1.3:** Il triangolo  $\widehat{OPP'}$  è isoscele e perciò  $\varphi = \varphi'$  e dunque  $\vartheta = \vartheta'$ .

Perciò se  $\vartheta = \frac{p}{q}\pi$  con  $p, q \in \mathbb{N}$ , cioè se  $\vartheta$  è multiplo razionale di  $\pi$ , allora l'orbita è periodica di periodo  $q$  e compie  $p$  giri all'interno del cerchio; in tal caso diciamo che il *numero di rotazione* dell'orbita è  $\frac{p}{q}$ . Se invece  $\vartheta$  è  $\pi$ -irrazionale, ossia  $\frac{\vartheta}{\pi}$  è un numero irrazionale, allora l'orbita è densa nel cerchio; infatti l'insieme  $\{x + 2n\vartheta \pmod{2\pi} \mid n \in \mathbb{Z}\}$  è denso in  $S^1$ .

## 1.2 Orbite periodiche: Esistenza

Consideriamo ora un arbitrario biliardo convesso di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}^2$ ; fissato un numero naturale  $n$  ci chiediamo se esistano, all'interno del biliardo, orbite periodiche di periodo esattamente  $n$ . Ricordiamo brevemente la definizione geometrica dell'*ellisse*: è il luogo dei punti tale che la somma delle distanze da due punti dati (detti fuochi) è costante e data. Inoltre la proprietà ottica dell'ellisse può essere riformulata come

**Lemma 1.0.1** *In un biliardo ellittico, se la pallina passa per un fuoco, allora dopo la riflessione passa per l'altro fuoco.*

### 1.2.1 Il caso $n = 2$

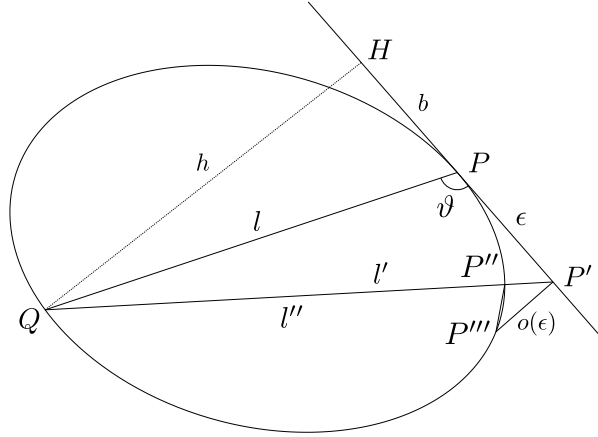
Un'orbita periodica di periodo 2 all'interno di un biliardo convesso è una corda che verifica la condizione di essere perpendicolare al bordo in entrambi gli estremi e si dice *diametro*.



**Prop. 1.0.2** Tra tutte le corde all'interno di un biliardo convesso consideriamo quella di lunghezza massima (che esiste per compattezza); allora questa è un diametro, ovvero rappresenta un'orbita periodica di periodo due.

**dim.**

Basta mostrare che tale corda forma angoli di  $\frac{\pi}{2}$  con il bordo del dominio; se infatti così non fosse allora indichiamo con  $P, Q$  gli estremi della corda, con  $\vartheta$  l'angolo formato dalla corda con la tangente nel punto  $P$ , con  $H$  il piede dell'altezza del punto  $Q$  sulla tangente in  $P$  come indicato in figura.

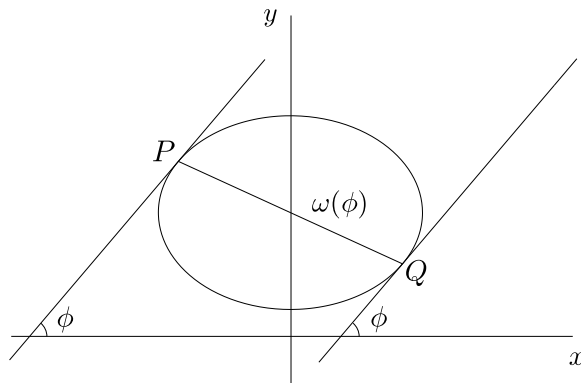


**Figura 1.4:** La corda di lunghezza massima è un'orbita periodica.

Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli  $\widehat{QHP}$  e  $\widehat{QHP''}$  otteniamo che  $l^2 = h^2 + b^2$  e  $l''^2 = h^2 + (b + \epsilon)^2 = h^2 + b^2 + \epsilon^2 + 2b\epsilon$ ; dunque  $l''^2 = l^2 + \epsilon^2 + 2b\epsilon$ . Allo stesso tempo però  $l' = l'' - o(\epsilon)$  per  $\epsilon \rightarrow 0$ , infatti  $l' = l'' - \overline{P'P''}$  con  $\overline{P'P''}$  che è lato di un triangolo  $\widehat{P'P''P''}$  di lunghezza minore rispetto a  $\overline{P''P''}$  (poichè il dominio è convesso) che è  $o(\epsilon)$  per  $\epsilon \rightarrow 0$  quanto è l'altezza del bordo del convesso rispetto alla tangente nel punto  $P$ . Dunque abbiamo che  $l'^2 = l^2 + 2b\epsilon + \epsilon^2 + o(\epsilon^2) - o(\epsilon) = l^2 + 2b\epsilon - o(\epsilon)$ ; ma allora se  $\epsilon$  è sufficientemente piccolo abbiamo che  $l' > l$  il che è assurdo. L'unica possibilità è che  $b$  sia uguale a zero, cioè che l'angolo tra la corda e il bordo nel punto  $P$  sia di  $\frac{\pi}{2}$  e questo conclude la dimostrazione.  $\square$

Osserviamo che nel caso di un'ellisse la corda di lunghezza massima è l'asse maggiore ed inoltre abbiamo un'altra orbita periodica di periodo due, cioè la corda che corrisponde all'asse minore; questo suggerisce l'idea che anche per un qualsiasi dominio convesso in  $\mathbb{R}^2$  ci possa essere un'altra orbita periodica di periodo due. In effetti tale orbita esiste; per costruirla consideriamo una qualsiasi coppia di rette tra loro parallele, tra cui sia interamente contenuta la regione del biliardo, con inclinazione  $\phi$  e avviciniamole tra loro fino a

che entrambe non intersechino il bordo del biliardo; indichiamo con  $\omega(\phi)$  la lunghezza del segmento con estremi individuati dai punti di intersezione tra le due rette e il bordo del dominio.



**Figura 1.5:** *L'applicazione larghezza del dominio nella direzione  $\phi$*

L'applicazione  $\omega : S^1 \rightarrow (0, +\infty)$  definita da  $\phi \mapsto \omega(\phi)$  è continua e dunque, per compattezza, ammette massimo (che corrisponde al diametro trovato in precedenza) e minimo, la seconda orbita periodica di periodo due cercata.

### 1.2.2 Il caso $n > 2$

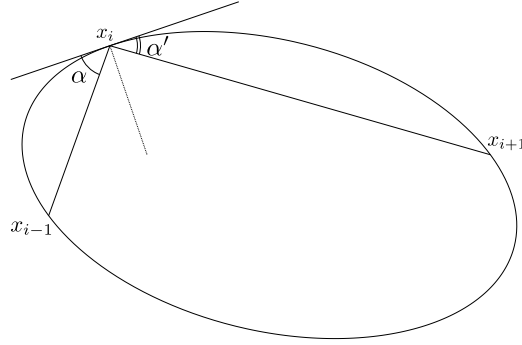
Fissiamo un numero naturale  $n > 2$  e consideriamo la funzione *perimetro* che a una  $n$ -upla ordinata  $x_1 \leq \dots \leq x_n$  di punti del bordo associa la lunghezza del perimetro del poligono convesso con vertici  $x_1, \dots, x_n$ ; è chiaro che in questo modo consideriamo anche i poligoni degeneri con meno di  $n$  lati. D'altra parte però la funzione perimetro è continua su un compatto e quindi ammette massimo; inoltre per la disuguaglianza triangolare tale punto di massimo non può corrispondere a una  $n$ -upla degenere e perciò deve corrispondere a un poligono con effettivamente  $n$  lati. Dimostriamo dunque che un poligono di perimetro massimo determina effettivamente un'orbita periodica.

**Teorema 1.1** *Le  $n$ -uple corrispondenti ai punti di massimo della funzione perimetro individuano orbite di periodo  $n$  nel biliardo  $K$ .*

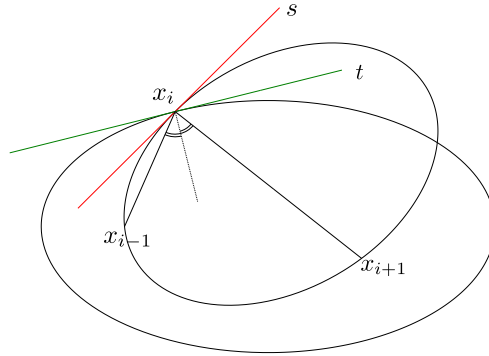
**dim.**

Sia  $(x_1, \dots, x_n)$  una  $n$ -upla corrispondente a un punto di massimo della funzione  $p$ ; per dimostrare che questa individua un'orbita periodica per il biliardo  $K$  ci basta mostrare che presi comunque tre punti consecutivi

$x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$  appartenenti alla  $n$ -upla si ha che gli angoli  $\alpha$  e  $\alpha'$ , formati dai segmenti  $\overline{x_{i-1}, x_i}$  e  $\overline{x_i, x_{i+1}}$  con la tangente al bordo nel punto  $x_i$ , sono uguali.



Mostriamo che l'ellisse con fuochi i punti  $x_{i-1}, x_{i+1}$  e passante per  $x_i$  è tangente a  $\partial K$  nel punto  $x_i$ ; indichiamo con  $t$  la tangente all'ellisse nel punto  $x_i$  e con  $s$  la tangente a  $\partial K$ .



Se per assurdo  $s \neq t$  allora esistono dei punti di  $\partial K$  che stanno nel semipiano (delimitato dalla retta  $t$ ) opposto rispetto a  $x_{i-1}, x_{i+1}$  e dunque, in particolare, stanno fuori dall'ellisse piena; ma allora se  $z$  è un tale punto, per la definizione geometrica dell'ellisse, abbiamo che

$$\overline{x_{i-1}z} + \overline{zx_{i+1}} > \overline{x_{i-1}x_i} + \overline{x_ix_{i+1}}$$

e dunque rimpiazzando  $x_i$  con  $z$  il perimetro del poligono cresce contraddicendo la massimalità. L'unica possibilità perciò è che  $\partial K$  e l'ellisse abbiano la stessa retta tangente nel punto  $x_i$ ; per il Lemma 1.0.1 ciò implica che gli angoli  $\alpha$  e  $\alpha'$  sono uguali.  $\square$

### 1.3 Orbite periodiche: Il teorema di Birkhoff

Nella sezione precedente abbiamo provato che per ogni numero naturale  $n$  esiste un'orbita periodica di periodo esattamente  $n$  per il biliardo all'interno di  $K$ . Ci chiediamo ora se sia possibile arrivare a un risultato, valido in generale per ogni biliardo in un aperto convesso di  $\mathbb{R}^2$ , che stabilisca quale sia il numero minimo di orbite periodiche di un dato periodo  $n$ . E' chiaro da ciò che si è visto nei paragrafi precedenti che il meglio a cui si può aspirare è che il numero minimo sia 2; infatti per l'ellisse il numero di orbite periodiche di periodo 2, corrispondenti agli assi, è esattamente due. Quello che ci riproponiamo ora è dunque di trovare un'altra orbita periodica di periodo  $n$ ; a tale proposito consideriamo  $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizzazione (per multiplo di lunghezza d'arco) del bordo di  $K$  e prendiamo una  $n$ -upla di punti  $(X_1, \dots, X_n) \in (\partial K)^n$  tale che  $X_i \neq X_{i+1}$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  (con la convenzione che  $X_{n+1} = X_1$ ). E' possibile identificare tale  $n$ -upla con la corrispondente  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{T}^n$  definita da  $\gamma(x_i) = X_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Indichiamo perciò con

$$G(\mathbb{T}, n) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{T}^n \mid x_i \neq x_{i+1} \ \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Se  $(x_1, \dots, x_n) \in G(\mathbb{T}, n)$ , allora per ogni  $i \in 1, \dots, n$  esiste  $t_i \in (0, 1)$  (ben definito a meno di scegliere la direzione di rotazione in senso antiorario) tale che  $x_{i+1} = x_i + t_i$  (con la convenzione che  $x_{n+1} = x_1$ ). Dal momento che la configurazione è chiusa la somma  $t_1 + \dots + t_n \in \mathbb{N}$  (più precisamente è un numero compreso tra 1 e  $n - 1$ ); indichiamo tale quantità con  $\rho$  e diciamo che è l'*indice di rotazione* di  $(x_1, \dots, x_n)$ , da non confondersi con il numero di rotazione di cui parleremo nel capitolo 4. Cambiando l'orientazione alla sequenza  $(x_1, \dots, x_n)$  il numero di rotazione da  $\rho$  diventa  $n - \rho$ ; perciò, dato che non distinguiamo una sequenza per la sua orientazione, consideriamo i valori di  $\rho$  compresi tra 1 e  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ . E' possibile dimostrare che

**Lemma 1.1.1** *Lo spazio delle configurazioni  $G(\mathbb{T}, n)$  ha un numero di componenti connesse pari ai numeri di rotazione possibile; inoltre ogni componente connessa di  $G(\mathbb{T}, n)$  è omeomorfa a  $\mathbb{T} \times D^{n-1}$ .*

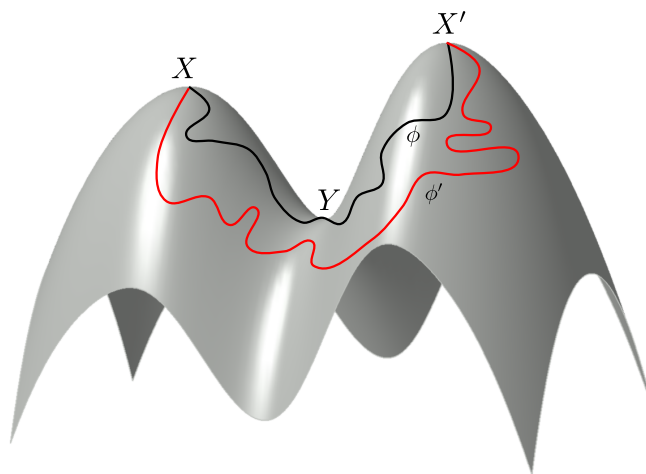
A partite da questo Lemma si può dimostrare che

**Teorema 1.2 (Birkhoff)** *Per ogni numero naturale  $n \geq 2$  e per ogni numero di rotazione  $1 \leq \rho \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  coprimo con  $n$  esistono almeno due distinte orbite periodiche di periodo  $n$  con indice di rotazione  $\rho$ .*

**dim.**

Diamo soltanto un'idea della dimostrazione, rimandando a [10] per ulteriori dettagli. Abbiamo introdotto la condizione che  $\rho$  sia coprimo con  $n$  in quanto altrimenti potremmo ottenere un'orbita periodica di periodo  $n$  che in realtà

è un multiplo di un'orbita periodica di periodo minore. Se indichiamo con  $\mathcal{M}$  la componente connessa di  $G(\mathbb{T}, n)$  corrispondente al numero di rotazione  $\rho$  allora un'orbita periodica si trova ripetendo il discorso fatto in precedenza per il massimo della funzione perimetro estesa alla chiusura di  $\mathcal{M}$  in  $\mathbb{T}^n$ . Per trovare un'altra orbita periodica usiamo il principio del *minimax* (anche se qui si tratta di maxmin); sia  $X := (x_1, \dots, x_n)$  il punto di massimo trovato con il ragionamento precedente, allora  $X' := (x_2, \dots, x_n, x_1)$  è ancora un punto di massimo per la funzione perimetro.



**Figura 1.6:** Applicazione del principio del minimax.

Consideriamo l'insieme  $\Phi = \{\phi \in C([0, 1], \overline{\mathcal{M}}) \mid \phi(0) = X, \phi(1) = X'\}$  dei cammini in  $\overline{\mathcal{M}}$  che connettono  $X$  con  $X'$  e prendiamo

$$c := \max_{\phi \in \Phi} \min_{t \in [0, 1]} p(\phi(t)).$$

Se  $\phi$  e  $t$  realizzano il maxmin allora  $Y := \phi(t) \in \mathcal{M}$  ed è un punto critico della funzione perimetro associato a un'orbita periodica diversa dalla precedente (le cose delicate da far vedere sono che  $Y$  esista effettivamente e che non stia sul bordo di  $\overline{\mathcal{M}}$ , questo segue però dal fatto che la funzione perimetro cresce spostandosi dal bordo di  $\overline{\mathcal{M}}$ ).  $\square$

## Capitolo 2

# Definizioni ed esempi

### 2.1 Applicazioni twist monotone

Indichiamo con  $(\vartheta, y)$  un sistema di coordinate su  $S^1 \times \mathbb{R}$  e con  $(x, y)$  le coordinate standard su  $\mathbb{R}^2$ . Consideriamo un diffeomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R} \times (a, b)$  in sè (ammettiamo anche i casi  $a = -\infty$  e  $b = +\infty$ ) che verifica la condizione di periodicità  $f(x+1, y) = f(x, y) + (1, 0)$ , allora  $f$  induce un diffeomorfismo  $g$  di  $S^1 \times (a, b)$  in sè, ossia il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times (a, b) & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \times (a, b) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T} \times (a, b) & \xrightarrow{g} & \mathbb{T} \times (a, b) \end{array}$$

è commutativo. Nel caso in cui  $a$  (o  $b$ ) sia finito assumiamo che  $f$  si estenda in maniera continua a  $\mathbb{R} \times [a, b]$  con una rotazione di un angolo fissato, cioè che valga

$$f(x, a) = (x + \omega_-, a), \quad f(x, b) = (x + \omega_+, b) \quad (2.1)$$

Nel caso invece in cui  $a = -\infty$  (o  $b = +\infty$ ) possiamo esprimere la condizione (2.1) come segue

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} (f_1(x, y) - x) = \omega_-, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} (f_1(x, y) - x) = \omega_+$$

**Def. 1** Un'applicazione twist monotona è un diffeomorfismo di classe  $C^1$   $f : \mathbb{R} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \times (a, b)$ ,  $f : (x, y) \mapsto (x', y')$  che soddisfa le proprietà:

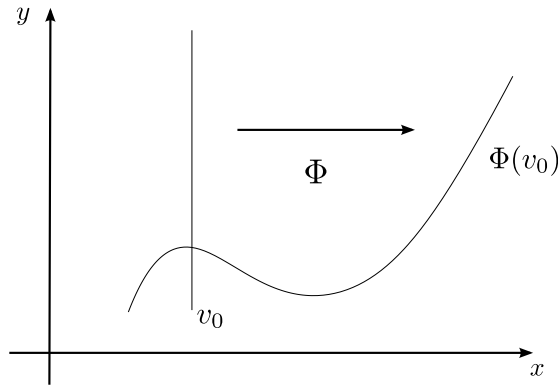
- 1)  $f(x+1, y) = f(x, y) + (1, 0)$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R} \times (a, b)$ ;
- 2)  $f$  preserva l'area e l'orientazione;

3)  $f$  preserva il bordo di  $\mathbb{R} \times (a, b)$ , ossia  $y' \rightarrow a$  (risp.  $y' \rightarrow b$ ) se  $y \rightarrow a$  (risp.  $y \rightarrow b$ );

4) Vale la condizione (2.1);

5)  $f$  soddisfa una condizione di twist positivo monotono, cioè  $\frac{\partial x'}{\partial y} > 0$ ;

6)  $f$  è esatta, ovvero esiste una funzione  $h \in C^2(V) \cup C^0(\bar{V})$ , dove  $V$  è la striscia di piano definita da  $V := \{(x, x') \in \mathbb{R}^2 \mid \omega_- + x < x' < \omega_+ + x\}$ , tale che  $y'dx' - ydx = dh(x, x')$ ;



**Figura 2.1:** La condizione di twist.

L'intervallo  $(\omega_-, \omega_+) \subseteq \mathbb{R}$  (che può essere infinito) è detto invece *intervallo di twist* di  $f$ , per esempio nel caso dei biliardi l'intervallo di twist è  $(n, n+1)$  dove  $n \in \mathbb{Z}$  dipende dal sollevamento scelto.

## 2.2 Il principio variazionale

L'applicazione  $h$  che compare nella condizione 6) si dice *principio variazionale* (o funzione generatrice) associata all'applicazione twist monotona  $f$ . Come già detto  $h$  è tale che

$$dh(x, x') = y'dx' - ydx \quad (2.2)$$

La funzione generatrice è unica a meno di costanti additive e verifica la condizione di periodicità

$$h(x+1, x'+1) = h(x, x') \text{ per ogni } (x, x') \in \bar{V}.$$

Inoltre  $h$  è costante su  $\partial V$  e l'equazione (2.2) è equivalente a

$$\begin{cases} y = -\partial_1 h(x, x'); \\ y' = \partial_2 h(x, x'); \end{cases} \iff f(x, y) = (x', y') \quad (2.3)$$

Infine la condizione di twist in termini di  $h$  si traduce con

$$\partial_{12} h(x, x') < 0$$

Una doppia applicazione del teorema di Lagrange ci dice che

$$h(\xi, \xi') + h(x, x') - h(\xi, x') - h(x, \xi') < 0 \text{ se } \xi < x, \xi' < x' \quad (2.4)$$

Osserviamo che un'orbita  $\{(x_i, y_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  di un'applicazione twist monotona è completamente determinata dalla successione  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  in quanto, per la condizione (2.3), abbiamo

$$y_i = \partial_2 h(x_{i-1}, x_i) = -\partial_1 h(x_i, x_{i+1}).$$

Allo stesso tempo una successione  $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  corrisponde a un'orbita di un'applicazione twist monotona  $f$  se e solo se  $\partial_2 h(\xi_{i-1}, \xi_i) + \partial_1 h(\xi_i, \xi_{i+1}) = 0$  per ogni  $i \in \mathbb{Z}$  (si veda per la dimostrazione l'esempio 2.3.1). Perciò, almeno ad un livello formale, le orbite di un'applicazione twist monotona possono essere viste come punti critici su  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  del funzionale azione

$$\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{i \in \mathbb{Z}} h(\xi_i, \xi_{i+1}).$$

Riprenderemo questi discorsi in modo più rigoroso nei prossimi capitoli.

## 2.3 Esempi

Le applicazioni twist monotone non sono così artificiali come potrebbe sembrare; esse infatti compaiono in numerose situazioni (abbiamo già visto nel capitolo 1 il caso dei biliardi), a volte inaspettate e determinate unicamente da un'opportuna scelta delle coordinate. L'esempio più semplice è ciò che si indica con il nome di *mappa twist integrabile*, la quale, per definizione, preserva la seconda coordinata. La proprietà di conservare l'area implica che una mappa twist integrabile sia della forma

$$f(x, y) = (x + \psi(y), y), \quad \text{con } \psi' > 0.$$

Il principio variazionale associato (a meno di costante additiva) è dato da

$$h(x, x') = \phi(x' - x), \quad \text{con } \phi' = \psi^{-1}.$$



Un primo esempio (e in un certo senso il più semplice) di mappa twist monotona non integrabile è dato dalla cosiddetta *mappa standard*

$$f : (x, y) \mapsto \left(x + y + \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x, y + \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x\right)$$

dove  $k \geq 0$  è un parametro. Tale mappa è stata ed è ancora oggi oggetto di importanti studi analitici e numerici; immagini molto famose illustrano il passaggio dall'integrabilità ( $k = 0$ ) al caos ( $k \sim 10$ ).

Andiamo ora a studiare più da vicino altri due esempi di applicazioni twist monotone molto importanti: il Modello di Fraenkel-Kontorova e la Forma Normale di Birkhoff.

### 2.3.1 Il modello di Frenkel-Kontorova

Un importante esempio di applicazione twist monotona nasce dalla modellizzazione di Frenkel-Kontorova dei solidi; rappresentiamo un cristallo lineare come una sequenza biinfinita di numeri reali (detta configurazione)  $X = (\dots, x_i, \dots)$ , corrispondente alle posizioni degli atomi, tale che sia minima la quantità  $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(x_i, x_{i+1})$  (detta energia) dove  $h$  è la funzione generatrice ed è data da

$$h(x, y) = \frac{(x - y)^2}{2} + k \sin(2\pi x) \quad \text{dove } k \in \mathbb{R}.$$

L'energia non è in generale ben definita però si può dire lo stesso che una sequenza  $X$  minimizza l'energia se per ogni configurazione  $Y = (\dots, y_i, \dots)$  che differisce da  $X$  solo per un numero finito di indici si ha che

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} [h(y_i, y_{i+1}) - h(x_i, x_{i+1})] \geq 0$$

(in realtà si tratta di una somma finita). Diciamo inoltre che  $X$  è una configurazione *stazionaria* se per ogni  $i \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [h(x_{i-1}, x_i) + h(x_i, x_{i+1})] = 0$$

(tale condizione si può ottenere in modo formale derivando  $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(x_i, x_{i+1})$  e ponendo il risultato uguale a zero). Una configurazione che rappresenta il modello di un cristallo, cioè una configurazione che minimizza l'energia, è anche stazionaria; infatti se  $Y_t := (\dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots)$  allora la quantità  $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} [h(y_i, y_{i+1}) - h(x_i, x_{i+1})]$  è uguale a

$$h(x_{i-1}, x_i + t) + h(x_i + t, x_{i+1}) - h(x_{i-1}, x_i) - h(x_i, x_{i+1}) \geq 0$$

per ogni  $t \in \mathbb{R}$  in quanto  $X$  minimizza l'energia; ma allora la configurazione verifica la proprietà di stazionarietà perchè il punto considerato è di minimo per la funzione  $h(x_{i-1}, x_i) + h(x_i, x_{i+1})$ . Definiamo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ponendo

$$(x, y) \xrightarrow{f} (x', y') \iff \begin{cases} y = -\partial_1 h(x, x'); \\ y' = \partial_2 h(x, x'); \end{cases}$$

Tale mappa preserva area e orientazione ed è esatta; la particolare espressione del principio variazionale ci dice inoltre che l'applicazione  $f$  verifica la condizione di periodicità  $f(x+1, y) = f(x, y) + (1, 0)$ , perciò  $f$  passa al quoziente e induce un diffeomorfismo  $g : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$ .

Infine se per ogni configurazione stazionaria definiamo

$$y_i := -\partial_1 h(x_i, x_{i+1}) = \partial_2 h(x_{i-1}, x_i) \quad \text{per ogni } i \in \mathbb{Z}$$

allora  $f(x_i, y_i) = (x_{i+1}, y_{i+1})$ , cioè  $(\dots, (x_i, y_i), \dots)$  è un'orbita per  $f$ . In altre parole abbiamo una bigezione tra le configurazioni stazionarie di  $h$  e le orbite di  $f$ ; questo discorso verrà ripreso ampiamente nei prossimi capitoli.

### 2.3.2 La forma normale di Birkhoff

Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto, un'applicazione di classe  $C^1$  che conserva area e orientazione e sia  $P$  un punto fisso per  $f$ . Sia  $\tau := \lambda + \mu$  la somma degli autovalori di  $df(P)$  (è chiaro che  $\lambda\mu = 1$ ); allora:

- Se  $|\tau| < 2$  diciamo che il punto  $P$  è un punto *ellittico* e corrisponde al caso in cui  $\lambda$  e  $\mu$  sono autovalori complessi coniugati (non reali);
- Se  $|\tau| = 2$  diciamo che il punto  $P$  è un punto *parabolico*;
- Se  $|\tau| > 2$  diciamo che il punto  $P$  è un punto *iperbolico*;

Gli ultimi due casi corrispondono ad autovalori reali e, in particolare, il caso di punto fisso parabolico si può verificare solo se i due autovalori sono entrambi 1 o -1.

**Teorema 2.1 (Forma normale di Birkhoff)** *Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  un aperto e sia  $P$  un punto fisso ellittico per un'applicazione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  di classe  $C^\infty$  che preserva area e orientazione. Allora esistono dei coefficienti  $\beta_i \in \mathbb{R}$  e un sistema di coordinate locali  $(\xi, \eta)$  centrato in  $P$  e di classe  $C^\infty$  tali che, se  $\zeta := \xi + i\eta$  e  $\rho := \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ , si ha  $f(\zeta) = \zeta'$  dove*

$$\zeta' := \zeta e^{2\pi i(\beta_0 + \beta_1 \rho^2 + \dots + \beta_n \rho^{2n})} + O(\rho^q) \quad \text{con } n = \lfloor \frac{q-2}{2} \rfloor$$

se  $\lambda$  autovalore di  $df(P)$  è una radice  $q$ -esima dell'unità, mentre

$$\zeta' := \zeta e^{2\pi i \sum_{j=0}^{+\infty} \beta_j \rho^{2j}}$$

se  $\lambda$  autovalore di  $df(P)$  non è una radice  $q$ -esima dell'unità per nessun  $q$ .

Per la dimostrazione si rimanda a [3]; l'applicazione  $N : \zeta \mapsto \zeta'$  si dice *forma normale* di  $f$ . Nel caso in cui  $\lambda$  sia una radice  $q$ -esima dell'unità dunque  $f$  è somma della sua forma normale e di un resto che è non più grande di  $O(\rho^q)$ . I  $\beta_i$  con  $i > 0$  sono detti *invarianti di Birkhoff* di  $f$ . Dal momento che i  $\beta_i$  sono reali

$$|e^{2\pi i(\beta_0 + \beta_1 \rho^2 + \dots + \beta_n \rho^{2n})}| = 1$$

e questo ci dice che le circonferenze  $\rho = c \in \mathbb{R}$  sono invarianti per  $N$ ; inoltre  $e^{2\pi i \beta_0}$  è autovalore per  $df(P)$  e se almeno uno tra gli invarianti di Birkhoff di  $f$  è diverso da zero allora  $f$  è un'applicazione twist monotona in un intorno sufficientemente piccolo di  $P$ . In particolare, se  $U$  è un intorno sufficientemente piccolo di  $P$ , allora la mappa  $\Phi : (\xi, \eta) \mapsto (\vartheta, \rho^2)$  è un'immersione di  $U - \{P\}$  in  $S^1 \times \mathbb{R}$ , dove  $\vartheta := \arctan(\frac{\eta}{\xi})$ ; indichiamo con  $W := \Phi(U - \{P\}) \subseteq S^1 \times \mathbb{R}$  e definiamo  $g := \Phi \circ f \circ \Phi^{-1} : W \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ , se il primo degli invarianti di Birkhoff non nullo è positivo allora  $(W, g)$  è un'applicazione twist monotona, altrimenti lo è  $(gW, g^{-1})$ .

## Capitolo 3

# Insiemi minimizzanti

### 3.1 Caso twist infinito

Sia  $h$  un principio variazionale definito su tutto  $\mathbb{R}^2$  (dunque l'applicazione twist monotona associata ha come intervallo di twist tutto  $\mathbb{R}$ ). Data un'applicazione  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (debolmente) crescente che verifica la condizione di periodicità  $\phi(t+1) = \phi(t) + 1$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  indichiamo con

$$\Gamma_\psi := \{(x, x') \mid \psi(x-0) \leq x' \leq \psi(x+0)\}$$

il suo grafico esteso. Osserviamo che i grafici estesi coincidono, cioè  $\Gamma_\phi = \Gamma_\psi$ , se e solo se  $\phi \equiv \psi$  tranne al più nei punti di discontinuità che a sua volta equivale a dire che  $\phi \equiv \psi$  tranne che in una quantità al più numerabile di punti. Indichiamo perciò con  $\hat{Y}$  il quoziente dello spazio delle funzioni  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (debolmente) crescenti che verificano la condizione di periodicità  $\phi(t+1) = \phi(t) + 1$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  per la relazione di equivalenza che identifica due funzioni se e solo se hanno lo stesso grafico esteso. In questo contesto indichiamo con  $d_H(\phi, \psi)$  la distanza di Hausdorff tra i grafici estesi di  $\phi, \psi$  (si veda l'appendice per ulteriori dettagli). Per la condizione di periodicità la distanza di Hausdorff tra  $\Gamma_\phi$  e la diagonale  $\Gamma_{id}$  è finita; dunque  $(\hat{Y}, d_H)$  è uno spazio metrico che si identifica con un sottospazio dello spazio di tutti i chiusi di  $\mathbb{R}^2$  aventi distanza di Hausdorff finita dalla diagonale. Osserviamo che se  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \hat{Y}$  è una successione che converge a  $\phi$  nella distanza di Hausdorff, ossia  $d_H(\phi_n, \phi) \rightarrow 0$ , allora  $\phi_n(x) \rightarrow \phi(x)$  in ogni punto di continuità di  $\phi$  mentre se  $x$  è un punto di discontinuità per  $\phi$  allora vale

$$\phi(x-) \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \phi_n(x) \leq \limsup_{n \in \mathbb{N}} \phi_n(x) \leq \phi(x+).$$

In particolare dunque abbiamo che  $\phi_n(x) \rightarrow \phi(x)$  puntualmente per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Per ogni  $\phi \in \hat{Y}$  definiamo la funzione

$$\hat{E}_\omega(\phi) := \int_a^{a+1} h(\phi(t), \phi(t+\omega)) dt.$$

Osserviamo che  $\hat{F}_\omega$  è ben definita in quanto, per la monotonia di  $\phi$ , l'insieme  $\{(\phi(t), \phi(t + \omega)) \mid t \in [a, a + 1]\}$  è limitato in  $\mathbb{R}^2$  e  $h$  è continua; inoltre  $\hat{F}_\omega$  non dipende dalla scelta di  $a \in \mathbb{R}$  (dal momento che sia  $h$  che  $\phi$  sono periodiche). Risulta dunque naturale considerare il quoziente  $\hat{Y}/\sim$  rispetto alla relazione di equivalenza  $\sim$  che identifica due funzioni crescenti che sono una la traslazione dell'altra, ossia tale che

$$\phi \sim \psi \iff \exists a \in \mathbb{R} \mid \phi(t) = \psi(t + a).$$

Due funzioni che stanno nella stessa classe di equivalenza hanno stessa immagine tramite  $\hat{F}_\omega$ ; inoltre  $\phi \sim \psi$  se e solo se  $\Gamma_\phi = \Gamma_\psi + (a, 0)$ . Perciò la funzione  $\hat{F}_\omega$  passa al quoziente e definisce una nuova funzione, detta *Langrangiana di Percival*,  $F_\omega : Y \rightarrow \mathbb{R}$  dove con  $Y$  abbiamo indicato  $\hat{Y}/\sim$ ; tramite la distanza di Hausdorff possiamo definire una distanza su  $Y$  ponendo

$$d([\psi], [\phi]) := \inf\{d_H(\psi, \phi) \mid (\psi, \phi) \in ([\psi], [\phi])\}.$$

**Prop. 3.0.1**  $(Y, d)$  è uno spazio metrico compatto e  $F_\omega$  è continua rispetto alla topologia indotta dalla metrica.

**dim.**

Identifichiamo una funzione  $\phi \in \hat{Y}$  con il suo grafico esteso  $\Gamma_\phi \subseteq \mathbb{R}^2$ . Consideriamo l'azione isometrica  $g : \mathbb{R} \times \hat{Y} \rightarrow \hat{Y}$  del gruppo  $\mathbb{R}$  sull'insieme  $\hat{Y}$  definita da  $(\alpha, \phi) \mapsto T_\alpha \phi := \phi + (\alpha, 0)$ ; osserviamo che  $d_H(\phi, T_\alpha \phi) \rightarrow +\infty$  se  $\alpha \rightarrow \pm\infty$  (cioè l'azione di gruppo è propria rispetto alla distanza di Hausdorff). Inoltre  $Y$  è il quoziente di  $\hat{Y}$  per l'azione di gruppo introdotta; vediamo dunque che  $d$  è effettivamente una distanza su  $Y$  e che  $(Y, d)$  è compatto. Notiamo innanzitutto che

$$d([\phi], [\psi]) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} d_H(\phi, T_\alpha \psi) \quad \text{per ogni } [\phi], [\psi] \in Y.$$

- $d([\psi], [\phi]) \geq 0 \forall [\psi], [\phi] \in Y$  e  $d([\psi], [\phi]) = 0 \iff \psi = \phi$ ;

Il primo fatto è ovvio poichè  $d_H \geq 0$ ; inoltre  $[\psi] = [\phi] \Rightarrow d([\psi], [\phi]) = 0$ , infatti  $\psi \in [\psi], \psi \in [\phi]$  e dunque  $d([\psi], [\phi]) = 0$ . Se ora invece  $d([\psi], [\phi]) = 0$  allora esiste una successione  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tale che la distanza di Hausdorff  $d_H(\psi, T_{\alpha_n} \phi) \rightarrow 0$ ; ora dato che l'azione è propria a meno di passare a una sottosuccessione abbiamo che  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  e dunque  $\Gamma_{T_\alpha \phi} = \Gamma_\psi$ , ossia  $[\psi] = [\phi]$ .

- $d([\psi], [\phi]) = d([\phi], [\psi])$  per ogni  $[\psi], [\phi] \in Y$ ;

Segue dal fatto che  $d_H$  è una distanza, infatti

$$\begin{aligned} d([\psi], [\phi]) &= \inf\{d_H(\psi, \phi) \mid \psi \in [\psi], \phi \in [\phi]\} = \\ &= \inf\{d_H(\phi, \psi) \mid \phi \in [\phi], \psi \in [\psi]\} = d([\phi], [\psi]); \end{aligned}$$

- $d([\psi], [\nu]) \leq d([\psi], [\phi]) + d([\phi], [\nu]) \quad \forall [\psi], [\phi], [\nu] \in Y;$

Dal momento che  $d([\psi], [\nu]) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} d_H(\psi, T_\alpha \nu)$ , allora fissato  $\alpha \in \mathbb{R}$  per ogni  $\beta \in \mathbb{R}$  abbiamo che

$$\begin{aligned} d_H(\psi, \nu + \alpha) &\leq d_H(\psi, T_\beta \phi) + d_H(T_\beta \phi, T_\alpha \nu) = \\ &= d_H(\psi, T_\beta \phi) + d_H(\phi, T_{\alpha-\beta} \nu) \end{aligned}$$

Dunque passando all'estremo inferiore sugli  $\alpha \in \mathbb{R}$  otteniamo che

$$d([\psi], [\nu]) \leq d_h(\psi, T_\beta \phi) + d([\phi], [\nu])$$

e passando nuovamente all'inf sui  $\beta \in \mathbb{R}$  otteniamo la tesi.

Perciò  $d$  è una distanza che induce su  $Y$  la topologia quoziente; dato che la proiezione al quoziente  $\pi : \hat{Y} \rightarrow Y$  è continua, per dimostrare che  $(Y, d)$  è compatto ci basta trovare un compatto  $K \subseteq \hat{Y}$  che intersechi ogni classe di equivalenza. Per la condizione di periodicità, che in particolare ci dice che  $\phi(1) = 1 + \phi(0)$ , un insieme che interseca tutte le classi di equivalenza è (ricordiamo che è possibile identificare  $\phi \in \hat{Y}$  con il suo grafico esteso)

$$K := \{\Gamma_\phi \mid \phi([0, 1]) \subseteq [-1, 2]\}.$$

Questo interseca ogni classe di equivalenza dal momento che presa una qualsiasi applicazione  $\phi \in \hat{Y}$ , a meno di traslazione, possiamo supporre che il suo grafico esteso passi per l'origine, ossia che  $-1 \leq \phi(0-) \leq 0 \leq \phi(0+) \leq 1$ . Ma allora per ogni  $t \in [0, 1]$  abbiamo che

$$-1 \leq \phi(0-) \leq \phi(0) \leq \phi(t) \leq \phi(1) = \phi(0) + 1 \leq \phi(0+) + 1 \leq 2.$$

Vediamo ora che  $K$  è compatto; per fare ciò ci basta vedere che  $K$  è compatto per successioni, cioè che data comunque una successione  $\{\Gamma_{\phi_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$  esiste una sottosuccessione convergente. Per ogni  $\phi \in \hat{Y}$  indichiamo con  $\Gamma_\phi^{rid} \subseteq [0, 1] \times \mathbb{R}$  il grafico (esteso) di  $\phi|_{[0, 1]}$ ; la distanza di Hausdorff tra i grafici estesi è equivalente alla distanza di Hausdorff tra i grafici estesi delle funzioni ristrette a  $[0, 1]$ . Questo conclude dal momento che la successione  $\{\Gamma_{\phi_n}^{rid}\}_{n \in \mathbb{N}}$  ammette una sottosuccessione convergente in quanto l'insieme

$$\{F \subseteq [0, 1] \times [-1, 2] \mid F \text{ chiuso}\}$$

è compatto rispetto alla topologia indotta dalla distanza di Hausdorff. Infatti il limite di Hausdorff della sottosuccessione convergente è il grafico esteso di una funzione monotona  $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\psi(1) = \psi(0) + 1$ ; estendendo tale  $\psi$  a tutto  $\mathbb{R}$  per periodicità otteniamo un elemento di  $\hat{Y}$  che è limite di una sottosuccessione di  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Vediamo ora che  $F_\omega : Y \rightarrow \mathbb{R}$  è continua; più precisamente mostriamo che  $\hat{F}_\omega$  è continua se su  $\hat{Y}$  mettiamo la topologia indotta dalla distanza di Hausdorff, cioè che

$$d_H(\phi_n, \phi) \rightarrow 0 \implies \hat{F}_\omega(\phi_n) \rightarrow \hat{F}_\omega(\phi).$$

Come già osservato la successione  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente quasi ovunque a  $\phi$  e dunque dal momento che  $h$  è una funzione continua

$$\hat{F}_\omega(\phi_n) = \int_0^1 h(\phi_n(t), \phi_n(t + \omega)) dt \longrightarrow \int_0^1 h(\phi(t), \phi(t + \omega)) dt = \hat{F}_\omega(\phi).$$

□

Questa proposizione ha come importante conseguenza il seguente

**Corollario 3.0.1** *Esiste un elemento  $\psi_\omega \in Y$  che minimizza  $F_\omega$ .*

**Teorema 3.1** *Sia  $\psi$  un elemento che minimizza  $F_\omega$  su  $Y$ ; allora l'equazione*

$$\partial_2 h(\psi(t - \omega \pm 0), \psi(t \pm 0)) + \partial_1 h(\psi(t \pm 0), \psi(t + \omega \pm 0)) = 0$$

(detta equazione di Eulero-Lagrange) è soddisfatta per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

**dim.**

Consideriamo una variazione  $\psi_s$ , con  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ , di  $\psi$  tale che  $\psi_s(t + 1) = \psi_s(t) + 1$ ; allora almeno formalmente possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F_\omega(\psi_s)|_{s=0} &= \int_a^{a+1} \frac{d}{ds} h(\psi_s(t), \psi_s(t + \omega))|_{s=0} dt = \\ &= \int_a^{a+1} \frac{d}{ds} \psi_s(t)|_{s=0} [\partial_1 h(\psi(t), \psi(t + \omega)) + \partial_2 h(\psi(t - \omega), \psi(t))] dt \end{aligned}$$

Il problema è perciò quello di scegliere la variazione in modo tale che  $\psi_s \in Y_1$  per ogni  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$  e che i passaggi formali fatti siano giustificati.

- **CASO 1**  $t + \omega, t - \omega$  sono punti di continuità di  $\psi$  e  $\psi$  è non costante in ogni intervallo che contiene  $t$ .

Scegliamo una variazione di classe  $C^\infty$  in tutte le variabili dell'identità  $id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  (ossia una famiglia a un parametro  $\{u_s \mid s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$  di diffeomorfismi tale che  $u_0 = id$ ) tale che sia verificata la condizione di periodicità  $u_s(x + 1) = u_s(x) + 1$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , per ogni  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ , e che  $u_s(x) = x$  per ogni  $x \notin [\psi(t) - \delta, \psi(t) + \delta] + \mathbb{Z}$ ; poniamo  $\psi_s := u_s \circ \psi$ , in particolare dunque  $\frac{d}{ds} \psi_s(t)|_{s=0}$  è nulla al di fuori di  $\psi^{-1}([\psi(t) - \delta, \psi(t) + \delta])$ .

Scegliendo opportunamente la variazione  $u_s$  possiamo supporre anche che  $\frac{d}{ds} \psi_s(t)|_{s=0}$  abbia lo stesso segno in tutta la regione in cui è non nulla; perciò per le assunzioni fatte riguardo alla regolarità di  $\psi$  abbiamo che la quantità  $\partial_1 h(\psi(t), \psi(t + \omega)) + \partial_2 h(\psi(t - \omega), \psi(t))$  ha sempre lo stesso segno quando  $\frac{d}{ds} \psi_s(t)|_{s=0}$  è non nulla. In questo caso dunque l'equazione di Eulero-Lagrange deve valere dal momento che il ragionamento formale fatto in precedenza è giustificato e la quantità  $\frac{d}{ds} F_\omega(\psi_s)|_{s=0}$  deve essere uguale a zero.

- **CASO 2**  $t + \omega, t - \omega$  sono punti di continuità per  $\psi$ .

Indichiamo con  $[t_0, t_1]$  l'intervallo massimale che contiene  $t$  e in cui  $\psi$  è costante; dal momento che  $\psi$  è una funzione crescente e vale la proprietà  $\partial_{12}h(x, x') < 0$  per ogni  $(x, x') \in V$  allora abbiamo che la quantità  $E(t) := \partial_1 h(\psi(t), \psi(t + \omega)) + \partial_2 h(\psi(t - \omega), \psi(t))$  è una funzione decrescente in  $[t_0, t_1]$  ed è costante in tale intervallo solo se entrambe  $\psi(t - \omega), \psi(t + \omega)$  sono costanti in  $[t_0, t_1]$ . Se  $E(t)$  non cambia segno in  $[t_0, t_1]$  allora ricadiamo nel caso precedente; altrimenti consideriamo  $t^*$  tale che

$$\begin{cases} E(\tau) \geq 0 & \text{se } \tau \leq t^*; \\ E(\tau) \leq 0 & \text{se } \tau \geq t^*; \end{cases} \quad \tau \in [t_0, t_1]$$

e scegliamo una variazione dell'identità come fatto in precedenza, supponendo che  $\frac{d}{ds}u_s(x)|_{s=0} > 0$  nella regione in cui è non nulla. Definiamo  $\psi_s := u_s \circ \psi$  in  $[t^*, t + \frac{1}{2}]$  e  $\psi_s := u_{-s} \circ \psi$  in  $(t - \frac{1}{2}, t^*)$  e estendiamola per periodicità; in questo caso, se l'equazione di Eulero-Lagrange non valesse, avremmo che  $\frac{d}{ds}F_\omega(\psi_s)|_{s=0} < 0$ , in contraddizione con il fatto che  $\psi$  minimizza  $F_\omega$ .

Questo prova l'equazione di Eulero-Lagrange quando  $t + \omega, t - \omega$  sono punti di continuità per  $\psi$ ; l'insieme dei punti di continuità di  $\psi$  è però denso in  $\mathbb{R}$  e questo ci permette di concludere.  $\square$

Consideriamo dunque  $\psi$  che minimizza  $F_\omega$  e definiamo per ogni  $t \in \mathbb{R}$

$$\eta^\pm(t) := -\partial_1 h(\psi(t \pm 0), \psi(t + \omega \pm 0)) = \partial_2 h(\psi(t - \omega \pm 0), \psi(t \pm 0)).$$

Se indichiamo con

$$\mathcal{M}_\omega^* = \mathcal{M}_\omega^*(f) := \{(\psi(t \pm 0), \eta^\pm(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

allora  $\mathcal{M}_\omega^* \subseteq \mathbb{R}^2$  ed è invariante per  $f$ , infatti per l'equazione (2.3) abbiamo che  $f(\psi(t \pm 0), \eta^\pm(t)) = (x', y')$  dove  $x', y'$  sono tali che

$$\begin{cases} \eta_\pm(t) = -\partial_1 h(\psi(t \pm 0), x'); \\ y' = \partial_2 h(\psi(t \pm 0), x'); \end{cases}$$

Inoltre per la condizione di twist a ogni coppia  $(x, x')$  corrisponde un'unica coppia  $(y, y')$  tale che  $f(x, y) = (x', y')$ ; perciò per il Teorema 3.1 abbiamo che  $x' = \psi(t + \omega \pm 0)$  e di conseguenza

$$\begin{aligned} y' &= \partial_2 h(\psi(t \pm 0), \psi(t + \omega \pm 0)) = \\ &= -\partial_1 h(\psi(t + \omega \pm 0), \psi(t + 2\omega \pm 0)) = \eta_\pm(t + \omega); \end{aligned}$$



Ma allora  $f(\psi(t \pm 0), \eta_{\pm}(y)) = (\psi(t + \omega \pm 0); \eta_{\pm}(t + \omega)) \in \mathcal{M}_{\omega}^*$ . Inoltre  $\mathcal{M}_{\omega}^*$  è invariante per la traslazione del piano  $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ , infatti

$$\begin{aligned} \eta_{\pm}(t) &= -\partial_1 h(\psi(t \pm 0), \psi(t + \omega \pm 0)) = \\ &= -\partial_1 h(\psi(t \pm 0) + 1, \psi(t + \omega \pm 0) + 1) = \\ &= -\partial_1 h(\psi(t + 1 \pm 0), \psi(t + \omega + 1 \pm 0)) = \eta_{\pm}(t + 1); \end{aligned}$$

questo ci dice che l'applicazione  $t \mapsto \eta_{\pm}(t)$  è periodica di periodo 1 e dunque  $(\psi(t \pm 0), \eta_{\pm}(t)) \mapsto (\psi(t \pm 0) + 1, \eta_{\pm}(t)) = (\psi(t + 1 \pm 0), \eta_{\pm}(t + 1)) \in \mathcal{M}_{\omega}^*$ .

Perciò la proiezione  $\Sigma_{\omega}^* = \Sigma_{\omega}^*(f)$  di  $\mathcal{M}_{\omega}^*$  su  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$  è invariante per  $g$ .

**Def. 2** Diciamo che  $\Sigma_{\omega}^*$  (risp.  $\mathcal{M}_{\omega}^*$ ) è un insieme minimizzante per  $g$  (risp. per  $f$ ) con numero di rotazione  $\omega$ .

Per esempio dunque, nel caso del modello di Fraenkel-Kontorova, possiamo concludere che per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$  esiste un insieme minimizzante  $\Sigma_{\omega}^*$ .

## 3.2 Caso generale

In generale il dominio di definizione del principio variazionale  $h$  non è tutto  $\mathbb{R}^2$  ma la chiusura della striscia di piano

$$V := \{(x, x') \in \mathbb{R}^2 \mid x + \omega_- < x' < x + \omega_+\}$$

ed inoltre  $h$  è costante sulla frontiera di  $V$ . In analogia con ciò che abbiamo fatto nel paragrafo precedente definiamo per ogni  $\psi \in \hat{Y}$

$$\hat{F}_{\omega}(\psi) := \int_a^{a+1} h(\psi(t), \psi(t + \omega)) dt.$$

Tale applicazione è chiaramente ben definita se  $\omega \in (\omega_-, \omega_+)$ , cioè se  $\omega$  sta nell'intervallo di twist dell'applicazione monotona associata ad  $h$ , dal momento che  $(\psi(t \pm 0), \psi(t + \omega \pm 0)) \in V$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Dunque, fissato un qualsiasi  $\omega$  nell'intervallo di twist, l'applicazione  $\hat{F}_{\omega}$  passa al quoziente definendo un'applicazione  $F_{\omega} : Y \rightarrow \mathbb{R}$  continua rispetto alla topologia indotta dalla distanza  $d$ . Vale perciò il Teorema 3.1 e questo ci permette di dire che per ogni  $\omega$  nell'intervallo di twist esiste un insieme minimizzante  $\Sigma_{\omega}^* \subseteq \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  (risp.  $\mathcal{M}_{\omega}^* \subseteq \mathbb{R}^2$ ) per  $g$  (risp. per  $f$ ). L'intervallo di twist dipende comunque dalla scelta del sollevamento  $f$  di  $g$ ; infatti se  $f$  e  $f_1$  sono sollevamenti di  $g$  allora essi differiscono per la traslazione di un certo intero  $f_1 = f + (n, 0)$ , quindi abbiamo che  $\mathcal{M}_{\omega+n}^*(f_1) = \mathcal{M}_{\omega}^*(f)$ . Per esempio dunque nel caso dei biliardi abbiamo esistenza di insiemi minimizzanti per ogni  $\omega \in (n, n + 1)$  in accordo con il sollevamento scelto, mentre nel caso di un punto fisso di tipo ellittico, per un'opportuna scelta del sollevamento  $f$ , per ogni  $\omega \in (\beta_0, \beta_0 + \epsilon)$  esiste un insieme minimizzante.

## Capitolo 4

# Configurazioni minimali

### 4.1 Definizione

Consideriamo un principio variazionale  $h$  definito su tutto  $\mathbb{R}^2$  (cioè un principio variazionale tale che l'applicazione twist monotona associata  $f$  ha come intervallo di twist tutta la retta reale) e indichiamo con

$$h(x_k, \dots, x_l) := \sum_{i=k}^l h(x_i, x_{i+1}).$$

Assumiamo che  $h$  verifichi la condizione ulteriore:

(\*) Siano  $\bar{x}, x, x', \bar{\xi}, \xi'$  numeri reali; assumiamo che le funzioni (della variabile  $y$ )  $h(\bar{x}, y) + h(y, x')$  e  $h(\bar{\xi}, y) + h(y, \xi')$  ammettano minimo in  $y = x$ , allora o  $(\bar{x} - \bar{\xi})(x' - \xi') < 0$  oppure  $\bar{x} = \bar{\xi}, x' = \xi'$ .

Indichiamo con il termine configurazione una sequenza bi-infinita di numeri reali  $x = (\dots, x_i, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  e con il termine segmento una sequenza finita  $(x_k, \dots, x_l)$ . Diciamo che un segmento è *minimale* se minimizza l'azione a estremi fissati, cioè se per ogni altro segmento  $(\xi_k, \dots, \xi_l) \in \mathbb{R}^{l-k+1}$  tale che  $\xi_k = x_k, \xi_l = x_l$  si ha  $h(x_k, \dots, x_l) \leq h(\xi_k, \dots, \xi_l)$ ; una configurazione si dirà *minimale* se ogni suo sottosegmento lo è. Osserviamo che le configurazioni minimali definiscono delle orbite dell'applicazione  $f$ , infatti se  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  è minimale allora per ogni  $i \in \mathbb{Z}$  il segmento  $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$  è minimale, cioè  $x = x_i$  minimizza la quantità  $h(x_{i-1}, x) + h(x, x_{i+1})$ , ma allora derivando in  $x$  e valutando la derivata in  $x = x_i$  otteniamo che

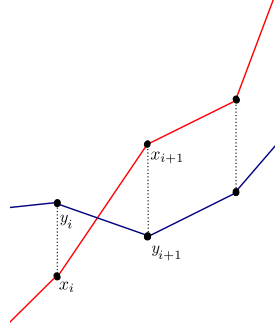
$$\partial_2 h(x_{i-1}, x_i) + \partial_1 h(x_i, x_{i+1}) = 0$$

e dunque se definiamo  $y_i := -\partial_1 h(x_i, x_{i+1}) = \partial_2 h(x_{i-1}, x_i)$  allora la sequenza  $\{(x_i, y_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  per l'equazione (2.3) è un'orbita per l'applicazione  $f$ .

Consideriamo ora un segmento  $(x_k, \dots, x_l)$  e definiamo il suo *grafico di Aubry*  $G(x_k, \dots, x_l)$  come l'unione in  $\mathbb{R}^2$  dei segmenti che congiungono  $(i, x_i)$  con  $(i+1, x_{i+1})$  per  $k \leq i < l$ . Se  $x$  e  $y$  sono due segmenti minimali, allora per la condizione di twist espressa dalla disequazione (2.4) abbiamo che

$$h(x \vee y) + h(x \wedge y) - h(x) - h(y) \leq 0 \quad (4.1)$$

dove  $x \vee y$  e  $x \wedge y$  sono i segmenti definiti da  $(x \vee y)_i := \max\{x_i, y_i\}$  e  $(x \wedge y)_i := \min\{x_i, y_i\}$  per ogni  $i \in \mathbb{Z}$ . Sempre dalla disequazione (2.4) segue che se i grafici di Aubry si intersecano nella parte interna del segmento che congiunge  $(i, x_i)$  con  $(i+1, x_{i+1})$  per qualche  $i \in k, \dots, l-1$  allora la disuguaglianza è stretta; infatti per esempio nel caso in cui  $x_i < y_i$  e  $y_{i+1} < x_{i+1}$  abbiamo che  $((x \wedge y)_i, (x \wedge y)_{i+1}) = (x_i, y_{i+1})$  e  $((x \vee y)_i, (x \vee y)_{i+1}) = (y_i, x_{i+1})$ .



**Figura 4.1:** Due segmenti che si intersecano nella parte interna di un intervallino.

Quindi se poniamo  $x_i = \xi$ ,  $y_i = x$ ,  $x_{i+1} = \xi'$ ,  $y_{i+1} = x'$ , dal momento che  $\xi < x$  e  $\xi' < x'$  per la disuguaglianza (2.3) abbiamo

$$\begin{aligned} & h((x \wedge y)_i, (x \wedge y)_{i+1}) + h((x \vee y)_i, (x \vee y)_{i+1}) - h(x_i, x_{i+1}) - h(y_i, y_{i+1}) = \\ &= h(x_i, y_{i+1}) + h(y_i, x_{i+1}) - h(x_i, x_{i+1}) + h(y_i, y_{i+1}) = \\ &= h(\xi, \xi') + h(x, x') - h(\xi, x') - h(x, \xi') < 0; \end{aligned}$$

La disuguaglianza (4.1) risulta utile per dimostrare il seguente risultato, basilare nella teoria delle configurazioni minimali e fondamentale per quanto andremo a fare in seguito.

**Aubry's crossing lemma 1** *Se  $x = (x_k, \dots, x_l)$  e  $y = (y_k, \dots, y_l)$  sono due segmenti minimali allora l'intersezione tra i loro grafici di Aubry è formata al massimo da due punti; in particolare consta esattamente di due punti se e solo se questi sono gli estremi dei due grafici, cioè se  $x_k = y_k, x_l = y_l$ .*

**dim.**

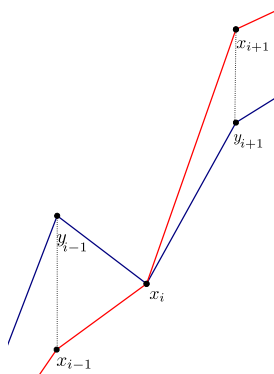
Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa; allora, a meno di rimpiazzare  $x$  e  $y$  con sottosegmenti e di scambiarne il ruolo, possiamo assumere che  $x_k \leq y_k, x_l \leq y_l$  con almeno una delle due disuguaglianze che è stretta. Poichè per ipotesi  $x$  e  $y$  sono segmenti  $h$ -minimali abbiamo che

$$\begin{cases} h(x) \leq h(x \wedge y); \\ h(y) \leq h(x \vee y); \end{cases}$$

ma allora  $h(x \vee y) + h(x \wedge y) - h(x) - h(y) \geq 0$  e quindi per via della disuguaglianza (4.1) abbiamo

$$\begin{cases} h(x \vee y) + h(x \wedge y) - h(x) - h(y) = 0; \\ h(x) = h(x \wedge y); \\ h(y) = h(x \vee y); \end{cases}$$

Da questo segue immediatamente che i grafici di Aubry non si possono intersecare nelle parti interne degli intervalli, in quanto altrimenti la disuguaglianza (4.1) sarebbe stretta e quindi l'uguaglianza non potrebbe sussistere. Inoltre i segmenti  $(x \wedge y)$  e  $(x \vee y)$  sono  $h$ -minimali dal momento che, così come  $x$  e  $y$ , minimizzano l'azione a estremi fissati (infatti gli estremi di  $x \wedge y$  (risp.  $x \vee y$ ) sono gli stessi di  $x$  (risp.  $y$ )).



**Figura 4.2:** Due segmenti che si intersecano in un estremo di un intervallino.

Se per assurdo un punto di intersezione tra i grafici di Aubry di  $x$  e  $y$  è un punto della forma  $(i, x_i)$  con  $i \neq k, l$  allora i grafici di Aubry  $G(x \wedge y)$  e  $G(x \vee y)$  si intersecano anch'essi nel punto  $(i, x_i)$  ma questo contraddice la condizione (\*), infatti le applicazioni  $h(y_{i-1}, y) + h(y, x_{i+1})$  e  $h(x_{i-1}, y) + h(y, y_{i+1})$  ammettono minimo in  $y = x_i$  (per la minimalità dei segmenti) ma  $(y_{i-1} - x_{i-1})(x_{i+1} - y_{i+1}) > 0$ .  $\square$

## 4.2 Configurazioni periodiche

Diciamo che una configurazione  $x = (\dots, x_i, \dots)$  è *periodica* di tipo  $(p, q)$  se  $x_{i+q} = x_i + p$  per ogni  $i \in \mathbb{Z}$ ; fissato  $a \in \mathbb{Z}$  poniamo inoltre

$$h_q^{per} := \sum_{i=a}^{a+q-1} h(x_i, x_{i+1})$$

per la periodicità di  $h$  tale quantità è indipendente dalla scelta di  $a$ .

**Teorema 4.1** *Per ogni coppia  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$  esiste una configurazione minimale periodica di tipo  $(p, q)$ .*

**dim.**

Impostiamo la dimostrazione su più passi successivi:

- **PASSO 1** L'applicazione  $h_q^{per}$  ammette minimo nell'insieme delle configurazioni periodiche di tipo  $(p, q)$ .

Identifichiamo l'insieme delle configurazioni periodiche di tipo  $(p, q)$  con  $\mathbb{R}^q$ . Per la periodicità di  $h$  l'applicazione  $h_q^{per}$  è invariante per la traslazione  $T : (\dots, x_i, \dots) \mapsto (\dots, x_i + 1, \dots)$  e dunque è in realtà definita in modo naturale sullo spazio quoziente  $\mathbb{R}^q/T$ ; inoltre dal momento che  $h(x, x') \rightarrow +\infty$  se  $|x - x'| \rightarrow +\infty$  (segue dal fatto che l'intervallo di twist è tutto  $\mathbb{R}$ ) l'insieme  $\{h_q^{per} \leq a\}$  è compatto in  $\mathbb{R}^q/T$  per ogni  $a \in \mathbb{R}$ ,  $h_q^{per}$  ammette quindi minimo perchè continua.

- **PASSO 2** Siano  $p \in \mathbb{Z}$  e  $q, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ; se  $x$  è una configurazione che minimizza  $h_{qn}^{per}$  sull'insieme delle configurazioni periodiche di tipo  $(pn, qn)$  allora  $x$  è periodica di tipo  $(p, q)$ .

Per ogni  $i \in \mathbb{Z}$  sia  $y_i := x_{i+q} - p$ ; la configurazione  $y$  così definita minimizza  $h_{qn}^{per}$  sull'insieme delle configurazioni periodiche di tipo  $(pn, qn)$ , inoltre  $x$  è periodica di tipo  $(p, q)$  se e solo se coincide con  $y$ . Se per assurdo  $x$  fosse diversa da  $y$  allora i grafici di Aubry di  $x$  e  $y$  si incontrerebbero infinite volte. Un'argomentazione simile a quella usata nella dimostrazione dell'Aubry's crossing lemma mostra che questo contraddice il fatto che  $x$  e  $y$  minimizzino  $h_{qn}^{per}$  sull'insieme delle configurazioni periodiche di tipo  $(pn, qn)$ .

- **PASSO 3** Sia  $x$  periodica di tipo  $(p, q)$  che minimizza  $h_q^{per}$  sull'insieme delle configurazioni periodiche di tipo  $(p, q)$ ; allora per ogni  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$   $x$  minimizza  $h_{qn}^{per}$  sull'insieme delle configurazioni periodiche di tipo  $(pn, qn)$ . In particolare  $x$  è una configurazione minimale.

Per il passo 1 esiste  $y$  che minimizza  $h_{qn}^{per}$  sull'insieme delle configurazioni di tipo  $(pn, qn)$  e per il passo 2  $y$  è periodica di tipo  $(p, q)$ ; perciò  $h_{qn}^{per}(x) = nh_q^{per}(x) = h_{qn}^{per}(y)$  (in quanto  $h_q^{per}(x) = h_q^{per}(y)$ ) e dunque, poichè  $y$  minimizza  $h_{qn}^{per}$  e  $x$  assume gli stessi valori, allora anche  $x$  minimizza  $h_{qn}^{per}$ . Per vedere ora che un qualsiasi segmento  $(x_k, \dots, x_l)$  di  $x$  minimizza  $h(x_k, \dots, x_l)$ , come da definizione di segmento minimale, basta applicare l'argomento precedente con  $qn > l - k + 1$ .

□

In realtà si potrebbe dimostrare che per ogni coppia  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$  esiste una seconda orbita periodica di tipo  $(p, q)$ ; più in generale un risultato dovuto a G.D.Birkhoff (per cui si rimanda a [9]) afferma che per ogni numero razionale  $\frac{p}{q}$  (ridotto ai minimi termini) nell'intervallo di twist di un'applicazione twist monotona esistono almeno due orbite periodiche di tipo  $(p, q)$ . Questo è il massimo a cui si può aspirare, infatti in generale non esistono più di due orbite periodiche dello stesso tipo (per esempio nel biliardo all'interno di un'ellisse ci sono esattamente 2 orbite periodiche di periodo due, corrispondenti ai due assi dell'ellisse). Quello che ci riproponiamo di fare nei prossimi capitoli è dunque generalizzare i risultati sulle orbite periodiche al caso di un numero  $\omega \in (\omega_-, \omega_+)$  qualsiasi.

### 4.3 Numero di rotazione

Data una coppia  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$  consideriamo una configurazione minimale  $x$  periodica di tipo  $(p, q)$ ; per ogni  $i \in \mathbb{Z}$  abbiamo dunque che  $x_{i+q} = x_i + p$ . Supponiamo per semplicità che sia  $p$  che  $q$  siano maggiori di zero e fissiamo  $i \in \mathbb{Z}$ ; reiterando l'uguaglianza precedente otteniamo che

$$x_{i+nq} = x_i + np \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z}.$$

Ma allora

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{x_{i+nq}}{i+nq} = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{x_i}{i+nq} + \frac{np}{nq} \right] = \frac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad \lim_{i \rightarrow \pm\infty} \frac{x_i}{i} = \frac{p}{q}.$$

Diciamo perciò che la configurazione minimale periodica  $x$  ha *numero di rotazione*  $\frac{p}{q}$ ; vogliamo ora estendere la definizione di numero di rotazione alle configurazioni minimali non periodiche. Per fare ciò introduciamo sull'insieme delle configurazioni le seguenti relazioni d'ordine:

- $x >_\alpha y \iff$  esiste  $i_0 \in \mathbb{Z}$  tale che  $x_i > y_i \forall i < i_0$  (cioè  $x$  è definitivamente maggiore di  $y$  per  $i \rightarrow -\infty$ );
- $x >_\omega y \iff$  esiste  $i_0 \in \mathbb{Z}$  tale che  $x_i > y_i \forall i > i_0$  (cioè  $x$  è definitivamente maggiore di  $y$  per  $i \rightarrow +\infty$ );

Un'immediata conseguenza dell'Aubry's crossing lemma è che i grafici di Aubry di due configurazioni minimali si intersechino al massimo una volta, perciò vale la seguente

**Tricotomia 1** *Se  $x, y$  sono configurazioni minimali allora o  $x >_\alpha y$  (risp.  $x >_\omega y$ ) o  $x=y$  o  $x <_\alpha y$  (risp.  $x <_\omega y$ ).*

Sia  $x$  una configurazione e siano  $p, q \in \mathbb{Z}$ , allora definiamo la *traslazione*  $T_{p,q}x$  ponendo  $(T_{p,q}x)_i := x_{i-q} + p$  per ogni  $i \in \mathbb{Z}$ ; osserviamo che  $x >_\alpha y$  implica  $T_{p,q}x >_\alpha T_{p,q}y$ . Perciò se  $T_{p,q}x >_\alpha x$  allora  $T_{pl,ql}x >_\alpha x$  per ogni  $l$  intero positivo e inoltre nel caso in cui  $x$  sia una configurazione minimale, per la Tricotomia 1, è vera anche l'implicazione inversa (lo stesso vale per la relazione d'ordine  $>_\omega$ ); sono perciò ben definiti gli insiemi

$$A_\alpha(x) := \left\{ \frac{p}{q} \mid T_{p,q}x <_\alpha x, p, q \in \mathbb{Z}, q > 0 \right\}$$

$$B_\alpha(x) := \left\{ \frac{p}{q} \mid T_{p,q}x >_\alpha x, p, q \in \mathbb{Z}, q > 0 \right\}$$

e allo stesso modo gli insiemi  $A_\omega(x), B_\omega(x)$ ; tali insiemi sono chiaramente disgiunti. Inoltre osserviamo che, se  $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$  sono due numeri razionali, allora

$$\frac{p}{q} \in A_\alpha \implies \frac{p'}{q'} \in A_\alpha \quad \text{e} \quad \frac{p'}{q'} \in B_\alpha \implies \frac{p}{q} \in B_\alpha.$$

(lo stesso vale con  $\omega$  al posto di  $\alpha$ ). Infatti per ogni  $i$  intero vale

$$(T_{p'q,qq'}x)_i < (T_{pq,qq'}x)_i \quad \text{se} \quad p'q < pq'$$

(poichè  $(T_{p'q,qq'}x)_i = x_{i-qq'} + p'q$  e  $(T_{pq,qq'}x)_i = x_{i-qq'} + pq'$ ); perciò se  $\frac{p}{q} \in A_\alpha(x)$  (l'altra asserzione si mostra in maniera analoga) allora per ogni  $l$  intero positivo  $T_{pl,ql}x <_\alpha x$ , e dunque in particolare  $T_{p'q,qq'}x <_\alpha x$ ; ma allora, essendo  $x$  minimale,  $T_{p',q'}x <_\alpha x$ . Infine se  $x$  è una configurazione minimale allora  $A_\alpha(x) \cup B_\alpha(x)$  (risp.  $A_\omega(x) \cup B_\omega(x)$ ) coincide con  $\mathbb{Q}$  eccetto al massimo un elemento; questo discende direttamente dall'Aubry's crossing lemma, supponiamo infatti per assurdo che esistano  $a < b \in \mathbb{R}$  tali che

$$\rho_- := \sup A_\omega(x) < a < b < \inf B_\omega(x) =: \rho_+$$

allora consideriamo un razionale  $\frac{p}{q} \in (a, b)$ . Dal momento che  $\frac{p}{q} \notin B_\omega(x)$  (risp.  $\notin A_\omega(x)$ ) abbiamo che  $x_{i-q} + p < x_i$  frequentemente (risp.  $x_{i-q} + p > x_i$  frequentemente) per  $i \rightarrow +\infty$ ; ma allora i grafici di Aubry delle configurazioni minimali  $T_{p,q}x$  e  $x$  si intersecano infinite volte e ciò è in contraddizione con l'Aubry's crossing lemma (la dimostrazione è identica nel caso  $A_\alpha(x), B_\alpha(x)$ ). Di conseguenza esistono unici  $\rho_\alpha(x), \rho_\omega(x) \in \overline{\mathbb{R}}$  tali che

$$\rho_\alpha(x) = \inf B_\alpha(x) = \sup A_\alpha(x) \quad \text{e} \quad \rho_\omega(x) = \inf B_\omega(x) = \sup A_\omega(x).$$

**Prop. 4.1.1** *Sia  $x$  una configurazione minimale allora  $\rho_\alpha(x) = \rho_\omega(x) \in \mathbb{R}$ .*

**dim.**

Supponiamo per assurdo che  $\rho_\alpha(x) < \rho_\omega(x)$  (nell'altro caso si opera poi in maniera identica); sia  $\frac{r}{s} \in B_\omega(x)$  un numero razionale, allora per ogni  $i \geq i_0$  abbiamo che  $x_{i-s} + r > x_i$ , ossia  $x_{i+s} < x_i + r$ . Reiterando la disuguaglianza otteniamo che  $x_{i+ns} < x_i + nr$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Ma allora per ogni  $i \in \mathbb{Z}$  fissato abbiamo che se  $n$  è sufficientemente grande

$$\frac{x_{i+ns}}{i+ns} \sim \frac{x_{i+ns}}{ns} < \frac{x_i + nr}{ns} = \frac{x_i}{ns} + \frac{r}{s} \longrightarrow \frac{r}{s}.$$

Allo stesso tempo se  $\frac{r'}{s'} \in A_\omega(x)$  allora per ogni  $i \in \mathbb{Z}$  fissato abbiamo che se  $n$  è sufficientemente grande

$$\frac{x_{i+ns'}}{i+ns'} \sim \frac{x_{i+ns'}}{ns'} > \frac{x_i + nr'}{ns'} = \frac{x_i}{ns'} + \frac{r'}{s'} \longrightarrow \frac{r'}{s'}.$$

Passando a limsup e liminf possiamo dunque scrivere che

$$\liminf_{i \rightarrow +\infty} \frac{x_i}{i} \geq \frac{r'}{s'} \quad \text{e} \quad \limsup_{i \rightarrow +\infty} \frac{x_i}{i} \leq \frac{r}{s};$$

e passando ora al sup su  $\frac{r'}{s'} \in A_\omega(x)$  e all'inf su  $\frac{r}{s} \in B_\omega(x)$  otteniamo che

$$\limsup_{i \rightarrow +\infty} \frac{x_i}{i} \leq \rho_\omega(x) \leq \liminf_{i \rightarrow +\infty} \frac{x_i}{i}.$$

Abbiamo in questo modo mostrato che esiste il limite

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{x_i}{i} = \rho_\omega(x) \quad (\text{allo stesso modo esiste } \lim_{i \rightarrow -\infty} \frac{x_i}{i} = \rho_\alpha(x)).$$

Consideriamo ora un numero razionale  $\frac{p}{q}$  ridotto ai minimi termini (con  $q > 0$ ) tale che  $\rho_\alpha(x) < \frac{p}{q} < \rho_\omega(x)$ ; sia  $y$  una configurazione minimale periodica con numero di rotazione  $\frac{p}{q}$ . Allora abbiamo che

$$\rho_\alpha(x) = \lim_{i \rightarrow -\infty} \frac{x_i}{i} < \lim_{i \rightarrow -\infty} \frac{y_i}{i} = \frac{p}{q} = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{y_i}{i} < \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{x_i}{i} = \rho_\omega(x)$$

e questo ci dice che  $y <_\alpha x$  e  $y <_\omega x$ ; lo stesso discorso vale per ogni traslazione di  $y$ . Ma allora se  $r$  è sufficientemente grande la disuguaglianza  $x_i \geq (T_{r,1}y)_i$  non può valere per ogni intero  $i$  e questo ci dice che i grafici di Aubry di  $x$  e  $y$  si incontrano almeno due volte, in contraddizione con l'Aubry's crossing lemma. Ci resta dunque da mostrare che  $\rho_\omega(x) \neq \pm\infty$ ; supponiamo per assurdo che  $\rho_\omega(x) = +\infty$  (l'altro caso si tratta in maniera del tutto analoga), allora abbiamo che

$$\lim_{i \rightarrow \pm\infty} \frac{x_i}{i} = +\infty.$$



In particolare se  $p$  è un numero naturale e  $y$  è una configurazione minimale periodica con numero di rotazione  $p$  allora  $y >_\alpha x$  e  $y <_\omega x$ ; scegliendo  $p$  sufficientemente grande e a meno di traslare  $y$  possiamo supporre che  $y_0 < x_0$  e  $y_1 > x_1$ . Ma allora i grafici di Aubry di  $x$  e  $y$  si incontrano almeno tre volte, in contraddizione con l'Aubry's crossing lemma.  $\square$

Diciamo che  $\rho(x) := \rho_\alpha(x) = \rho_\omega(x)$  è il *numero di rotazione* della configurazione minimale  $x$ ; la dimostrazione della proposizione 4.1.1 ci dice anche che la definizione di numero di rotazione coincide con quella data nel capitolo 1. Indichiamo con  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_h \in \mathbb{R}^\infty$  l'insieme di tutte le configurazioni minimali dotato della topologia di sottospazio di  $\mathbb{R}^\infty$  (il quale a sua volta è dotato della topologia prodotto).

**Teorema 4.2** *Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo chiuso di lunghezza unitaria; allora per ogni  $i \in \mathbb{Z}$  l'applicazione  $\rho : \pi_i^{-1}(I) \cap \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  è suriettiva.*

**dim.**

Impostiamo la dimostrazione in più passi successivi

- **PASSO 1**  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^\infty$  e la funzione  $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  che a ogni configurazione minimale associa il suo numero di rotazione è continua.

La prima affermazione discende immediatamente dalla definizione di  $\mathcal{M}$  e dal fatto che  $h$  è continua; per provare la seconda è utile il seguente

**Lemma 4.2.1** *Siano  $x \in \mathcal{M}$  e  $p, q \in \mathbb{Z}$  con  $q \geq 1$ ; allora, se  $x_{i+q} \leq x_i + p$  ( $x_{i+q} \geq x_i + p$ ) per qualche  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\rho(x) \leq \frac{p+1}{q}$  ( $\rho(x) \geq \frac{p-1}{q}$ ).*

**dim.**

Dimostriamo la prima affermazione; consideriamo la coppia  $(p+1, q)$ , allora esiste una configurazione  $y$  minimale e periodica di tipo  $(p+1, q)$ . A meno di sostituire  $y$  con una sua traslazione possiamo supporre che  $y_i < x_i$  e che  $y_{i+q} > x_i + p \geq x_{i+q}$ ; ma allora per il Aubry's crossing lemma abbiamo che  $y <_\alpha x$ ,  $y >_\omega x$  e dunque  $\rho(x) \leq \rho(y) = \frac{p+1}{q}$ .  $\square$

Ora la continuità dell'applicazione  $\rho$  segue facilmente dal lemma dal momento che  $x_{i+q}$  è funzione continua di  $x$ .

- **PASSO 2** Siano  $I, \Omega \subseteq \mathbb{R}$  compatti; se  $\pi_i : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  è la proiezione sull' $i$ -esimo fattore allora  $\rho^{-1}(\Omega) \cap \pi_i^{-1}(I)$  è un sottoinsieme compatto di  $\mathcal{M}$  per ogni  $i \in \mathbb{Z}$ .

Per il teorema di Tychonoff, poichè  $\mathcal{M}$  è chiuso in  $\mathbb{R}^\infty$ , è sufficiente provare  $\pi_j(\rho^{-1}(\Omega) \cap \pi_i^{-1}(I))$  è un sottoinsieme limitato di  $\mathbb{R}$  per ogni  $j \in \mathbb{Z}$ . Supponiamo  $j > i$  e consideriamo  $p \in \mathbb{Z}$  maggiorante per  $\Omega$  e

una configurazione minimale  $y$  periodica di tipo  $(p, 1)$  tale che  $y_i$  è un maggiorante per  $I$ . Allora  $y_j$  è maggiorante per  $\pi_j(\rho^{-1}(\Omega) \cap \pi_i^{-1}(I))$ , e ciò ci dice che  $y >_\omega x$  per ogni  $x \in \rho^{-1}(\Omega) \cap \pi_i^{-1}(I)$  dal momento che  $\rho(y) = p > \rho(x) \in \Omega$ ; inoltre  $y_i > x_i$  e per il Aubry's crossing lemma  $y_j > x_j$ . Gli altri casi si trattano in maniera analoga.

- **PASSO 3** Per ogni numero razionale  $\frac{p}{q}$  esiste una configurazione  $h$ -minimale periodica di tipo  $(p, q)$ ; dal momento che  $I$  ha lunghezza unitaria possiamo supporre che  $x_i \in I$ , inoltre  $\frac{p}{q} \in \rho(\pi_i^{-1}(I) \cap \mathcal{M})$  in quanto  $\rho(x) = \frac{p}{q}$ . Perciò  $\mathbb{Q} \subseteq \rho(\pi_i^{-1}(I) \cap \mathcal{M})$ ; d'altra parte però se  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  è compatto allora

$$\rho(\pi_i^{-1}(I) \cap \mathcal{M}) \cap \Omega = \rho(\pi_i^{-1}(I) \cap \rho^{-1}(\Omega))$$

è compatto. Da ciò segue che  $\rho(\pi_i^{-1}(I) \cap \mathcal{M})$  è chiuso e quindi contenendo  $\mathbb{Q}$  deve essere per forza tutto  $\mathbb{R}$ .

□

Questo Teorema ha come importante conseguenza il fatto che per ogni numero reale  $\omega$  esiste una configurazione minimale con numero di rotazione  $\omega$ . In generale se  $h$  è definito sulla chiusura della striscia di piano

$$V = \{(x, x') \in \mathbb{R}^2 \mid x + \omega_- < x' < x + \omega_+\}$$

allora abbiamo esistenza solo per i numeri di rotazione  $\omega$  nell'intervallo di twist  $(\omega_-, \omega_+)$ ; in questo senso tale Teorema generalizza il teorema di esistenza per orbite periodiche con numero di rotazione (razionale) nell'intervallo di twist a tutti i numeri di rotazione ammissibili.

### 4.3.1 Numeri di rotazione irrazionali

Consideriamo un numero di rotazione  $\omega$  irrazionale; allora per il Teorema 4.2 esiste una configurazione minimale  $x$  con numero di rotazione  $\omega$ . Diciamo che due configurazioni  $x$  e  $y$  sono  $\alpha$ -asintotiche (risp.  $\omega$ -asintotiche) se  $|x_i - y_i| \rightarrow 0$  per  $i \rightarrow -\infty$  (risp. se  $|x_i - y_i| \rightarrow 0$  per  $i \rightarrow +\infty$ ).

**Def. 3** Date due configurazioni  $x, y$  diciamo che  $x < y$  se  $x_i < y_i \forall i \in \mathbb{Z}$ .

Se  $x, y$  sono configurazioni  $h$ -minimali allora  $x < y$  equivale a dire che  $x <_\omega y$  e  $x <_\alpha y$ . Inoltre se  $\omega$  è un numero irrazionale allora vale la seguente

**Tricotomia 2** Se  $x$  e  $y$  sono due configurazioni  $h$ -minimali con numero di rotazione  $\omega$  allora  $x < y$  o  $x = y$  o  $x > y$ .

Il primo passo della dimostrazione (per la quale si rimanda a [7]) consiste nel provare la tesi quando  $y$  è una traslazione di  $x$ , cioè quando  $y = T_{p,q}x$ ; in

questo caso, dal momento che  $\omega = \rho_\alpha(x) = \rho_\omega(x)$  è un numero irrazionale, necessariamente si ha  $A_\alpha = A_\omega$  e  $B_\alpha = B_\omega$  e quindi

$$y <_\alpha x \iff y <_\omega x \quad \text{e} \quad y >_\alpha x \iff y >_\omega x.$$

La tesi discende perciò direttamente dalla Tricotomia 1. Si definisce poi la *Aubry's hull function*  $\phi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  della configurazione minimale  $x$  ponendo

$$\phi_x(t) := \sup\{(T_{p,q}x)_0 \mid p - q\omega \leq t\}.$$

Tale applicazione è strettamente crescente e verifica la condizione di periodicità  $\phi_x(t+1) = \phi_x(t) + 1$ ; grazie a  $\phi_x$  ci si può ridurre a dimostrare la tesi nel caso in cui  $x$  e  $y$  sono configurazioni asintotiche e in questo contesto conclude la dimostrazione il seguente

**Aubry's crossing lemma 2** *Se  $x$  e  $y$  sono due configurazioni minimali  $\alpha$ -asintotiche (o  $\omega$ -asintotiche) allora  $x=y$  oppure i loro grafici di Aubry non si intersecano.*

### 4.3.2 Numeri di rotazione razionali

Sia  $\omega$  un numero razionale e sia  $x$  una configurazione  $h$ -minimale con numero di rotazione  $\omega$ . Supponiamo che  $T_{-p,-q}x >_\omega x$ ; allora fissato  $i \in \mathbb{N}$  la successione  $\{x_{i+ql} - pl\}_{l \in \mathbb{N}}$  è definitivamente crescente. Inoltre

$$x_{i+ql} - pl \leq x_i + 2 \quad (\text{altrimenti per il Lemma 4.2.1 } \rho(x) \geq \frac{pl+1}{ql});$$

perciò per ogni  $i$  intero fissato abbiamo che

$$(l_\omega x)_i := \lim_{l \rightarrow +\infty} x_{i+ql} - pl \quad \text{esiste e} \quad l_\omega x = \lim_{l \rightarrow +\infty} T_{-pl,-ql}x$$

è una configurazione minimale. Analogamente se  $T_{-p,-q}x <_\omega x$  si ha

$$(l_\alpha x)_i := \lim_{l \rightarrow +\infty} x_{i+ql} - pl \quad \text{esiste e} \quad l_\alpha x = \lim_{l \rightarrow -\infty} T_{-pl,-ql}x$$

è una configurazione minimale. Sia  $l_\alpha x$  che  $l_\omega x$  sono periodiche di tipo  $(p, q)$ . Inoltre se  $x$  è periodica di tipo  $(p, q)$  allora  $T_{-p,-q}x = x$  e quindi  $l_\alpha x = l_\omega x = x$ ; altrimenti i grafici di Aubry di  $x, l_\alpha x, l_\omega x$  non si incontrano (per il Aubry's crossing lemma 2) così come non si incontrano i grafici di Aubry di  $x, T_{-p,-q}x$  (anche se ovviamente si ha  $l_\alpha T_{-p,-q}x = l_\alpha x, l_\omega T_{-p,-q}x = l_\omega x$ ). Quindi vale

**Tricotomia 3** *Se  $x$  una è configurazione minimale con numero di rotazione  $\omega$  razionale e  $y$  è una sua traslazione allora i loro grafici di Aubry non si intersecano, altrimenti si ha  $x=y$ .*

## 4.4 Lo spazio dei simboli $\mathcal{S}$

Se  $\omega = \frac{p}{q}$  è un numero razionale allora la Tricotomia 3 ha come importante conseguenza il fatto che, se  $x$  è una configurazione minimale con numero di rotazione  $\omega$ , allora vale una e una sola delle tre seguenti possibilità:

$$1) T_{-p,-q}x < x, \quad 2) T_{-p,-q}x = x, \quad 3) T_{-p,-q}x > x.$$

Diciamo dunque che  $x$  ha *simbolo di rotazione* (e lo indichiamo con  $\tilde{\rho}(x)$ )  $\frac{p}{q}-$  se siamo nel caso 1 (quindi  $l_\omega x < x < l_\alpha x$ ),  $\frac{p}{q}$  se siamo nel caso 2 (quindi  $l_\omega x = x = l_\alpha x$ ) e  $\frac{p}{q}+$  se siamo nel caso 3 (quindi  $l_\alpha x < x < l_\omega x$ ).

Estendiamo la definizione di simbolo di rotazione anche al caso in cui  $x$  è una configurazione minimale con numero di rotazione  $\omega$  irrazionale ponendo semplicemente  $\tilde{\rho}(x) = \rho(x)$ . Lo *spazio dei simboli*  $\mathcal{S}$  è l'unione disgiunta di  $\mathbb{R}$  con l'insieme  $\{\frac{p}{q} \pm \mid \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\}$  e la proiezione canonica di  $\mathcal{S}$  su  $\mathbb{R}$  è l'applicazione  $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  che ad ogni simbolo di rotazione associa il corrispondente numero di rotazione, ossia

$$\begin{cases} \pi(\omega) = \omega & \text{se } \omega \in \mathbb{R}; \\ \pi(\frac{p}{q} \pm) = \frac{p}{q}; \end{cases}$$

Su  $\mathcal{S}$  introduciamo la relazione d'ordine definita da

$$\pi(\omega_0) < \pi(\omega_1) \implies \omega_0 < \omega_1 \quad \text{e} \quad \frac{p}{q}- < \frac{p}{q} < \frac{p}{q}+$$

e dotiamo  $\mathcal{S}$  della topologia indotta da tale relazione d'ordine. Per ogni simbolo di rotazione  $\omega$  reale indichiamo con  $\mathcal{M}_\omega = \mathcal{M}_\omega^h \subseteq \mathcal{M}^h$  l'insieme delle configurazioni minimali con simbolo di rotazione  $\omega$ , mentre per i simboli di rotazione  $\omega = \frac{p}{q} \pm$  indichiamo con  $\mathcal{M}_\omega$  l'unione di  $\mathcal{M}_{\frac{p}{q}}$  con l'insieme delle configurazioni minimali con simbolo di rotazione  $\omega$ ; per definizione dunque  $\mathcal{M}_{\frac{p}{q}} = \mathcal{M}_{\frac{p}{q}-} \cup \mathcal{M}_{\frac{p}{q}+}$ . Allora vale la seguente

**Tricotomia 4** *Siano  $x, y \in \mathcal{M}_\omega^h$ ; allora  $x < y$  o  $x=y$  o  $x > y$ .*

## 4.5 Il teorema del grafico-Lipschitz

Consideriamo un differomorfismo  $g : \mathbb{T} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{T} \times (a, b)$  che si solleva a un'applicazione twist monotona  $f$ ; in generale un'orbita  $\{(x_i, y_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  di  $f$  è univocamente determinata dalla successione  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  grazie alla relazione

$$y_i = \partial_2 h(x_{i-1}, x_i) = -\partial_1 h(x_i, x_{i+1}). \quad (4.2)$$

Chiamiamo *orbite minimali* le orbite di  $f$  che corrispondono a configurazioni minimali e, con abuso di notazione, anche quelle orbite di  $g$  che si sollevano a orbite minimali di  $f$ . Indichiamo con  $M = M_g \subseteq \mathbb{R}^2$  l'insieme delle orbite

minimali di  $f$  e con  $\Sigma = \Sigma_g \subseteq \times \mathbb{R}$  l'insieme delle orbite minimali di  $g$ . Se  $\{(x_i, y_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  è un'orbita minimale di  $f$  allora il suo *simbolo di rotazione* è  $\tilde{\rho}(x)$  (cioè il simbolo di rotazione della corrispondente configurazione minimale) mentre il suo *numero di rotazione* è  $\rho(x)$  (cioè il numero di rotazione della corrispondente configurazione minimale). Anche se in realtà potrebbe creare confusione utilizzeremo gli stessi termini anche per le orbite minimali di  $g$ , infatti cambiando il sollevamento  $f$  il numero e il simbolo di rotazione cambiano (per l'aggiunta di una costante  $n$ ) ma questa è solo un'apparente ambiguità in quanto tutti i risultati dipendono solo dalla classe modulo 1 di questi ultimi. Fissiamo dunque un simbolo di rotazione  $\omega \in \mathcal{S}$  e indichiamo con  $M_\omega = M_{\omega, f}$  il sottoinsieme di  $M$  delle orbite minimali per  $f$  con simbolo di rotazione  $\omega$  e con  $\Sigma_\omega = \Sigma_{\omega, g}$  il sottoinsieme di  $\Sigma$  delle orbite minimali per  $g$  con simbolo di rotazione  $\omega$ . Indichiamo inoltre con  $\mathcal{A}_\omega := \pi_0(\mathcal{M}_\omega)$  e definiamo su  $\mathcal{M}_\omega$  i seguenti omeomorfismi:

- $T : \mathcal{M}_\omega^h \longrightarrow \mathcal{M}_\omega^h, T(\dots, x_i, \dots) := (\dots, x_i + 1, \dots)$  (traslazione);
- $S : \mathcal{M}_\omega^h \longrightarrow \mathcal{M}_\omega^h, S(\dots, x_i, \dots) := (\dots, x_{i+1}, \dots)$  (shift);

**Teorema 4.3 (del grafico-Lipschitz)**  $\mathcal{A}_\omega$  è chiuso in  $\mathbb{R}$  e l'applicazione  $\pi_0 : \mathcal{M}_\omega \longrightarrow \mathcal{A}_\omega$  è un omeomorfismo; in particolare dunque  $M_\omega$  è un sottoinsieme chiuso di  $\mathbb{R}^2$  (e analogamente  $\Sigma_\omega$  è un sottoinsieme chiuso di  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ ). Inoltre la proiezione  $\pi_1$  sul primo fattore induce un omeomorfismo  $\pi_1 : M_\omega \longrightarrow \mathcal{A}_\omega$  (rispettivamente  $\pi_1 : \Sigma_\omega \longrightarrow \mathcal{A}_\omega/\mathbb{Z}$ ) che ha inversa Lipschitziana; infine la costante di Lipschitz dipende solo da  $h$  e dalle sue derivate fino al secondo ordine.

**dim.**

Per la Tricotomia 4 l'applicazione  $\pi_0$  è iniettiva, mentre il passo 2 della dimostrazione del Teorema 4.2.1 ci dice che  $\pi_0$  è propria; la prima affermazione segue perciò da fatti elementari di topologia generale. Sia ora  $S$  lo shift su  $\mathcal{M}_\omega^h$ ; consideriamo l'applicazione  $\Phi : \mathcal{A}_\omega \longrightarrow \mathcal{A}_\omega$  definita da  $\Phi := \pi_0^{-1} \circ S \circ \pi_0$  e mostriamo che tale mappa è bi-Lipschitziana. Osserviamo che  $\Phi, \Phi^{-1}$  associano a un elemento  $\xi \in \mathcal{A}_\omega$  l'elemento successivo e l'elemento precedente della configurazione minimale determinata da  $\xi$ ; fissiamo dunque  $\xi, \tilde{\xi} \in \mathcal{A}_\omega$ . Dal momento che per la periodicità di  $h$  e per l'uniforme limitatezza di  $|x_1 - x_0|, |x_0 - x_{-1}|$  (per ogni  $x \in \mathcal{M}_\omega^h$ ) ci si può ridurre a considerare il caso  $0 \leq \xi \leq \tilde{\xi} < 2$ , possiamo assumere che  $\Phi^{-1}(\xi), \xi, \Phi(\xi), \Phi^{-1}(\tilde{\xi}), \tilde{\xi}, \Phi(\tilde{\xi})$  siano contenuti in un intervallo compatto  $I$ . Ma allora esistono  $\delta, L > 0$  tali che  $\partial_{12}h \leq -\delta < 0$  su  $I \times I$  con  $\partial_1 h, \partial_2 h$  Lipschitziane con costante di Lipschitz  $L$  su  $I \times I$ . Valgono perciò le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \delta(\Phi^{-1}(\tilde{\xi}) - \Phi^{-1}(\xi)) + (\Phi(\tilde{\xi}) - \Phi(\xi)) \leq \\
&\leq \partial_2 h(\Phi^{-1}(\xi), \tilde{\xi}) - \partial_2 h(\Phi^{-1}(\tilde{\xi}), \tilde{\xi}) + \partial_1 h(\xi, \Phi(\xi)) - \partial_1 h(\xi, \Phi(\tilde{\xi})) = \\
&= \partial_2 h(\Phi^{-1}(\xi), \tilde{\xi}) - \partial_2 h(\Phi^{-1}(\xi), \xi) + \partial_1 h(\tilde{\xi}, \Phi(\tilde{\xi})) - \partial_1 h(\xi, \Phi(\tilde{\xi})) \leq \\
&\leq 2L(\tilde{\xi} - \xi);
\end{aligned}$$

La prima disuguaglianza è una conseguenza dell'Aubry's crossing lemma; la seconda e l'ultima seguono invece dal teorema del valor medio, mentre l'uguaglianza centrale segue dal fatto che  $(\Phi^{-1}(\xi), \xi, \Phi(\xi))$  e  $(\Phi^{-1}(\tilde{\xi}), \tilde{\xi}, \Phi(\tilde{\xi}))$  sono segmenti stazionari per  $h$ . Questo mostra la bi-Lipschitzianità dell'applicazione  $\Phi$ ; osserviamo infine che  $\pi_1^{-1} : \mathcal{A}_\omega \rightarrow M_\omega$  può essere riscritta, utilizzando la funzione  $\Phi$ , come

$$\pi_1^{-1}(\xi) = (\xi, -\partial_1 h(\xi, \Phi(\xi)))$$

dal momento che  $\pi^{-1}(x_i) = (x_i, y_i)$  con  $y_i = -\partial_1 h(x_i, x_{i+1})$  e, come osservato in precedenza,  $x_{i+1} = \Phi(x_i)$  e questo conclude.  $\square$

Nella nostra trattazione abbiamo provato che  $\mathcal{A}_\omega$  è non vuoto se  $\omega \in \mathbb{R}$ ; per quanto riguarda il caso  $\mathcal{A}_\omega$  con  $\omega = \frac{p}{q} \pm$  si rimanda a [7].

In generale, se  $f$  è un omeomorfismo di uno spazio topologico compatto in sè, un sottoinsieme chiuso e invariante  $K$  si dice *minimale* se non contiene altri sottoinsiemi chiusi e invarianti oltre a sè stesso e l'insieme vuoto. E' una conseguenza immediata del Lemma di Zorn che ogni omeomorfismo di uno spazio topologico compatto ammetta un insieme minimale. Osserviamo che le applicazioni  $S$  e  $T$  commutano tra loro e quindi  $S$  induce sul compatto  $\mathcal{M}_\omega^h/T$  un omeomorfismo  $\bar{S} : \mathcal{M}_\omega^h/T \rightarrow \mathcal{M}_\omega^h/T$ ; inoltre i diagrammi

$$\begin{array}{ccc} M_{\omega,f} & \xrightarrow{f} & M_{\omega,f} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_\omega^h & \xrightarrow{S} & \mathcal{M}_\omega^h \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Sigma_{\omega,g} & \xrightarrow{g} & \Sigma_{\omega,g} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_\omega^h/T & \xrightarrow{\bar{S}} & \mathcal{M}_\omega^h/T \end{array}$$

sono commutativi. In particolare il secondo diagramma ci dice che  $g$  è topologicamente coniugata con  $\bar{S}$ .

**Teorema 4.4** *Sia  $\omega$  un simbolo di rotazione irrazionale; allora l'applicazione  $\bar{S} : \mathcal{M}_\omega^h/T \rightarrow \mathcal{M}_\omega^h/T$  ha un unico insieme minimale a cui ogni orbita tende per iterazione in avanti o all'indietro; inoltre  $\bar{S}$  è semiconiugata alla rotazione  $R_\omega$ . In particolare dunque le stesse conclusioni valgono anche per l'applicazione  $g : \Sigma_{\omega,g} \rightarrow \Sigma_{\omega,g}$ .*

Data una configurazione minimale  $x$ , tramite la Aubry's hull function  $\phi_x$  possiamo definire due nuove configurazioni ponendo  $x_i^{t \pm 0} := \phi_x(t + \omega i \pm 0)$ . Le configurazioni così definite sono minimali con numero di rotazione  $\omega$ ; infatti possiamo scegliere una successione  $\{(p_n, q_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  tale che  $p_n - q_n \omega \uparrow t$ , ma allora la minimalità di  $x^{t-0} = \lim T_{p_n, q_n} x$  segue dal fatto che  $\mathcal{M}_\omega$  è chiuso (con un procedimento del tutto analogo si vede anche il caso di  $x^{t+0}$ ).

**Lemma 4.4.1** *Siano  $x$  e  $y$  configurazioni minimali con numero di rotazione  $\omega$ , allora esiste  $a \in \mathbb{R}$  tale che  $\phi_y(t \pm 0) = \phi_x(t + a \pm 0)$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .*

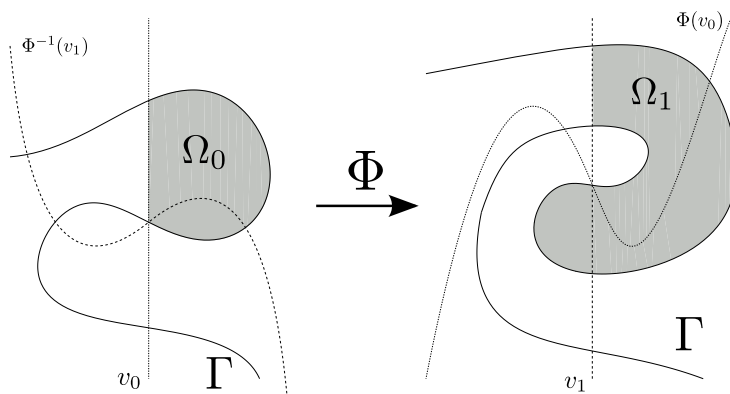
Se dunque  $x$  è una configurazione minimale con numero di rotazione  $\omega$  allora l'insieme minimale ricercato è  $\{x^{t\pm 0} \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Osserviamo che l'ipotesi che  $\omega$  sia irrazionale è indispensabile, se infatti  $\omega = \frac{p}{q}, \frac{p}{q} \pm$  allora l'insieme minimale in  $\Sigma_{\omega,g}$  è formato dalle orbite periodiche (la cui unione è  $\Sigma_{\frac{p}{q},g}$ ) a cui ogni orbita tende per iterazione in avanti e all'indietro.

Indichiamo con il termine *cerchio invariante* per un'applicazione twist monotona una curva  $\Gamma$  in  $\mathbb{T} \times (a, b)$  semplice, omotopicamente non banale e  $g$ -invariante; con lo stesso termine indichiamo anche il sollevamento di  $\Gamma$  al rivestimento universale  $\mathbb{R} \times (a, b)$ . Nulla ci dice che per ogni applicazione twist monotona esistano cerchi invarianti; per esempio nel caso della mappa standard, quando siamo vicini all'integrabilità (cioè per  $k$  molto vicino a zero) esistono dei cerchi invarianti, cerchi che però si spezzano quando invece andiamo verso il caos (cioè facciamo crescere  $k$ ). Qualora esistano però i cerchi invarianti sono degli insiemi minimizzanti (per ulteriori dettagli si veda [7]). In generale comunque vale il seguente Teorema, di cui daremo uno sketch della dimostrazione (per ulteriori dettagli si veda [1], anche se si potrebbe dedurre dal teorema del grafico-Lipschitz a patto di aver dimostrato che ogni cerchio invariante è effettivamente un insieme minimizzante).

**Teorema 4.5** *Ogni cerchio invariante di una mappa twist monotona  $\Phi$  è il grafico di una funzione Lipschitziana.*

**dim.**

Per assurdo supponiamo che  $\Gamma$  sia un cerchio invariante che non è grafico; allora siamo in una situazione come quella indicata nella figura (4.3).



**Figura 4.3:** Applicazione twist monotona in situazione di non grafico.

Siano  $v_0$  e  $v_1$  due rette verticali; applichiamo  $\Phi$  e vediamo cosa succede all'area del dominio  $\Omega_0$ . Dal momento che per la condizione di twist la preimmagine  $\Phi^{-1}(v_1)$  è grafico e  $\Phi$  preserva l'area, l'area di  $\Omega_1$  è maggiore dell'area di  $\Omega_0$ . Iterando  $\Phi$  otteniamo una successione  $\{\Omega_n\}$  tale che

$$\dots > |\Omega_n| > \dots > |\Omega_1| > |\Omega_0|.$$

D'altra parte tutto si trova in un dominio limitato in quanto  $\Gamma$  è una curva invariante; perciò abbiamo che  $\sup_n |\Omega_n| < +\infty$ , il ch  ci dice che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\Omega_n - \Omega_{n-1}| = 0.$$

A partire da questo   facile vedere che  $\Gamma$  si autointerseca in un punto e quindi non   semplice e questo prova il teorema.  $\square$

Infine vale il seguente Teorema che lega tra loro i discorsi fatti nel capitolo 3 con la teoria sviluppata in questo capitolo.

**Teorema 4.6** *Siano  $\omega$  un numero irrazionale e  $x$  una configurazione minimale con numero di rotazione  $\omega$ ; allora la hull function  $\Phi_x$  minimizza  $F_\omega(\Phi)$  sull'insieme delle funzioni misurabili che soddisfano la condizione di periodicit   $\Phi(t+1) = \Phi(t) + 1$  e per cui  $\Phi(t) - t$  sia limitato. Inoltre l'elemento minimizzante   unico a meno di traslazioni, cio  se  $\Phi$  minimizza  $F_\omega$  allora, se  $T_a(t) := t + a$ ,  $\Phi = \Phi_x T_a$  quasi ovunque con  $a \in \mathbb{R}$ .*

Da questo teorema segue che l'insieme  $\Sigma_\omega^*$    l'unico insieme minimale per  $g|_{\Sigma_\omega}$  nel caso in cui  $\omega$  sia irrazionale.



## Appendice A

# Richiami di topologia generale

### A.1 Topologia prodotto e Teorema di Tychonoff

Sia  $\{X_j\}_{j \in J}$  una  $J$ -sequenza di spazi topologici, indichiamo con

$$X = \prod_{j \in J} X_j := \{f : J \longrightarrow \bigcup_{j \in J} X_j \mid f(j) \in X_j \forall j \in J\}$$

lo spazio prodotto. La topologia meno fine su  $X$  che rende continue le proiezioni  $\pi_j : X \longrightarrow X_j$  per ogni  $j \in J$  si dice *topologia prodotto*. In generale dati un insieme  $X$  e uno spazio topologico  $Y$ , se  $\Phi \subseteq Y^X$  è un insieme di funzioni da  $X$  a  $Y$  allora la topologia meno fine tra quelle che rendono continue tutte le  $\varphi \in \Phi$  è generata dalla famiglia  $\{\varphi^{-1}(U) \mid U \subseteq Y \text{ aperto e } \varphi \in \Phi\}$ . Quindi la topologia prodotto è generata dalla famiglia

$$\mathcal{F} := \bigcup_{j \in J} \{\pi_j^{-1}(U) \mid U \subseteq X_j \text{ aperto}\}.$$

**Teorema A.1 (Tychonoff)** *Data una  $J$ -sequenza  $\{X_j\}_{j \in J}$  di spazi topologici consideriamo sullo spazio prodotto  $X$  la topologia prodotto; allora  $X$  è compatto se e solo se  $X_j$  è compatto per ogni  $j \in J$ .*

Il Teorema di Tychonoff è uno dei teoremi cardine della topologia generale; per la dimostrazione si rimanda a [11].

### A.2 La distanza di Hausdorff

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico; definiamo la *distanza di Hausdorff* ponendo

$$d_H(A, B) := \max\left\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b)\right\} \in [0, +\infty].$$

La distanza di Hausdorff è una funzione  $d_H : P(X) \times P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$  che soddisfa le seguenti proprietà:

- $A = B \implies d_H(A, B) = 0$  e vale il viceversa se  $A$  e  $B$  sono chiusi;
- $d_H(A, B) = d_H(B, A)$  per ogni  $A, B \in P(X)$ .
- $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$  per ogni  $A, B, C \in P(X)$ .

Da questi fatti segue che se  $F_0 \subseteq X$  è un chiuso allora l'insieme

$$\{F \subseteq X \mid F \text{ chiuso e } d_H(F, F_0) < +\infty\}$$

dotato della distanza di Hausdorff è uno spazio metrico.

**Prop. A.1.1** *Sia  $X$  uno spazio metrico compatto, allora l'insieme dei chiusi di  $X$  dotato della distanza di Hausdorff è uno spazio metrico compatto.*

# Bibliografia

- [1] S.Aubry, P.Y.Le Daeron *The discrete Fraenkel-Kontorova model and its extension I: exact results for the ground states*, Phisica, 1983.
- [2] V.Bangert *Mather sets for twist maps and geodesics on tori*, Dynamics reported, 1988.
- [3] G.D.Birkhoff *Surface transformations and their dynamical applications*, Acta math, 1922.
- [4] G.D.Birkhoff *On the periodic motion of dynamical systems*, Acta math, 1927.
- [5] G.D.Birkhoff *Sur quelques courbes fermées remarquables*, Bull.Soc.Math. de France, 1932.
- [6] G.A.Hedlund *Geodesics on a two-dimensional Riemannian manifold with periodic coefficients*, Ann. of Math, 1932.
- [7] J.Mather, G.Forni *Transition to chaos in quantum and classical mechanics, Action minimizing orbits in Hamiltonian systems*, Springer, 1994.
- [8] J.Mather *Existence of quasi periodic orbits for twist homeomorphism of the annulus*, Topology, 1982.
- [9] K.F.Siburg *The principle of least action in geometry and dynamics*, Springer, 2004.
- [10] S.Tabachnikov *Geometry and billiards*, 1991.
- [11] A.Hatcher *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

## Ringraziamenti

Un ringraziamento particolare va al Prof. Alberto Abbondandolo che mi ha pazientemente sopportato in questi mesi, agli studenti Antonio De Capua e Umberto Lardo che mi hanno aiutato nella realizzazione delle immagini e ai miei genitori e parenti che mi sopportano da una vita. Un ringraziamento speciale va all'amico Giovanni Sfarlocca, senza il quale gli anni di università per noi studenti classe 1988 non sarebbero certamente stati gli stessi, e alla sua più grande creazione: il Pedro.

Un ringraziamento va poi fatto al Tambe e al Massey (che molto spesso mi risparmiano chilometri e chilometri di strada a piedi), a Alex Sfarl Neri, al Paglia (anche se non si fa mai vedere), al Gian (anche se un po' troppo spesso si perde) e in generale a tutti gli amici del mitico Dipartimento di Matematica (detto comunemente D.I.P.), a Beppe e Mattia, a Matteo e alle nostre scorribande sempre esagerate con la bicicletta e in generale a tutti gli amici di infanzia e di adolescenza. Un ringraziamento infine va alla città di Pisa e al suo clima invidiabile, dove un tiepido sole (che lascia spazio solo raramente a qualche breve pioggia) riscalda le corte giornate invernali mentre una brezza leggera rinfresca le peraltro già fresche giornate estive.