Grado topologico

1 Il grado topologico in dimensione finita

1.1 Preliminari

Ricordiamo alcuni fatti sull'integrazione di forme e sui valori singolari di una mappa.

Integrazione di n-forme differenziali. Siano X e Y varietà n-dimensionali. Qui e nel seguito per varietà si intenderà sempre varietà senza bordo di classe C^∞ Hausdorff e paracompatta. Sia α una k-forma su Y, e sia $f : X \to Y$ una mappa di classe C^1. Il *pull-back* di α tramite f è la k-forma $f^*(\alpha)$ su X, definita da

$$f^*(\alpha)(x)[\xi_1, \dots, \xi_k] = \alpha(f(x))[Df(x)\xi_1, \dots, Df(x)\xi_k], \quad \forall x \in X,\ \forall \xi_1, \dots, \xi_k \in T_x X.$$

Nel caso $k = n$, α si esprime in coordinate locali $(y^1, \dots, y^n)$ tramite una funzione reale a,

$$\alpha(y) = a(y) dy^1 \wedge \dots dy^n,$$

e la n-forma $f^*(\alpha)$ si esprime in coordinate locali $(x^1, \dots, x^n)$ su X come

$$f^*(\alpha)(x) = a(f(x)) \det Df(x)\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \tag{1}$$

L'operazione di pull-back commuta con il differenziale:

$$f^*(d\alpha) = df^*(\alpha).$$

Se Y è una n-varietà orientata e la n-forma α ha supporto compatto, è ben definito l'integrale di α su Y,

$$\int_Y \alpha.$$

Dalla formula di cambio di variabile negli integrali multipli,

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} a(g(x)) |\det Dg(x)|\, dx,$$

dove $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo C^1, e dalla formula (1) segue che se $f : X \to Y$ è un diffeomorfismo C^1 tra varietà connesse orientate, allora

$$\int_X f^*(\alpha) = \text{sign} \det Df \int_Y \alpha. \tag{2}$$

La quantità sign $\det Df$ vale 1 se f conserva l'orientazione, -1 se la inverte.

Il teorema di Stokes implica che se β è una $(n-1)$-forma con supporto compatto in Y, allora

$$\int_Y d\beta = 0.$$

In effetti, vale anche una sorta di viceversa:

1.1 Lemma. *Sia α una n-forma su $\mathbb{R}^n$ con supporto contenuto in un cubo aperto $Q \subset \mathbb{R}^n$ ed integrale nullo. Allora esiste una $(n-1)$-forma β con supporto contenuto in Q e tale che $d\beta = \alpha$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre

$$\alpha(x) = a(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

con $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avente supporto nel cubo aperto I^n, dove $I = (0,1)$. Il nostro scopo è dimostrare che se

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\, dx = 0,$$

allora esistono funzioni $b^1, \dots, b^n \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ con supporto in I^n tali che

$$a(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x^j}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Infatti in questo caso

$$\beta(x) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} b_j(x)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

verifica $d\beta = \alpha$.

Ragioniamo per induzione su n. Se $n = 1$ basta porre

$$b_1(x) = \int_{-\infty}^x a(s)\, ds.$$

Supponiamo che la conlusione del lemma sia vera in dimensione n, ed indichiamo con $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ le coordinate di $\mathbb{R}^{n+1}$. Dall'ipotesi

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} a(x,t)\, dxdt = 0,$$

segue che la funzione

$$m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad m(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} a(x,t)\, dt,$$

ha integrale nullo su $\mathbb{R}^n$. Inoltre m ha supporto nel cubo I^n. Per l'ipotesi induttiva,

$$m(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x^j}(x),$$

con le f_j aventi supporto in I^n. Definiamo $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ come

$$g(x,t) := \int_{-\infty}^t (a(x,s) - \tau(s)m(x))\, ds,$$

dove $\tau \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ è una funzione con supporto in I ed integrale 1. Allora il supporto di g è contenuto in I^{n+1}, e

$$a(x,t) = a(x,t) - \tau(t)m(x) + \tau(t)m(x) = \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) + \sum_{j=1}^n \tau(t) \frac{\partial f_j}{\partial x^j}(x).$$

Quindi le funzioni

$$b_j(x,t) := \tau(t) f_j(x), \ \forall j = 1, \dots, n, \quad b_{n+1}(x,t) := g(x,t),$$

risolvono il problema. $\square$

Valori regolari e critici. Sia $f : X \to Y$ una mappa di classe C^1 tra due varietà. Il punto $x \in X$ si dice *punto regolare di* f se $Df(x)$ è un'inversa sinistra (in dimensione finita, se $Df(x)$ è surgettivo), altrimenti si dice *punto critico*. L'immagine dei punti critici è l'insieme dei *valori critici*. I punti $y \in Y$ che non sono valori critici si dicono *valori reglari*. Quindi, se $y \in Y$ è un valore regolare, l'immagine inversa $f^{-1}(\{y\})$ è vuota oppure è una sottovarietà C^1 di X. Se tanto X quanto Y hanno dimensione finita, $\dim f^{-1}(\{y\}) = \dim X - \dim Y$. In particolare se $\dim X = \dim Y$, $f^{-1}(\{y\})$ è un insieme discreto.

1.2 Teorema. (Teorema di Sard) *Siano X e Y varietà di dimensione finita, e sia $f \in C^k(X,Y)$, con*

$$k > \max\{0, \dim X - \dim Y\}.$$

Allora l'insieme dei valori critici di f ha misura di Lebesgue nulla in Y.

Dato che i cambi di coordinate C^1 mandano insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla, e dato che l'unione numerabile di insiemi di misura nulla ha misura nulla, la nozione di insieme di misura nulla si estende dai sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ ai sottoinsiemi di una varietà n-dimensionale. Il teorema di Sard è banale nel caso $\dim X < \dim Y$. Anche il caso $\dim X = \dim Y$ (che è quello che ci interesserà nel seguito) risulta piuttosto semplice (si veda ad esempio [Dei85] Proposizione 1.4), mentre il caso $\dim X - \dim Y$ presenta difficoltà maggiori (si veda ad esempio [AR67]).

1.2 Costruzione del grado topologico

Siano X_0 e Y varietà n-dimensionali orientate, e sia $X \subset X_0$ un aperto con chiusura $\overline{X} = X \cup \partial X$ compatta. Siano $f \in C^0(\overline{X}, Y)$ e $y \in Y$ tale che $y \notin f(\partial X)$. Vorremmo definire il grado di f su X rispetto al punto y, che indicheremo con $\deg(f, X, y)$, come il numero di soluzioni $x \in X$ dell'equazione $f(x) = y$, contate con opportuna molteplicità algebrica.

Mappe di classe $\mathbf{C^1}$. Iniziamo con l'assumere che $f \in C^1(X,Y) \cap C^0(\overline{X}, Y)$. Sia $y \in Y \setminus f(\partial X)$ e sia $U \subset Y \setminus f(\partial X)$ un intorno *cubico* di y. Questo vuol dire che U è diffeomorfo ad un cubo aperto di $\mathbb{R}^n$ (equivalentemente, ad una palla aperta di $\mathbb{R}^n$). Sia α una n-forma su Y, tale che

$$\operatorname{supp} \alpha \subset U \quad \text{e} \quad \int_Y \alpha = 1.$$

Definiamo

$$\deg(f, X, y) := \int_X f^*(\alpha).$$

Mostriamo che questa definizione non dipende dalla scelta della n-forma α. Sia dunque α' un'altra n-forma ammissibile. Dato che $\alpha' - \alpha$ ha integrale nullo ed ha supporto in un intorno cubico, il Lemma 1.1 implica che esiste una $(n-1)$-forma β con supporto in U tale che $\alpha' - \alpha = d\beta$. Quindi

$$\int_X f^*(\alpha') - \int_X f^*(\alpha) = \int_X f^*(\alpha' - \alpha) = \int_X f^*(d\beta) = \int_X df^*(\beta).$$

Dato che β ha supporto in U, che è disgiunto da $f(\partial X)$, la forma $f^*(\beta)$ ha supporto compatto in X, e dunque l'ultimo integrale si annulla. Questo prova l'indipendenza dalla scelta di α.

Si noti che la funzione

$$Y \setminus f(\partial X) \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \deg(f, X, y),$$

è localmente costante: infatti se $y_0 \in Y \setminus f(\partial X)$, $U \subset Y \setminus f(\partial X)$ è un intorno cubico di y_0 e α è una n-forma con supporto in U ed integrale 1, risulta

$$\deg(f, X, y) = \int_X f^*(\alpha) = \deg(f, X, y_0)$$

per ogni $y \in U$.

Il risultato seguente ci dice che se y è un valore regolare, $\deg(f, X, y)$ è effettivamente il numero di soluzioni di $f(x) = y$, contate con molteplicità algebrica.

1.3 PROPOSIZIONE. *Se $y \in Y \setminus f(\partial X)$ è un valore regolare di $f \in C^1(X,Y)$, allora*

$$\deg(f,X,y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \text{sign}\,\det Df(x).$$

Dimostrazione. Innanzitutto il teorema della funzione inversa garantisce che $f^{-1}(\{y\})$ è un sottoinsieme discreto di X. Dato che $y \notin f(\partial X)$, $f^{-1}(\{y\})$ non ha punti di accumulazione in ∂X, quindi è un insieme finito:

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, \dots, x_k\}.$$

Dunque la somma sopra è ben definita. La quantità sign det $Df(x)$ vale 1 quando f conserva l'orientazione in un intorno di x, -1 quando la inverte.

Sia $U \subset Y \setminus f(\partial X)$ un intorno cubico di y, e sia U_j un intorno di x_j tale che $f|_{U_j} : U_j \to f(U_j) \subset U$ sia un diffeomorfismo, per ogni $j = 1, \dots, k$. Se α è una n-forma con supporto nell'intorno di y $\cap_{j=1}^k f(U_j)$ ed integrale 1, dalla formula (2) si ottiene

$$\deg(f,X,y) = \int_X f^*(\alpha) = \sum_{j=1}^k \int_{U_j} f^*(\alpha) = \sum_{j=1}^k \text{sign}\,\det Df(x_j) \int_Y \alpha = \sum_{j=1}^k \text{sign}\,\det Df(x_j),$$

il che conclude la dimostrazione. □

La Proposizione 1.3 mostra in particolare che la quantità $\deg(f,X,y)$ è un intero per ogni $y \in Y \setminus f(\partial X)$ che sia un valore regolare di f. D'altra parte, per il Teorema di Sard 1.2 l'insieme dei valori regolari di f è denso in Y, e dato che la funzione $y \mapsto \deg(f,X,y)$ è localmente costante in $Y \setminus f(\partial X)$, concludiamo che $\deg(f,X,y)$ è un intero per ogni $y \in Y \setminus f(X)$. Riassumiamo i risultati fin qui ottenuti nel seguente:

1.4 TEOREMA. *Siano X_0, Y varietà orientate di dimensione n, sia $X \subset X_0$ un aperto con chiusura $\overline{X} = X \cup \partial X$ compatta, e sia $f \in C^1(X,Y) \cap C^0(\overline{X},Y)$. Allora la quantità*

$$\sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \text{sign}\,\det Df(x),$$

definita per ogni $y \in Y \setminus f(\partial X)$ che sia un valore regolare di f si estende ad una funzione

$$\deg(f,X,\cdot) : Y \setminus f(\partial X) \to \mathbb{Z}$$

che è costante su ciascuna componente connessa di $Y \setminus f(\partial X)$.

L'intero $\deg(f,X,y)$ si dice *grado topologico della mappa f su X rispetto al punto y*. Se Y_1 è una componente connessa di $Y \setminus f(\partial X)$, il fatto che $\deg(f,X,\cdot)$ sia costante su Y_1 ci permette di definire l'intero

$$\deg(f,X,Y_1) := \deg(f,X,y), \quad \forall y \in Y_1.$$

Esaminiamo il caso particolare in cui $X_0 = X$, e dunque $\partial X = \emptyset$, cioè X è una varietà compatta orientata senza bordo. Se assumiamo Y connessa, la quantità $\deg(f,X,y)$ non dipende da $y \in Y$, e si dice *grado di Brower* della mappa f, che si indica anche semplicemente con

$$\deg(f) = \deg(f,X,Y).$$

Se in più Y è non compatta, dato che $f(X)$ è compatta esistono punti di y che non appartengono all'immagine di f, dunque $\deg(f,X,Y) = 0$. Quindi il grado di Brower è significativo solamente quando anche Y è una varietà compatta.

Mappe continue. La teoria del grado topologico si estende facilmente a mappe solamente continue. Sia infatti $f \in C^0(\overline{X}, Y)$. È possibile approssimare f uniformemente con mappe $f_\epsilon \in C^\infty(X,Y) \cap C^0(\overline{X}, Y)$. Per far ciò è sufficiente vedere Y come sottovarietà chiusa di $\mathbb{R}^m$, per qualche m, grazie al teorema di Whitney, usare partizioni dell'unità C^∞ su X e la convoluzione per approssimare uniformemente $f : X \to Y$ con mappe $g_\epsilon : X \to \mathbb{R}^m$, ed infine comporre g_ϵ con la proiezione da un intorno tubolare di Y in $\mathbb{R}^m$ su Y.

Sia ora $y \in Y \setminus f(\partial X)$. Sia $(f_n) \in C^0(\overline{X}, Y) \cap C^1(X, Y)$ una successione di mappe che converge uniformemente a f. È facile vedere che se n è sufficientemente grande, il grado di $\deg(f_n, X, y)$ è ben definito e non dipende dalla scelta della successione f_n. Tale intero è per definizione il grado della mappa f, $\deg(f, X, y)$. Si veda [Dei85], sezione 2.3, per ulteriori dettagli.

Il grado topologico di una mappa continua è dunque definito per approssimazione con mappe C^1. Per dimostrare le proprietà del grado che vedremo nella prossima sezione sarà dunque sufficiente considerare il caso C^1, ed usare la densità C^0 delle mappe C^1.

1.3 Proprietà del grado topologico

Invarianza per omotopia. La proprietà di gran lunga più importante e più usata del grado topologico è la sua invarianza per omotopie: se

$$f : [0,1] \times \overline{X} \to Y$$

è una mappa continua e $y \in Y \setminus f([0,1] \times \partial X)$, allora il grado topologico di $f(t, \cdot)$ su X rispetto a y non dipende da t,

$$\deg(f(t,\cdot), X, y) = \deg(f(0,\cdot), X, y), \quad \forall t \in [0,1].$$

La definizione del grado che abbiamo scelto rende la verifica di questa proprietà particolarmente semplice. A meno di approssimazione, possiamo infatti supporre che f sia di classe C^1. Dato che $f([0,1] \times \partial X)$ è chiuso, esiste un intorno cubico U di y disgiunto da tale insieme, e se α è una n-forma con supporto in U ed integrale 1 si ha

$$\deg(f(t,\cdot), X, y) = \int_X f(t,\cdot)^*(\alpha).$$

Questa quantità dipende con continuità da $t \in [0,1]$, ed essendo un intero deve essere costante.

È utile esprimere l'invarianza per omotopia anche nella forma seguente. Si consideri l'insieme

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in C^0(\overline{X}, Y) \mid y \notin f(\partial X) \right\},$$

che è aperto nella topologia compatto-aperta. Allora la funzione

$$\mathcal{F} \to \mathbb{Z}, \quad f \mapsto \deg(f, X, y),$$

è localmente costante. L'equivalenza tra le due formulazioni è conseguenza del fatto che l'insieme $\mathcal{F}$ è localmente connesso per archi, come si può verificare facilmente vedendo Y come sottovarietà chiusa di $\mathbb{R}^m$ ed usando il teorema dell'intorno tubolare.

Addittività numerabile. Sia $X_1, X_2, \dots$ una successione di aperti disgiunti contenuti in X, e supponiamo $y \notin f(\overline{X} \setminus \bigcup_{j=1}^\infty X_j)$. Allora $\deg(f, X_j, y)$ è nullo eccetto al più per un numero finito di indici j, e

$$\deg(f, X, y) = \sum_{j=1}^\infty \deg(f, X_j, y).$$

Per dimostrare questa affermazione, possiamo supporre che f sia di classe C^1. Dato che $f(\overline{X} \setminus \bigcup_{j=1}^\infty X_j)$ è chiuso, possiamo trovare un valore regolare y' che appartiene alla stessa componente connessa di y in $Y \setminus f(\overline{X} \setminus \bigcup_{j=1}^\infty X_j)$. Quindi

$$\deg(f, X, y) = \deg(f, X, y'), \quad \deg(f, X_j, y) = \deg(f, X_j, y'), \quad \forall j = 1, 2, \dots.$$

Dato che y' ha un numero finito di immagini inverse, $f^{-1}(\{y'\}$ è contenuto in un unione finita degli X_j, e la tesi segue dalla formula del grado rispetto ad un valore regolare.

Escissione. Se $K \subset \overline{X}$ è chiuso e $y \notin f(K) \cup f(\partial X)$, allora

$$\deg(f, X, y) = \deg(f, X \setminus K, y).$$

Si tratta di un caso particolare della proprietà sopra: basta prendere $X_1 = X \setminus K$.

Mappe prodotto. Siano $X \subset X_0$ e Y varietà di dimensione n, $X' \subset X'_0$ e Y' varietà di dimensione n', e

$$f : \overline{X} \to Y, \quad f' : \overline{X'} \to Y',$$

mappe continue tali che $y \notin f(\partial X)$ e $y' \notin f'(\partial X')$. Si consideri la mappa:

$$f \times f' : \overline{X} \times \overline{X'} \to Y \times Y', \quad (x, x') \mapsto (f(x), f(x')).$$

Allora

$$\deg(f \times f', X \times X', (y, y')) = \deg(f, X, y) \cdot \deg(f', X', y').$$

Questo segue dal fatto che, se α è una n-forma su Y e α' è una n'-forma su Y', $\alpha \times \alpha'$ è una $(n + n')$-forma su $Y \times Y'$ e

$$\int_{X \times X'} (f \times f')^*(\alpha \times \alpha) = \int_X f^*(\alpha) \cdot \int_{X'} f'^*(\alpha').$$

Mappe a valori in $\mathbb{R}^n$. Supponiamo $Y = \mathbb{R}^n$. Se $g : \partial X \to \mathbb{R}^n$ è una mappa continua, grazie al teorema di Tiesze è possibile estenderla ad una mappa continua $f : \overline{X} \to \mathbb{R}^n$. Supponiamo che $y \notin g(\partial X)$. Allora il grado di f su X rispetto a y non dipende dalla scelta dell'estensione f. Infatti due qualsiasi estensioni f_0 e f_1 risultano omotope tramite la mappa

$$(t, x) \mapsto t f_1(x) + (1 - t) f_0(x),$$

che coincide con g su $[0, 1] \times \partial X$, e dunque non assume il valore y su tale insieme. Dunque ha senso parlare dell'intero

$$\deg(g, X, y).$$

È anche facile verificare che *questo intero dipende solamente dalla classe di omotopia di* $g : \partial X \to \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. Infatti grazie al teorema di Tiesze possiamo estendere una mappa continua $h : [0, 1] \times \partial X \to \mathbb{R}^n \setminus \{y\}$ ad una mappa continua $\tilde{h} : [0, 1] \times \overline{X} \to \mathbb{R}^n$, e l'invarianza per omotopia del grado permette di concludere.

Palle e sfere. Indichiamo con B^n la palla unitaria aperta di $\mathbb{R}^n$. Il suo bordo è la sfera S^{n-1}. Data una mappa continua $g : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, consideriamo la sua normalizzata

$$\hat{g} : S^{n-1} \to S^{n-1}, \quad \hat{g}(x) = \frac{g(x)}{|g(x)|}.$$

Sia $f : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ un'estensione continua di g. Abbiamo già visto che $\deg(f, B^n, 0)$ dipende solamente dalla mappa g. In effetti in questo caso si ha una conclusione più forte: questo grado coincide con il grado della mappa $\hat{g}$:

$$\deg(f, B^n, 0) = \deg(\hat{g}, S^{n-1}, S^{n-1}).$$

Infatti, dato che $\deg(f, B^n, 0)$ dipende solamente dalla classe di omotopia di $g = f|_{S^{n-1}} : \partial S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, l'omotopia

$$h(t, x) = \frac{g(x)}{|g(x)|^t}$$

mostra che possiamo assumere $g = \hat{g}$. Allora $|g(x)| = 1$ per ogni $x \in S^{n-1}$, e a meno di perturbazione possiamo supporre g di classe C^1. Possiamo quindi estendere g ad una mappa di classe C^1 $f : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ nel modo seguente:

$$f(0) = 0, \quad f(x) = |x|^2 g(x/|x|) \ \ \forall x \neq 0.$$

Sia $y \in S^{n-1}$ un valore regolare di $g : S^{n-1} \to S^{n-1}$. Allora $g^{-1}(\{y\}) = \{x_1, \dots, x_k\}$ da cui, se $\epsilon \in (0, 1)$,

$$f^{-1}(\{\epsilon y\}) = \{\epsilon x_1, \dots, \epsilon x_k\}.$$

Il fatto che x_j sia un punto regolare per $g : S^{n-1} \to S^{n-1}$ implica facilmente che ϵx_j è un punto regolare per f, e

$$\text{sign det}\, Df(\epsilon x_j) = \text{sign det}\, Dg(x_j).$$

La conclusione segue dalla formula del grado per valori regolari.

1.5 Osservazione. *Nel caso si mappe tra sfere, il grado topologico determina la classe di omotopia: due mappe continue $f, g : S^n \to \S^n$ sono omotope se e solamente se hanno lo stesso grado. Questo è il contenuto del teorema di Hopf (si veda [Mil65]).*

Una formula integrale generalizzata. Sia Y_1 una componente connessa di $Y \setminus f(\partial X)$ e sia β una n-forma con supporto in Y_1 ed integrale non nullo. Allora

$$\deg(f, X, Y_1) = \frac{\int_X f^*(\beta)}{\int_Y \beta}. \tag{3}$$

Considerando un ricoprimento di Y_1 mediante intorni cubici e per la paracompattezza, possiamo trovare una partizione dell'unità di classe C^∞ $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ su Y_1, tale che per ogni j il supporto di φ_j sia contenuto in un intorno coordinato $U_j \subset Y_1$. Scegliamo $y_j \in U_j$ e poniamo $\alpha_j = \varphi_j \beta$. Se l'integrale di α_j è non nullo, dalla definizione del grado risulta

$$\deg(f, X, Y_1) = \deg(f, X, y_j) = \frac{\int_X f^*(\alpha_j)}{\int_Y \alpha_j},$$

ossia

$$\deg(f, X, Y_1) \cdot \int_Y \alpha_j = \int_X f^*(\alpha_j). \tag{4}$$

Per il Lemma 1.1, questa l'ultima formula vale anche se l'integrale di α_j è nullo: infatti in questo caso $\alpha_j = d\eta$ con $\operatorname{supp} \eta \subset U_j$, da cui $\operatorname{supp} f^*(\eta) \subset X$ e

$$\int_X f^*(\alpha_j) = \int_X f^*(d\eta) = \int_X df^*(\eta) = 0.$$

Dato che $\beta = \sum_{j \in J} \alpha_j$, sommando su j in (4) si ottiene il risultato voluto.

Formula di Leray per il grado di una composizione. Siano $X \subset X_0$, Y e Z varietà orientate di dimensione n, con $\overline{X}$ compatto. Siano $f : \overline{X} \to Y$ e $g : Y \to Z$ mappe continue. Siano Y_j, $j \in J$, le componenti connesse di $Y \setminus f(\partial X)$ aventi chiusura compatta in Y. Allora per ogni $z \in Z \setminus g(f(\partial X))$,

$$\deg(g \circ f, X, z) = \sum_{j \in J} \deg(f, X, Y_j) \cdot \deg(g, Y_j, z),$$

e la somma di destra contiene un numero finito di termini non nulli.

Nel caso in cui X, Y, Z siano varietà compatte senza bordo, si trova che il grado di $g \circ f$ è il prodotto dei gradi di f e di g. Per dimostrare la formula di Leray, possiamo assumere che f e g

siano di classe C^1 e che z sia un valore regolare sia per g che per $g \circ f$. Dalla formula del grado rispetto ad un valore regolare troviamo allora

$$\deg(g \circ f, X, z) = \sum_{\substack{x \in X \\ g \circ f(x) = z}} \text{sign det}\, D(g \circ f)(x) = \sum_{\substack{x \in X \\ g(f(x)) = z}} \text{sign det}\, Dg(f(x)) \cdot \text{sign det}\, Df(x)$$

$$= \sum_{\substack{y \in Y \\ g(y) = z}} \text{sign det}\, Dg(y) \cdot \sum_{\substack{x \in X \\ f(x) = y}} \text{sign det}\, Df(x) = \sum_{\substack{y \in Y \\ g(y) = z}} \text{sign det}\, Dg(y) \cdot \deg(f, X, y).$$

Se y appartiene ad una componente di $Y \setminus f(\partial X)$ la cui chiusura non è compatta, $\deg(f, X, y) = 0$: infatti in tale componente ci saranno punti che non sono valori della mappa f. Allora nell'ultima somma sopra compaiono solamente gli y apparteneneti alle componenti Y_j, e quindi

$$\deg(g \circ f, X, z) = \sum_{j \in J} \deg(f, X, Y_j) \cdot \sum_{\substack{y \in Y_j \\ g(y) = z}} \text{sign det}\, Dg(y) = \sum_{j \in J} \deg(f, X, Y_j) \cdot \deg(g, Y_j, z),$$

e la tesi è dimostrata.

1.6 Osservazione. *L'approccio che abbiamo seguito nella costruzione del grado, come molte delle applicazioni che presenteremo, è tratto dalle dispense di Nirenberg [Nir70]. Si veda anche [Sch69] e [Dei85] per lievi varianti. Un approccio leggermente più topologico è quello scelto da Milnor in [Mil65]. Per una costruzione puramente topologica, tramite l'omologia singolare, si veda [Dol80], sezione VIII.§4.*

1.4 Applicazioni

Esistenza di zeri. La maniera più diretta di applicare il grado topologico è la seguente: se $\deg(f, X, y) \neq 0$, allora l'equazione $f(x) = y$ ha almeno una soluzione in X. Vediamo un esempio.

1.7 Proposizione. *Sia $f : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ tale che per ogni $x \in \partial B^n$ il vettore $f(x)$ non punti mai in direzione opposta a x, cioè*

$$f(x) + \lambda x \neq 0, \quad \forall \lambda \geq 0, \ \forall x \in \partial B^n. \tag{5}$$

Allora l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione in B^n.

Dimostrazione. Consideriamo l'omotopia

$$h(t, x) = t f(x) + (1 - t)x, \quad (t, x) \in [0, 1] \times \overline{B^n},$$

che congiunge f all'identità. Per (5),

$$h(t, x) \neq 0, \quad \forall (t, x) \in [0, 1] \times \partial B^n.$$

Dall'invarianza del grado per omotopie segue allora

$$\deg(f, B_n, 0) = \deg(\text{id}, B^n, 0) = 1,$$

e quindi esiste $\overline{x} \in B^n$ tale che $f(\overline{x}) = 0$. □

Esistenza di punti fissi. Il risultato sopra ha come semplice conseguenza il ben noto teorema di Brower, che enunciamo nella forma:

1.8 Corollario. (Teorema di Brower) *Sia $f : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ una mappa continua tale che $f(\partial B^n) \subset \overline{B^n}$. Allora f ha almeno un punto fisso in $\overline{B^n}$.*

Dimostrazione. Sia $g(x) = x - f(x)$. Se esistono $\lambda \geq 0$ e $x \in \partial B^n$ tali che $g(x) + \lambda x = 0$, allora $f(x) = (1+\lambda)x$, e la condizione $f(\partial B^n) \subset \overline{B^n}$ implica che $\lambda = 0$ e x è un punto fisso di f. Altrimenti, g verifica le ipotesi della Proposizione 1.7, e dunque f ha un punto fisso in B^n. $\square$

È utile sapere che il teorema di Brower vale anche nella forma:

1.9 COROLLARIO. *Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ un compatto convesso e sia $f : C \to C$ continua. Allora f ha almeno un punto fisso.*

Dimostrazione. Per il teorema di Tiesze la mappa f si estende ad una mappa continua g da $\mathbb{R}^n$ a valori nel convessificato chiuso dell'immagine di f. Dato che C è un chiuso convesso, $g(\mathbb{R}^n) \subset C$. Se B è una palla che contiene C, il Corollario 1.8 implica l'esistenza di un punto fisso $\overline{x} \in \overline{B}$ di g. Quindi $x = g(\overline{x}) \in C$, e $x \in C$ è punto fisso di f. $\square$

Soluzioni periodiche. Sia $X \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale, che supponiamo T-periodico nella variabile temporale:

$$X(t+T, x) = X(t, x), \quad \forall t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Supponiamo che esista $r > 0$ tale che

$$X(t,x) \cdot x < 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},\ |x| = r. \tag{6}$$

Allora l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt} u(t) = X(t, u(t)) \tag{7}$$

ha almeno una soluzione T-periodica.

Dato che X è di classe C^1, il problema di Cauchy associato a (7) ha unicità ed esistenza locale. Affermiamo che se $|x| \geq r$ allora la soluzione u di (7) tale che $u(0) = x$ ha tempo massimale di esistenza $+\infty$. Infatti da (6) segue che

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2u(t) \cdot X(t, u(t)) < 0, \quad \text{se } |u(t)| = r.$$

Questo implica che le soluzioni che partono in $\overline{B_r}$ non possono lasciare $\overline{B_r}$ per tempi positivi, e dato che X è limitato su $\overline{B_r}$ queste soluzioni esistono per tutti i tempi positivi. Queste considerazioni implicano che è ben definita una mappa, continua per la dipendenza continua dai dati, $f : \overline{B_r} \to \overline{B_r}$ che a x associa $u(T)$, la soluzione di (7) con $u(0) = x$ al tempo T. Per il teorema di Brower f ha un punto fisso $\overline{x}$. Dato che X è T-periodico in t, la soluzione che parte da $\overline{x}$ è T-periodica. $\square$

Autovalori ed autovettori positivi. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice reale $n \times n$ tale che $a_{ij} \geq 0$ per ogni i, j. Allora esistono $x \in \mathbb{R}^n$, $x_j \geq 0$ per ogni j, e $\lambda \geq 0$, tali che $Ax = \lambda x$.

L'insieme

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n x_j = 1,\ x_j \geq 0 \right\}$$

è compatto e convesso. Possiamo supporre che $Ax = 0$ per ogni $x \in C$, altrimenti $\lambda = 0$ e $x \in C \cap \ker A$ sono soluzioni del problema. Allora la mappa

$$f : C \to C, \quad f(x) = \frac{Ax}{\sum_{j=1}^n (Ax)_j},$$

è ben definita e continua. Per il teorema di Brower ha un punto fisso $x \in C$, quindi $Ax = \lambda x$ con $\lambda = \sum_{j=1}^n (Ax)_j > 0$. $\square$

1.10 Esercizio. *Si consideri il rivestimento universale di* $S^1 = \partial B$, $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$,

$$\pi : \mathbb{R} \to S^1, \quad \pi(t) = e^{it}.$$

Determinare il grado di una mappa continua $f : S^1 \to S^1$ *in termini dei sui sollevamenti, cioè delle funzioni continue* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tali che* $\pi \circ g = f \circ \pi$.

1.11 Esercizio. *Sia* Ω *un aperto limitato di* $\mathbb{C}$ *e sia* $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ *olomorfa in* Ω *e tale che* $f(x) \neq 0$ *per* $x \in \partial\Omega$. *Si dimostri che* $\deg(f, \Omega, 0) \geq 0$. *Supponiamo ora che* Ω *sia semplicemente connesso, e sia* $\gamma : S^1 \to \Omega$ *una curva chiusa semplice tale che tutti gli zeri di* f *stiano nell'aperto limitato determinato da* γ. *Si dimostri che*

$$\deg(f, \Omega, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

1.12 Esercizio. *Sia* $\gamma : S^1 \to \mathbb{C}$ *una curva chiusa di classe* C^1. *Dato* $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma(z_0)$, *definiamo l'*indice di avvolgimento *di* γ *rispetto a* z_0 *come*

$$w(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

(i) Estendere questa definizione a curve solamente continue.

(ii) Sia $\hat{\gamma} : S^1 \to S^1$ *la mappa* $\hat{\gamma}(t) = (\gamma(t) - z_0)/|\gamma(t) - z_0|$. *Vedendo* S^1 *come il bordo della palla unitaria* B *di* $\mathbb{C}$, *sia* $f : \overline{B} \to \mathbb{C}$ *una qualunque estensione continua di* γ. *Dimostrare che*

$$w(\gamma, z_0) = \deg(\hat{\gamma}, S^1, S^1) = \deg(f, B, z_0).$$

1.13 Esercizio. *Sia* $f : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ *tale che per ogni* $x \in \partial B^n$ *il vettore* $f(x)$ *non punti mai nella stessa direzione di* x, *cioè*

$$f(x) - \lambda x \neq 0, \quad \forall \lambda \geq 0, \ \ \forall x \in \partial B^n.$$

Allora l'equazione $f(x) = 0$ *ha almeno una soluzione in* B^n.

1.14 Esercizio. *Sia* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una mappa continua tale che*

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{f(x) \cdot x}{|x|} = +\infty.$$

Si dimostri che f *è surgettiva.*

1.15 Esercizio. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un aperto limitato,* $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *mappe continue tali che* $0 < |g| < |f|$ *su* $\partial\Omega$. *Allora* $\deg(f + g, \Omega, 0) = \deg(f, \Omega, 0)$.

1.16 Esercizio. *Sia* $M \subset \mathbb{R}^3$ *una superficie compatta orientata senza bordo, ed indichiamo con* $K : M \to \mathbb{R}$ *la sua curvatura di Gauss. Sia* $u : M \to S^2$ *la mappa che ad* $x \in M$ *associa il vettore normale unitario* $u(x)$, *scelto in modo che se* v_1, v_2 *è una base orientata di* T_xM, *allora* $v_1, v_2, u(x)$ *è una base orientata di* $\mathbb{R}^3$. *Dimostrare che*

$$\deg(f, M, S^2) = \frac{1}{4\pi} \int_M K(x)\, dA,$$

dove A *è l'elemento di area su* M.

1.5 Il teorema di separazione di Jordan-Brower.

Il classico teorema di seprzione di Jordan afferma che una curva chiusa semplice divide il piano in esattamente due componenti connesse. In effetti, vale la seguente generalizzazione, dovuta a Brower:

1.17 Teorema. *Siano H, K due compatti di $\mathbb{R}^n$, tra loro omeomorfi. Allora $\mathbb{R}^n \setminus H$ e $\mathbb{R}^n \setminus K$ hanno lo stesso numero di componenti connesse.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che il complementare di un compatto in $\mathbb{R}^n$ ha esattamente una componente connessa illimitata. Quindi ci basterà considerare le componenti connesse limitate. Indichiamo con $\Xi(K)$ l'insieme delle componenti connesse limitate di $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Sia $\mathcal{K}_n$ la categoria i cui oggetti sono i compatti di $\mathbb{R}^n$ e i cui morfismi sono le mappe continue tra di loro. Definiremo un funtore controvariante Γ da $\mathcal{K}_n$ in $\mathcal{GA}$, la categoria dei gruppi abeliani.

Se K è un oggetto di $\mathcal{K}_n$, definiamo $\Gamma(K)$ come il gruppo libero generato dagli elementi di $\Xi(K)$. Se $f : H \to K$ è una mappa continua, definiamo

$$\Gamma(f) = f^* : \Gamma(K) \to \Gamma(H)$$

tramite

$$f^*(Y) = \sum_{X \in \Xi(H)} \deg(\tilde{f}, X, Y)\, X,$$

dove $Y \in \Xi(K)$ e $\tilde{f}$ è una estensione continua di f a tutto $\mathbb{R}^n$. Dato che

$$\tilde{f}(\partial X) \subset \tilde{f}(H) = f(H) \subset K,$$

il grado $\deg(\tilde{f}, X, Y)$ è ben definito e non dipende dalla scelta dell'estensione $\tilde{f}$. Inoltre fissata Y, $\deg(\tilde{f}, X, Y)$ è non nullo soltanto per un numero finito di componenti connesse X. Infatti, a meno di approssimazione possiamo assumere $\tilde{f}$ di classe C^1, e scegliendo un valore regolare $y \in Y$ si ha che $f^{-1}(\{y\})$ è finito, e dunque interseca un numero finito delle componenti connesse di $\mathbb{R}^n \setminus H$.

Dobbiamo dimostrare che Γ è un funtore controvariante. Consideriamo quindi una composizione di mappe continue tra compatti di $\mathbb{R}^n$

$$H \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} L.$$

Se $Z \in \Xi(L)$, per la formula di Leray sul grado di una composizione si ha

$$\begin{aligned} (g \circ f)^*(Z) &= \sum_{X \in \Xi(H)} \deg(\tilde{g} \circ \tilde{f}, X, Z)\, X \\ &= \sum_{X \in \Xi(H)} \sum_{Y \in \Xi(f(\partial X))} \deg(\tilde{f}, X, Y) \cdot \deg(\tilde{g}, Y, Z)\, X. \end{aligned} \tag{8}$$

Fissiamo $X \in \Xi(H)$, e sia $Y \in \Xi(f(\partial X))$. Siano $Y_1, Y_2, \dots$ le componenti connesse limitate di $\mathbb{R}^n \setminus K$ che hanno intersezione non vuota con Y. Dato che $\mathbb{R}^n \setminus K \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial X)$, ogni Y_j è contenuta in Y, e $Y \setminus \bigcup_j Y_j \subset K$, da cui $f(\overline{Y} \setminus \bigcup_j Y_j) \cap Z = \emptyset$. Ma allora, usando l'addittività numerabile del grado,

$$\deg(\tilde{f}, X, Y) = \deg(\tilde{f}, X, Y_j) \quad \text{e} \quad \deg(\tilde{g}, Y, Z) = \sum_j \deg(\tilde{g}, Y_j, Z),$$

quindi la sommatoria interna in (8) può essere sostituita da una somma sulle componenti connesse limitate di $\mathbb{R}^n \setminus K$, ottenendo

$$(g \circ f)^*(Z) = \sum_{X \in \Xi(H)} \sum_{Y \in \Xi(K)} \deg(\tilde{f}, X, Y) \cdot \deg(\tilde{g}, Y, Z)\, X = f^*(g^*(Z)).$$

Insieme al fatto che $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$, questo implica che Γ è un funtore controvariante. Dalla funtorialità segue che se $f : H \to K$ è un omeomorfismo, allora $f^* : \Gamma(K) \to \Gamma(H)$ è un isomorfismo di gruppi. Dato che due gruppi abeliani liberi sono isomorfi se e solamente se hanno lo stesso numero di generatori, la tesi segue. $\square$

1.18 OSSERVAZIONE. *Il teorema di separazione di Jordan-Brower è in effetti un caso particolare della più generale dualità di Alexander: se $K \subset \mathbb{R}^n$ è un compatto,*

$$\tilde{H}_{j-1}(\mathbb{R}^n \setminus K) \cong \check{H}^{n-j}(K),$$

dove $\tilde{H}_*$ indica l'omologia singolare ridotta e $\check{H}^*$ la coomologia di Čech. Si veda [Dol80], VIII.§8.15.

1.6 Il teorema di Borsuk

1.19 TEOREMA. (Teorema di Borsuk) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato simmetrico rispetto a 0 e contenente lo 0. Sia $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ una mappa continua, dispari (cioè $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$), e tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$. Allora $\deg(f, \Omega, 0)$ è un numero dispari.*

Dimostrazione. Dato che f è dispari, $f(0) = 0$, e se x è soluzione di $f(x) = 0$ anche $-x$ lo è. Se f è di classe $C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e 0 è un valore regolare di f, si ha

$$\deg(f, \Omega, 0) = \operatorname{sign} \det Df(0) + \sum_{\substack{x \in \Omega \setminus \{0\} \\ f(x)=0}} \operatorname{sign} \det Df(x).$$

L'ultima sommatoria contiene un numero pari di termini, ciascuno dei quali vale 1 o -1. Quindi il numero sopra è dispari[1].

Grazie alla continuità del grado nella topologia di $C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, il teorema sarà dimostrato se riusciremo a provare che è possibile approssimare f uniformemente con funzioni C^1, dispari, ed aventi 0 come valore regolare.

Non ci sono problemi ad approssimare f con funzioni C^1 dispari. Infatti se g_1 è un'approssimante C^1 di f, la mappa

$$g_2(x) := \frac{1}{2} (g_1(x) - g_1(-x))$$

è ancora un'approssimante C^1 di f ed è dispari. È anche facile rendere 0 un punto regolare: basta perturbare ulteriormente g_2,

$$g_3(x) := g_2(x) - ax,$$

per $|a|$ piccolo, tale che a non sia un autovalore di $Df_2(0)$.

Supponiamo dunque f di classe $C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e 0 punto regolare. Il nostro scopo sarà mostrare che f è approssimabile uniformemente da mappe che in più hanno 0 come valore regolare. Poniamo

$$\Omega_k = \left\{ x \in \Omega \mid x^i \neq 0 \text{ per qualche } i \leq k \right\},$$

per ogni $k = 1, \ldots, n$. Quindi $\Omega_1 \subset \cdots \subset \Omega_n = \Omega \setminus \{0\}$. Realizzeremo l'approssimazione voluta in n passi, costruendo $f_k \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ dispari, con $\|f_k - f\|_\infty < k\epsilon$, e tale che $f_k|_{\Omega_k}$ abbia 0 come valore regolare.

Ponendo $f_0 = f$, possiamo assumere di aver costruito la funzione f_k, per un certo $0 \leq k \leq n-1$, e dobbiamo mostrare come si costruisce f_{k+1}. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞, dispari, tale che $\varphi'(0) = 0$ e $\varphi(s) \neq 0$ per ogni $s \neq 0$ (ad esempio, $\varphi(s) = s^3$). Consideriamo la mappa

$$g : \left\{ x \in \Omega \mid x^{k+1} \neq 0 \right\} \to \mathbb{R}^n, \quad g(x) = \frac{f_k(x)}{\varphi(x^{k+1})}.$$

[1] Si noti anche che da f dispari segue Df pari, da cui $\operatorname{sign} \det Df(x) = \operatorname{sign} \det Df(-x)$, quindi il grado di f può assumere qualunque valore dispari.

Dato $y \in \mathbb{R}^n$ valore regolare di g, poniamo

$$f_{k+1}(x) := f_k(x) - \varphi(x^{k+1})y.$$

Scegliendo il valore regolare y di norma piccola, possiamo assumere che $\|f_{k+1} - f_k\|_\infty < \epsilon$.

Affermiamo che 0 è un valore regolare per la restrizione di f_{k+1} all'aperto

$$\left\{x \in \Omega \mid x^{k+1} \neq 0\right\}.$$

Infatti, se x è un punto di tale aperto tale che $f_{k+1}(x) = 0$, risulta $g(x) = y$, quindi $Dg(x)$ è invertibile. D'altra parte

$$\begin{aligned} Dg(x) = \frac{1}{\varphi(x^{k+1})} Df_k(x) + f_k(x) D(1/\varphi(x^{k+1})) &= \frac{1}{\varphi(x^{k+1})} \left(Df_k(x) - \frac{\varphi'(x^{k+1})}{\varphi(x^{k+1})} f_k(x) dx^{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{\varphi(x^{k+1})} \left(Df_k(x) - \varphi'(x^{k+1}) y dx^{k+1} \right) = \frac{1}{\varphi(x^{k+1})} Df_{k+1}(x), \end{aligned}$$

quindi anche $Df_{k+1}(x)$ è invertibile, come volvamo dimostrare.

Per verificare che 0 è un valore regolare per la restrizione di f_{k+1} ad Ω_{k+1}, ci restano da esaminare le soluzioni $x \in \Omega_{k+1}$ di $f_{k+1}(x) = 0$ tali che $x^{k+1} = 0$. Se x è un punto siffatto, necessariamente x appartiene a Ω_k e $f_k(x) = f_{k+1}(x) = 0$. Quindi per le proprietà di f_k, $Df_k(x)$ è invertibile. D'altra parte

$$Df_{k+1}(x) = Df_k(x) - \varphi'(x^{k+1}) y dx^{k+1} = Df_k(x) - \varphi'(0) y dx^{k+1} = Df_k(x),$$

dunque $Df_{k+1}(x)$ è invertibile, e f_{k+1} ha le proprietà richieste. $\square$

Invarianza del dominio. Il teorema di Borsuk può essere usato per dimostrare il classico teorema sull'invarianza del dominio:

1.20 Teorema. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una mappa continua e localmente iniettiva. Allora la mappa f è aperta.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che per ogni $x_0 \in \Omega$, $f(x_0)$ è interno a $f(\Omega)$. A meno di comporre a destra e a sinistra con traslazioni, possiamo suppporre che $x_0 = f(x_0) = 0$.

Sia $r > 0$ tale che $f|_{\overline{B_r(0)}}$ è iniettiva. Se dimostriamo che

$$\deg(f, B_r(0), 0) \neq 0,$$

abbiamo concluso. Infatti, in questo caso

$$\deg(f, B_r(0), y) \neq 0,$$

per ogni $|y|$ piccolo - diciamo $|y| < \delta$ - il che implica che $B_\delta(0) \subset f(B_r(0))$.

Definiamo l'omotopia

$$h(t,x) = f\left(\frac{x}{1+t}\right) - f\left(-\frac{tx}{1+t}\right), \quad t \in [0,1],\ x \in \overline{B_r}(0).$$

Risulta $h(0,\cdot) = f$, $h(1,\cdot)$ mappa dispari. Se esistesse $(t,x) \in [0,1] \times \partial B_r(0)$ tale che $h(t,x) = 0$, per l'iniettività di f su $\overline{B_r}(0)$ si avrebbe

$$\frac{x}{1+t} = -\frac{tx}{1+t},$$

ossia $x = 0$, assurdo. Quindi possiamo applicare l'invarianza del grado per omotopie, ottenendo

$$\deg(f, B_r(0), 0) = \deg(h(1,\cdot), B_r(0), 0),$$

e per il Teorema di Borsuk 1.19 questo grado è non zero. $\square$

1.21 Esercizio. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato simmetrico rispetto a 0 e non contenente lo 0. Sia $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua, dispari e tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$. Dimostrare che* $\deg(f, \Omega, 0)$ *è un numero pari.*

1.22 Esercizio. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, simmetrico rispetto a 0 e contenente lo 0.*

(i) Siano $k < n$ e $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^k$ una mappa continua dispari. Dimostrare che esiste $x \in \partial\Omega$ tale che $f(x) = 0$.

(ii) Siano $k < n$ e $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^k$ una mappa continua. Dimostrare che esiste $x \in \partial\Omega$ tale che $f(x) = f(-x)$.

(iii) Supponiamo che $\partial\Omega$ sia ricoperto da n chiusi $X_1, \dots, X_n$. Allora almeno uno di essi contiene due punti antipodali x e $-x$.

1.23 Esercizio. *Siano $A_1, \dots, A_n$ sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che esiste un iperpiano che divide ciascun A_j in due sottoinsiemi di ugual misura.*

1.24 Esercizio. *Supponiamo che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sia una mappa continua, iniettiva, e propria (cioè, $f^{-1}(K)$ è compatto per ogni K compatto). Dimostrare che f è un omeomorfismo (surgettivo).*

Sia $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ un polinomio di grado k, e consideriamo l'operatore differenziale di ordine k con coefficienti costanti
$$P = p\left(\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}\right).$$
Ricordiamo che l'operatore P si dice *ellittico* se, indicando con p_k la parte omogenea di grado k del polinomio p, si ha $p(x^1, \dots, x^n) \neq 0$ per ogni $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1.25 Esercizio. *Dimostrare che se $n \geq 3$, ogni operatore differenziale con coefficienti costanti ellittico ha ordine pari.*

2 Il grado topologico in dimensione infinita

2.1 Mappe compatte

Il grado topologico e le sue applicazioni - quali ad esempio il teorema di punto fisso di Brower - non si estendono alla classe di tutte le mappe continue su spazi di Banach infinito-dimensionali. Ad esempio, se B indica la palla unitaria dello spazio di Hilbert ℓ_2 munito della norma $|x|_2 = \left(\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$, la mappa continua
$$f : \overline{B} \to \overline{B}, \quad (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (\sqrt{1 - |x|_2}, x_0, x_1, \dots),$$
manda $\overline{B}$ in sé, ma non possiede alcun punto fisso: infatti $f(\overline{B}) \subset \partial B$, ma la restrizione di f a ∂B è lo shift iniettivo.

È anche possibile dimostrare che se X è uno spazio vettoriale normato di dimensione infinita e B è la sua palla unitaria, ∂B è sempre un retratto di $\overline{B}$, cioè esiste una mappa continua $r : \overline{B} \to \partial B$ la cui restrizione a ∂B è l'identità (si veda [Dei85], Remark 8.7). Allora la mappa continua $f : \overline{B} \to \overline{B}$, $f(x) = -r(x)$, non ha punti fissi. Ciò mostra che il teorema di Brower non vale mai in spazi vettoriali normati di dimensione infinita.

L'esistenza di una retrazione $r : \overline{B} \to \partial B$ mostra anche che su spazi vettoriali normati di dimensione infinita non può esistere una teoria del grado che goda delle buone proprietà viste nel caso finito dimensionale. Si consideri infatti l'omotopia
$$h : [0, 1] \times \overline{B} \to \overline{B}, \quad h(t, x) = \lambda r(x) + (1 - \lambda)x.$$

Se $x \in \partial B$, $h(\lambda, x) = x$, quindi $h([0,1] \times \partial B)$ non contiene 0. D'altra parte, $h(0, \cdot) = \mathrm{id}$, il cui grado rispetto allo 0 dovrebbe valere 1, mentre $h(1, \cdot) = r$, il cui grado rispetto allo 0 dovrebbe valere 0, dato che l'equazione $r(x) = 0$ non ha soluzione in $\overline{B}$.

Per poter generalizzare il teorema di punto fisso di Brower e la teoria del grado occorrerà restringersi ad opportune sottoclassi dello spazio di tutte le mappe continue.

2.1 DEFINIZIONE. *Siano X uno spazio metrico, Y uno spazio di Banach. Una mappa continua $K : X \to Y$ si dice* compatta *se manda sottoinsiemi limitati in sottoinsiemi pre-compatti.*

Nel caso di operatori lineari tra spazi di Banach, questa definizione coincide con l'usuale nozione di compattezza. Vediamo le principali proprietà delle mappe compatte.

Ogni mappa $R : X \to Y$ continua, limitata, e di rango finito (cioè tale che $R(X) \subset Y_0$, con $Y_0 \subset Y$ sottospazio vettoriale di dimensione finita) è compatta. Infatti i limitati di Y_0 sono pre-compatti.

Limite uniforme di mappe compatte è compatto. Infatti se la successione di mappe $K_n : X \to Y$ converge uniformemente ad una mappa $K : X \to Y$ e $A \subset X$,

$$K(A) \subset K_n(A) + \overline{B}_{\|K_n - K\|_\infty}(0),$$

il che mostra che se $K_n(A)$ è pre-compatto per ogni n, l'insieme $K(A)$ è totalmente limitato, e dunque pre-compatto.

Supponiamo che X sia limitato. Allora $K \in C^0(X, Y)$ è compatta se e solamente se K è limite unforme di mappe continue e limitate di rango finito. Queste mappe si possono prendere a valori in $\operatorname{conv} K(A)$. Per quanto visto sopra, se K è limite uniforme di mappe continue e limitate di rango finito allora K è compatta. Se K è compatta e $\epsilon > 0$, dalla compattezza di $\overline{K(X)}$ segue che esistono $y_1, \dots, y_n \in K(X)$ tali che

$$\overline{K(X)} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_\epsilon(y_j).$$

Sia $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ una partizione dell'unità su $\overline{K(X)}$ subordinata al ricoprimento $\{B_\epsilon(y_j)\}_{j=1}^n$: le φ_j sono funzioni continue a valori in $[0,1]$ tali che $\operatorname{supp} \varphi_j \subset B_\epsilon(y_j)$ e $\sum_{j=1}^n \varphi_j = 1$ su $\overline{K(X)}$. La mappa

$$R(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(K(x)) y_j,$$

è continua, limitata, ed ha rango finito, prendendo valori nel sottospazio vettoriale generato dai vettori $y_1, \dots, y_n$. Inoltre se $x \in X$,

$$\|K(x) - R(x)\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(K(x))(K(x) - y_j) \right\| < \epsilon,$$

dato che nella somma compare una combinazione convessa di vettori di norma minore di ϵ. La mappa R è l'approssimante voluta. Si noti che R prende valori in $\operatorname{conv} K(X)$.

2.2 OSSERVAZIONE. *In generale, un operatore lineare compatto tra spazi di Banach non è approssimabile in norma con operatori lineari di rango finito (questo è vero ad esempio se lo spazio di arrivo è un Hilbert). La proprietà appena dimostrata mostra che è comunque possibile approssimarlo uniformemente sui limitati con operatori* nonlineari *di rango finito.*

Sia $\Omega \subset X$ un aperto di uno spazio di Banach, e sia $K : \Omega \to Y$ una mappa compatta. Se K è differenziabile in $x_0 \in \Omega$ allora l'operatore $DK(x_0) \in L(X, Y)$ è compatto. Infatti

$$DK(x_0)\xi = \lim_{h \to 0} \frac{K(x_0 + h\xi) - K(x_0)}{h},$$

ed il limite è uniforme per $\|\xi\| \leq 1$. Quindi la restrizione di $DK(x_0)$ alla palla unitaria è limite uniforme di mappe (nonlineari) compatte, ed è dunque compatta.

Sia A un sottoinsieme chiuso e limitato di uno spazio metrico X, e sia $K : A \to Y$ una mappa compatta. Allora esiste un'estensione continua $\tilde{K} : X \to Y$ di K che risulta ancora compatta. Ricordiamo infatti il seguente teorema di Dugundji:

2.3 TEOREMA. ([Dug78], capitolo IX.6) *Sia X uno spazio metrico, $A \subset X$ un chiuso, e Y uno spazio vettoriale normato. Ogni mappa continua $f : A \to Y$ ammette un'estensione continua $\tilde{f} : X \to Y$ a valori in* $\operatorname{conv} f(A)$.

Inoltre è facile dimostrare che in uno spazio vettoriale normato il convessificato di un insieme totalmente limitato è totalmente limitato. Metendo assieme questi fatti si ottiene il risultato di estensione voluto.

Sia A un sottoinsieme chiuso limitato di uno spazio di Banach X, e sia $K : A \to X$ una mappa compatta. Allora la mappa $F = I + K$ è propria e chiusa. Infatti, se la successione $(F(x_n)) = (x_n + K(x_n))$ è compatta, dalla compattezza di $K(x_n)$ segue la compattezza di (x_n).

2.2 Il teorema di punto fisso di Schauder

Possiamo ora generalizzare il teorema di punto fisso di Brower agli spazi di Banach di dimensione infinita:

2.4 TEOREMA. (Teorema di punto fisso di Schauder) *Siano X uno spazio di Banach e sia $C \subset X$ un sottoinsieme convesso, chiuso, e limitato. Se $K : C \to C$ è una mappa compatta, allora K possiede almeno un punto fisso.*

Dimostrazione. Sia $K_n : C \to X$ una successione di mappe continue tali che $K_n(C) \subset X_n$ con X_n sottospazio vettoriale di dimensione finita di X, e $K_n \to K$ uniformemente. Possiamo anche assumere che $K_n(C) \subset \operatorname{conv} K(C) \subset \operatorname{conv} C = C$. Quindi K_n manda il convesso $C \cap X_n$ in sé, e dato che X_n ha dimensione finita per il teorema di Brower la mappa K_n ha un punto fisso $x_n \in C \cap X_n$. Dato che K è compatta, a meno di sottosuccessioni $K(x_n)$ converge a $x \in C$. Dato che $K_n \to K$ uniformemente, anche $x_n = K_n(x_n)$ converge a x, da cui $K(x) = x$. $\square$

Come prima applicazione del teorema di Schauder, dimostriamo il celebre risultato di Peano sull'esistenza di soluzioni dei problemi di Cauchy.

2.5 TEOREMA. (Teorema di Peano) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, e sia $f : [t_0, t_1) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ una mappa continua. Per ogni $y_0 \in \Omega$ esiste $\tau > 0$ ed una curva $u \in C^1([t_0, t_0 + \tau), \Omega)$ che risolve il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Dato che stiamo studiando un problema locale, ci interessa solamente il germe di f in (t_0, y_0). Possiamo quindi modificare f fuori da un intorno di (t_0, y_0), e dedurre il teorema di Peano dal seguente risultato di esistenza globale:

2.6 TEOREMA. *Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una mappa continua tale che*

$$|f(t, x)| \leq c(1 + |x|), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Allora per ogni $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ esiste $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre $t_0 = 0$. Fissato $T > 0$, il problema di Cauchy su $[-T, T]$ è equivalente a trovare un punto fisso della mappa

$$F : C^0([-T, T]) \to C^0([-T, T]), \quad F(u)(t) = y_0 + \int_0^t f(s, u(s))\, ds.$$

Dalla stima di crescita per f segue che se $\|y\|_\infty \le R$ allora

$$\|F(u)\|_\infty \le |y_0| + cT(1 + \|u\|_\infty) \le |y_0| + cT(1 + R).$$

Se scegliamo $T < 1/c$ e $R := (|y_0| + cT)/(1 - cT)$, deduciamo che F manda $\overline{B}_R$, la palla chiusa di raggio R di $C^0([-T, T])$, in sé.

Se $u \in \overline{B}_R$,

$$|F(u)(t) - F(u)(t')| = \left| \int_{t'}^t f(s, u(s))\, ds \right| \le |t - t'|(1 + cR),$$

quindi l'insieme $F(\overline{B}_R)$ è equi-Lipschitz. Essendo anche equilimitato (da R), per il teorema di Ascoli-Arzelà l'insieme $F(\overline{B}_R)$ è pre-compatto in $C^0([-T, T])$. Quindi la mappa F è compatta, e per il teorema di Schauder F ha un punto fisso in $\overline{B}_R$.

Pertanto esiste soluzione del problema di Cauchy in $[-T, T]$. Dato che la costante T non dipende dalla condizione iniziale y_0, è possibile iterare il procedimento ed ottenere una soluzione globale. $\square$

2.3 Il grado di Leray-Schauder

Estenderemo la teoria del grado alla classe di mappe su aperti di spazi di Banach che siano perturbazioni compatte dell'identità. Premettiamo il seguente risultato di riduzione per il grado finito-dimensionale:

2.7 Proposizione. *Siano $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \oplus \mathbb{R}^{n_2}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ una mappa della forma*

$$f(x) = x + g(x),$$

con $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{n_1}$. Sia $y \in \mathbb{R}^{n_1} \setminus f(\overline{\Omega})$. Allora

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f|_{\Omega \cap \mathbb{R}^{n_1}}, \Omega \cap \mathbb{R}^{n_1}, y).$$

Dimostrazione. Possiamo assumere che f sia di classe C^1 e che $y = 0$. Siano $a_i \in C^\infty(\mathbb{R}^{n_i})$, $i = 1, 2$, funzioni con integrale 1 e supporto contenuto in un piccolo intorno di 0. Per definizione,

$$\deg(f, \Omega, 0) = \int_{\mathbb{R}^n} a_1(x_1 + g(x_1, x_2)) a_2(x_2) |\det Df(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2.$$

Dalla forma di f segue che

$$\det Df(x_1, x_2) = \det(I + D_1 g(x_1, x_2)).$$

Quindi,

$$\deg(f, \Omega, 0) = \int_{\mathbb{R}^n} a_1(x_1 + g(x_1, x_2)) a_2(x_2) |\det D_1 g(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2.$$

Facendo tendere la funzione a_2 verso la distribuzione δ concentrata in 0, si ottiene

$$\deg(f, \Omega, 0) = \int_{\mathbb{R}^{n_1}} a_1(x_1 + g(x_1, 0)) |\det(I + D_1 g(x_1, 0))|\, dx_1 = \deg(f|_{\Omega \cap \mathbb{R}^{n_1}}, \Omega \cap \mathbb{R}^{n_1}, 0),$$

come si voleva dimostrare. $\square$

Sia X uno spazio di Banach, sia $\Omega \subset X$ un aperto limitato, e sia $f : \overline{\Omega} \to X$ una mappa continua della forma

$$f(x) = x + K(x),$$

con $K : \overline{\Omega} \to X$ mappa compatta. Sotto la consueta ipotesi $y \notin f(\partial\Omega)$, vorremmo definire l'intero

$$\deg(f, \Omega, y),$$

generalizzando il grado topologico. Dato che f è una perturbazione compatta dell'identità, $f(\partial\Omega)$ è un chiuso. Quindi possiamo trovare $\epsilon > 0$ tale che $B_\epsilon(y) \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$. Sia $R : \overline{\Omega} \to X_0 \subset X$ una mappa continua a valori nel sottospazio di dimensione finita X_0 tale che $\|R - K\|_\infty < \epsilon/2$. Possiamo supporre che X_0 contenga il vettore y. La mappa

$$g(x) = x + R(x)$$

manda $\overline{\Omega} \cap X_0$ in X_0 e

$$g(\partial(\Omega \cap X_0)) \subset f(\partial(\Omega \cap X_0)) + B_{\epsilon/2}(0) \subset f(\partial\Omega) + B_{\epsilon/2}(0),$$

non contiene y, quindi possiamo definire il *grado di Leray-Schauder* di f su Ω rispetto a y come

$$\deg(f, \Omega, y) := \deg(g|_{\Omega \cap X_0}, \Omega \cap X_0, y).$$

Verifichiamo che questa definizione non dipende dalla scelta dell'approssimante di rango finito.

La Proposizione 2.7 implica che se rimpiazziamo X_0 con un sottospazio X_1 che lo contiene si ha

$$\deg(g|_{\Omega \cap X_0}, \Omega \cap X_0, y) = \deg(g|_{\Omega \cap X_1}, \Omega \cap X_1, y).$$

Se ora R' è un'altra approssimante a meno di $\epsilon/2$ di K a valori in X_0' e $g'(x) = x + R'(x)$, scegliendo $X_1 = X_0 + X_0'$ si ha

$$\deg(g|_{\Omega \cap X_0}, \Omega \cap X_0, y) = \deg(g|_{\Omega \cap X_1}, \Omega \cap X_1, y),$$
$$\deg(g'|_{\Omega \cap X_0'}, \Omega \cap X_0', y) = \deg(g'|_{\Omega \cap X_1}, \Omega \cap X_1, y).$$

Infine, posto

$$h(\lambda, x) = \lambda g(x) + (1 - \lambda) g'(x),$$

dato che le stime $\|g - f\|_\infty < \epsilon/2$ e $\|g' - f\|_\infty < \epsilon/2$ implicano

$$y \notin h([0,1] \times \partial(\Omega \cap X_1)),$$

per l'invarianza per omotopia si conclude

$$\deg(g'|_{\Omega \cap X_1}, \Omega \cap X_1, y) = \deg(g|_{\Omega \cap X_1}, \Omega \cap X_1, y),$$

come volevamo mostrare.

2.4 Proprietà del grado di Leray-Schauder

Elenchiamo le principali proprietà del grado di Leray-Schauder. Le dimostrazioni seguono per lo più in maniera immediata dalle corrispondenti proprietà del grado finito-dimensionale, oppure si dimostrano in modo analogo.

Esistenza di soluzioni. Se $\deg(f, \Omega, y) \neq 0$ allora l'equazione $f(x) = y$ ha almeno una soluzione $x \in \Omega$. Infatti se $f(\overline{\Omega})$ non contiene y, essendo questo insieme un chiuso possiamo trovare $\delta > 0$ tale che $B_\delta(y)$ sia disgiunto da $f(\overline{\Omega})$. Se scegliamo ora l'approssimante g nella definizione del grado in modo che $\|g - f\|_\infty < \delta$, si ha che $y \notin g(\overline{\Omega})$, da cui

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(g|_{\Omega \cap X_0}, \Omega \cap X_0, y) = 0.$$

Locale costanza in y. La funzione

$$y \mapsto \deg(f, \Omega, y)$$

è localmente costante in $X \setminus f(\partial\Omega)$. Pertanto, se Γ è una componente connessa di $X \setminus f(\partial\Omega)$, è ben definito l'intero

$$\deg(f, \Omega, \Gamma) := \deg(f, \Omega, y), \quad \forall y \in \Gamma.$$

Dato che una perturbazione compatta dell'identità manda limitati in limitati, $X \setminus f(\partial\Omega)$ ha esattamente una componente connessa illimitata Γ, e vale

$$\deg(f, \Omega, \Gamma) = 0.$$

Invarianza per omotopia. Se

$$h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$$

è una mappa continua della forma

$$h(t, x) = x + K(t, x),$$

con $K : [0,1] \times \overline{\Omega} \to X$ mappa compatta, allora dato $y \in X \setminus h([0,1] \times \partial\Omega)$ il grado di $h(t, \cdot)$ su Ω rispetto a y non dipende da t,

$$\deg(h(t, \cdot), \Omega, y) = \deg(h(0, \cdot), \Omega, y), \quad \forall t \in [0,1].$$

Addittività numerabile. Sia $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ una successione di aperti disgiunti contenuti in Ω, e supponiamo $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j)$. Allora $\deg(f, \Omega_j, y)$ è nullo eccetto al più per un numero finito di indici j, e

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \deg(f, \Omega_j, y).$$

Mappe prodotto. Siano X e Y spazi di Banach, $\Omega \subset X$ e $\Gamma \subset Y$ aperti limitati, e

$$f : \overline{\Omega} \to X, \quad g : \overline{\Gamma} \to Y,$$

perturbazioni compatte dell'identità tali che $z_1 \notin f(\partial\Omega)$ e $z_2 \notin g(\partial\Gamma)$. Si consideri la mappa:

$$f \times g : \overline{\Omega} \times \overline{\Gamma} \to X \times Y, \quad (x, y) \mapsto (f(x), g(y)).$$

Allora

$$\deg(f \times g, \Omega \times \Gamma, (z_1, z_2)) = \deg(f, \Omega, z_1) \cdot \deg(g, \Gamma, z_2).$$

Dipendenza dai valori al bordo. Se due perturbazioni compatte dell'identità $f, g : \overline{\Omega} \to X$ coincidono su $\partial\Omega$, allora

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, y).$$

Più in generale: se le restrizioni di f e g a $\partial\Omega$ sono omotope tramite un omotopia

$$h : [0,1] \times \partial\Omega \to X \setminus \{y\},$$

della forma $h(t, x) = x + K(t, x)$ con $K : [0,1] \times \partial\Omega \to X$ mappa compatta, allora

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(g, \Omega, y).$$

Formula di Leray per il grado di una composizione. Siano Ω e Γ aperti limitati di X. Siano $f : \overline{\Omega} \to \overline{\Gamma}$ e $g : \overline{\Gamma} \to X$ perturbazioni compatte dell'identità. Siano Γ_j, $j \in J$, le componenti connesse di $X \setminus f(\partial\Omega)$ aventi chiusura limitata in X. Allora per ogni $z \in X \setminus g(f(\partial\Omega))$,

$$\deg(g \circ f, \Omega, z) = \sum_{j \in J} \deg(f, \Omega, \Gamma_j) \cdot \deg(g, \Gamma_j, z),$$

e la somma di destra contiene un numero finito di termini non nulli.

Teorema di separazione di Jordan-Brower generalizzato. Siano F, G due chiusi limitati di uno spazio di Banach X, tra loro omeomorfi tramite un omeomorfismo $f : F \to G$ della forma $f(x) = x + K(x)$, con K mappa compatta. Allora $X \setminus F$ e $X \setminus G$ hanno lo stesso numero di componenti connesse. Si osservi infatti che in queste ipotesi anche f^{-1} risulta una perturbazione compatta dell'identità.

Teorema di Borsuk generalizzato. Sia $\Omega \subset X$ un aperto limitato simmetrico rispetto a 0 e contenente lo 0. Sia $f : \overline{\Omega} \to X$ una perturbazione compatta dell'identità, dispari, e tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$. Allora $\deg(f, \Omega, 0)$ è un numero dispari.

Teorema di invarianza del dominio generalizzato. Sia $\Omega \subset X$ un aperto e sia $f : \Omega \to X$ una perturbazione compatta dell'identità localmente iniettiva. Allora la mappa f è aperta.

2.5 Formula del grado per mappe di classe $\mathbf{C^1}$

Abbiamo visto che se la perturbazione compatta dell'identità f è differenziabile, allora $Df(x) = I + T(x)$, con $T(x)$ operatore compatto su X. Gli operatori lineari del tipo identità più compatto non posseggono un determinante. Mostreremo però che il *segno del determinante* risulta ben definito. Questo permetterà di estendere agli spazi di Banach l'usuale formula del grado nel caso di un valore regolare di una mappa di classe C^1.

Sia dunque $T \in L_c(X)$ un operatore compatto e sia $L = I - T$. Per l'alternativa di Fredholm, L è un isomorfismo se e solamente se il suo nucleo è (0). Se L non è un isomorfismo poniamo

$$\text{sign det}\, L := 0.$$

Se $L = I - T$ è un isomorfismo, 1 non appartiene allo spettro di T. Dato che lo spettro di un operatore compatto meno lo 0 consiste di autovalori di molteplicità algebrica finita che hanno al più lo 0 come punto di accumulazione, T possiede un insieme finito $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ di autovalori reali maggiori di 1, ciascuno dei quali ha molteplicità algebrica finita

$$m(\lambda_j) := \dim \bigcup_{i=1}^{\infty} \ker(\lambda_j I - T)^i < +\infty.$$

Definiamo allora

$$\text{sign det}\, L = \text{sign det}(I - T) = (-1)^m, \quad \text{dove } m = \sum_{j=1}^{k} m(\lambda_j). \tag{9}$$

La proposizione seguente giustifica questa definizione:

2.8 PROPOSIZIONE. *Valgono i seguenti fatti:*

(i) Se $X = \mathbb{R}^n$, il numero definito in (9) coincide con l'usuale segno del determinante di L.

(ii) Se $L = I - T$ con $T \in L_c(X)$ è un isomorfismo e $B \subset X$ è una palla centrata in 0, si ha

$$\deg(L, B, 0) = \text{sign det}\, L.$$

(iii) *La funzione* $L \mapsto \text{sign}\det L$ *è localmente costante su* $GL_c(X)$*, il sottogruppo di* $GL(X)$ *che consiste degli isomorfismi che sono perturbazioni compatte dell'identità.*

(iv) *Il sottogruppo* $GL_c(X)$ *ha esattamente due componenti connesse, su cui la funzione* sign det *assume valori opposti.*

Dimostrazione. (i) Sia $L = I - T$ un operatore lineare invertibile su $\mathbb{R}^n$. Dato che il determinante è il prodotto degli autovalori complessi contati con molteplicità algebrica, se λ è un autovalore reale di T di molteplicità algebrica $m(\lambda)$ risulta

$$\text{sign}\det(\lambda + \epsilon - T) = (-1)^{m(\lambda)}\text{sign}\det(\lambda - \epsilon - T),$$

per ogni $\epsilon > 0$ piccolo. Se λ è reale e molto grande, il determinante di $\lambda I - T$ è positivo. Facciamo decrescere λ fino ad arrivare ad 1. Il segno del determinante può cambiare solamente quando λ coincide con uno degli autovalori di T reali e maggiori di 1, ed in questo caso il segno cambia se e solamente se l'autovalore in questione ha molteplicità dispari. Questo dimostra (i).

Per dimostrare (ii), decomponiamo X in somma diretta di sottospazi chiusi T-invarianti $X = X_1 \oplus X_2$, dove X_1 è l'autospazio generalizzato corrispondente agli autovalori di T reali e maggiori di 1, e dove X_2 è l'autospazio generalizzato corrispondente alla rimanente parte dello spettro di T. Per la formula del grado per mappe prodotto si ha

$$\deg(L, B, 0) = \deg(L, (B \cap X_1) \times (B \cap X_2), 0) = \deg(L|_{X_1}, B \cap X_1, 0) \cdot \deg(L|_{X_2}, B \cap X_2, 0).$$

La restrizione di L a $X_2 \cap \overline{B}$ è omotopa all'identità tramite l'omotopia della forma identità più mappa compatta

$$(\lambda, x) \mapsto x - \lambda T x.$$

Questa omotopia è ammissibile poichè $x - \lambda T x = 0$ con $\lambda \in [0, 1]$ implica $x = 0$. Quindi

$$\deg(L|_{X_2}, B \cap X_2, 0) = 1.$$

D'altra parte X_1 ha dimensione finita, e per il punto (i),

$$\deg(L|_{X_1}, B \cap X_1, 0) = \text{sign}\det L|_{X_1} = \text{sign}\det L,$$

il che conclude la dimostrazione di (ii).

L'enunciato (iii) segue dal punto (ii), insieme alla proprietà di omotopia del grado di Leray-Schauder (ma si potrebbe anche darne una dimostrazione diretta usando i risultati sulla continuità degli autovalori).

Per dimostrare (iv), iniziamo con l'osservare che $\text{sign}\det I = 1$, e che se L è una *riflessione rispetto ad un iperpiano*, cioè se è un isomorfismo del tipo

$$Lx = x - 2\langle \eta, x\rangle y,$$

dove $y \in X$ e $\eta \in X^*$ sono tali che $\langle \eta, y\rangle = 1$, allora $\text{sign}\det L = -1$. Ricordiamo inoltre che le componenti connesse di $GL(n, \mathbb{R})$ sono il sottogruppo ed il suo laterale

$$GL^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A > 0\}, \quad GL^-(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A < 0\}.$$

Sia ora $L = I - T \in GL_c(X)$. Decomponendo X come nella dimostrazione di (ii), si trova che $L|_{X_2}$ può essere connesso all'identità su X_2 tramite una curva continua di operatori in $GL_c(X_2)$. Se $\text{sign}\det L = \text{sign}\det L|_{X_1} = 1$, dal fatto che $GL^+(n, \mathbb{R})$ è connesso, deduciamo che $L|_{X_1}$ può essere connesso all'identità su X_1 tramite una curva continua di operatori in $GL(X_1) = GL_c(X_1)$. Quindi se $\text{sign}\det L = 1$, L sta nella stessa componente connessa dell'identità di $GL_c(X)$.

Se $\text{sign}\det L = \text{sign}\det L|_{X_1} = -1$, dal fatto che anche $GL^-(n, \mathbb{R})$ è connesso, deduciamo che possiamo connettere $L|_{X_1}$ ad una riflessione rispetto ad un iperpiano di X_1 in $GL(X_1) = GL_c(X_1)$,

$$\tilde{L}x = x - 2\langle \eta, x\rangle y,$$

con $y \in X_1$ e $\eta \in X_1^*$, $\langle \eta, y \rangle = 1$. Estendendo η ad un elemento di X^* ponendolo uguale a 0 su X_2, troviamo che $\tilde{L}$ è la restrizione di una riflessione su X rispetto ad un iperpiano che contiene X_2. Quindi nella componente connessa di $GL_c(X)$ contenente L troviamo una riflessione rispetto ad un iperpiano. Per concludere ci basta verificare che due riflessioni rispetto ad iperpiani stanno sempre nella stessa componente connessa di $GL_c(X)$. Consideriamo prima due riflessioni rispetto allo stesso iperpiano,

$$L_0 x = x - 2\langle \eta, x \rangle y_0, \quad L_1 x = x - 2\langle \eta, x \rangle y_1,$$

con $\langle \eta, y_0 \rangle = \langle \eta, y_1 \rangle = 1$. Possiamo connetterle in $GL_c(X)$ tramite il cammino di riflessioni

$$L_t x = x - 2\langle \eta, x \rangle (t y_1 + (1-t) y_0).$$

Analogamente, due riflessioni aventi lo stesso autovettore y,

$$L_0 x = x - 2\langle \eta_0, x \rangle y, \quad L_1 x = x - 2\langle \eta_1, x \rangle y,$$

sono connesse in $GL_c(X)$ dal cammino

$$L_t x = x - 2\langle t\eta_1 + (1-t)\eta_0, x \rangle y.$$

Questo mostra che due riflessioni qualsiasi sono connesse in $GL_c(X)$ da un cammino di riflessioni. $\square$

Supponiamo che y sia un valore regolare di una mappa $f \in C^1(\Omega, X)$ che sia una perturbazione compatta dell'identità. Dato che $Df(x)$ è una perturbazione lineare compatta dell'identità, deduciamo che $Df(x)$ è un isomorfismo per ogni $x \in f^{-1}(\{y\})$. Quindi $f^{-1}(\{y\})$ è un sottoinsieme discreto di Ω. Dato che f è propria, questo insieme è pre-compatto in $\overline{\Omega}$. Se supponiamo $y \notin f(\partial\Omega)$, concludiamo che $f^{-1}(\{y\})$ è un insieme finito.

2.9 Proposizione. *Sia $f \in C^0(\overline{\Omega}, X) \cap C^1(\Omega, X)$ una perturbazione compatta dell'identità, e sia $y \in X \setminus f(\partial\Omega)$ un valore regolare di f. Allora*

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \operatorname{sign} \det Df(x).$$

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ tale che le palle $B_\epsilon(x)$ per $x \in f^{-1}(\{y\})$ siano contenute in Ω e risultino due a due disgiunte. Per la proprietà di addittività del grado, è sufficiente dimostrare che per ogni $x \in f^{-1}(\{y\})$ si ha

$$\deg(f, B_\epsilon(x), y) = \operatorname{sign} \det Df(x).$$

Possiamo assumere $x = y = 0$. Usando l'omotopia

$$h(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{t} f(tx) & \text{per } t \in (0, 1], \\ Df(0)x & \text{per } t = 0, \end{cases}$$

si trova che

$$\deg(f, B_\epsilon(0), 0) = \deg(Df(0), B_\epsilon(0), 0).$$

La conclusione segue dal punto (ii) della Proposizione 2.8. $\square$

Riferimenti bibliografici

[AR67] R. Abraham and J. Robbin, *Transversal mappings and flows*, W. A. Benjamin, Inc., 1967.

[Dei85] K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[Dol80] A. Dold, *Lectures on algebraic topology*, Springer, Berlin, 1980.

[Dug78] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon Inc., Boston, Mass., 1978, Reprinting of the 1966 original, Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics.

[Mil65] J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, VA, 1965.

[Nir70] L. Nirenberg, *Topics in nonlinear functional analysis*, Courant lecture notes, Amer. Math. Soc., New York, 1970.

[Sch69] J. T. Schwartz, *Nonlinear functional analysis*, Gordon and Breach, New York, 1969.