1 Alcune questioni di dinamica Hamiltoniana, formulate nel linguaggio della geometria simplettica

1.1 Le equazioni di Hamilton

Consideriamo $\mathbb{R}^{2n}$ munito delle coordinate

$$(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

Le *equazioni di Hamilton* sono il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{q}_i & = & \partial_{p_i} H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \\ \dot{p}_i & = & -\partial_{q_i} H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \end{array} \right. \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

dove la funzione reale $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ è detta *Hamiltoniana* e rappresenta l'energia totale del sistema.

Introducendo i vettori $q = (q_1, \ldots, q_n)$ e $p = (p_1, \ldots, p_n)$ e scrivendo il gradiente di H come

$$\nabla H = (\nabla_q H, \nabla_p H), \quad \text{dove} \quad \nabla_q H := \big(\partial_{q_1} H, \ldots, \partial_{q_n} H\big), \ \nabla_p H := \big(\partial_{p_1} H, \ldots, \partial_{p_n} H\big),$$

possiamo riscrivere (1) come

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{q} & = & \partial_p H(q, p), \\ \dot{p} & = & -\partial_q H(q, p). \end{array} \right. \tag{2}$$

Se J indica l'automorfsimo di $\mathbb{R}^{2n}$ rappresentato dalla matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

dove I è la matrice identità $n \times n$, possiamo riscrivere (2) nella forma compatta

$$\dot{x} = J \nabla H(x), \tag{3}$$

dove $x = (q, p)$. Il campo vettoriale $J\nabla H$ si dice *campo vettoriale Hamiltoniano* associato a H.

Osservazione 1.1. *Notiamo che $J^2 = -I$, dunque J è una struttura complessa su $\mathbb{R}^{2n}$: definisce infatti una struttura di spazio vettoriale complesso su $\mathbb{R}^{2n}$ ponendo $(a + ib) \cdot x := ax + bJx$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^{2n}$.*

L'Hamiltoniana H è un integrale primo delle equazioni di Hamilton: se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo e $x : I \to \mathbb{R}^{2n}$ è una soluzione di (3), allora

$$\frac{d}{dt} H(x(t)) = \nabla H(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \nabla H(x(t)) \cdot J \nabla H(x(t)) = 0,$$

dunque $H \circ x$ è costante. Qui $\cdot$ indica il prodotto scalare euclideo su $\mathbb{R}^{2n}$ e l'ultimo termine si annulla poiché J è antisimmetrica.

1.2 Strutture simplettiche

La seguente forma bilineare alternante (i.e. antisimmetrica)

$$\omega_0 := \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dq_j$$

si dice *forma simplettica standard di* $\mathbb{R}^{2n}$. Pensata come forma differenziale su $\mathbb{R}^{2n}$, ω_0 è ovviamente esatta, con primitiva

$$\lambda_0 := \sum_{j=1}^{n} p_j \, dq_j.$$

In particolare, ω_0 è chiusa (cosa del resto ovvia, essendo ω_0 una forma costante). Dalle uguaglianze

$$\omega_0\big[(q,p),(q',p')\big] = p\cdot q' - q\cdot p' = (p,-q)\cdot(q',p') = J(q,p)\cdot(q',p'),$$

segue che J è la matrice antisimmetrica che rappresenta ω_0 rispetto al prodotto scalare euclideo, ossia

$$\omega_0[u,v] = Ju\cdot v, \qquad \forall u,v\in\mathbb{R}^{2n}.$$

Dall'invertibilità di J segue che ω_0 è non degenere, ovvero

$$\omega_0[u,v]=0 \quad \forall v\in\mathbb{R}^{2n} \quad\Longrightarrow\quad u=0.$$

Osservazione 1.2. *Notiamo che ω_0^n, ossia n volte il prodotto esterno di ω_0 per sé stessa, vale*

$$\omega_0^n = \omega_0\wedge\cdots\wedge\omega_0 = n!\,dp_1\wedge dq_1\wedge\cdots\wedge dp_n\wedge dq_n,$$

che è un multiplo non nullo della forma di volume euclideo su $\mathbb{R}^{2n}$.

Dato che ω_0 è non degenere, l'identità

$$\omega_0\big[X_H(x),u\big] = -dH(x)[u], \qquad \forall u\in\mathbb{R}^{2n}, \tag{4}$$

definisce un campo vettoriale X_H su $\mathbb{R}^{2n}$. Usando l'operatore di contrazione $\imath$ (si veda l'Appendice 1.9), questa identità si può esprimere come

$$\imath_{X_H}\omega_0 = -dH.$$

Riscrivendo (4) in termini del prodotto scalare, troviamo

$$JX_H(x)\cdot u = -\nabla H(x)\cdot u, \qquad \forall u\in\mathbb{R}^{2n},$$

da cui $JX_H(x) = -\nabla H(x)$ e, moltiplicando per $-J$,

$$X_H(x) = J\nabla H(x).$$

Dunque X_H è il campo vettoriale Hamiltoniano associato a H. Queste considerazioni suggeriscono la seguente generalizzazione:

Definizione 1.3. *Una struttura simplettica su una varietà differenziabile M è una 2-forma differenziale ω chiusa e non degenere. La coppia (M,ω) si dice varietà simplettica.*

Oltre a $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$, esempi di varietà simplettiche sono: (i) il toro $\mathbb{T}^{2n}=\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ con la forma simplettica indotta da ω_0, (ii) tutte le superfici orientabili, con una fissata forma d'area, (iii) le varietà Kähleriane, in particolare le varietà di Stein (per chi conosche questi oggetti, in questo corso non serviranno), (iv) i fibrati cotangenti di varietà arbitrarie (con una struttura simplettica naturale, che forse più avanti introdurremo).

Definizione 1.4. *Se (M,ω) è una varietà simplettica e $H\in C^\infty(M)$, il campo vettoriale Hamiltoniano associato a H è il campo vettoriale tangente X_H definito dall'identità*

$$\imath_{X_H}\omega = -dH.$$

In questa generalità, il fatto che H sia un integrale primo dell'equazione di Hamilton

$$\dot{x} = X_H(x), \qquad \text{per } x: I\to M,$$

segue dalle uguaglianze

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) = dH(x(t))[\dot{x}(t)] = -\omega\big[X_H(x(t)),\dot{x}(t)\big] = -\omega\big[X_H(x(t)),X_H(x(t))\big] = 0,$$

dove si è usata l'antisimmetria di ω.

Le varietà simplettiche hanno necessariamente dimensione pari e, anzi, sono localmente indistinguibili da $(\mathbb{R}^{2n},\omega_0)$. Vale infatti il seguente:

Teorema 1.5 (Darboux). *Sia (M, ω) una varietà simplettica. Allora ogni punto di M possiede un intorno aperto U diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^{2n}$ tramite un diffeomorfismo $\varphi : U \to \mathbb{R}^{2n}$ tale che $\varphi^* \omega_0 = \omega$.*

La dimostrazione di questo teorema è simile a quella del Teorema di Moser 1.13 che vedremo più avanti in questo capitolo. Come conseguenza, le equazioni di Hamilton

$$\dot{x} = X_H(x), \qquad \text{per } x : I \to M,$$

definite da un Hamiltoniana $H \in C^\infty(M)$ si scrivono localmente nella forma (1) (o equivalentemente (2) o (3)), rispetto all'Hamiltoniana $H \circ \varphi^{-1}$ su $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^{2n}$.

1.3 La foliazione caratteristica di un'ipersuperficie

Sia $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ e sia c un valore regolare di H tale che $H^{-1}(c) \neq \emptyset$. Quindi $\Sigma := H^{-1}(c)$ è un ipersuperficie regolare in $\mathbb{R}^{2n}$. Dato che H è un integrale primo, Σ è invariante per il flusso del campo vettoriale X_H. Notiamo inoltre che, essendo c un valore regolare di H, dH e dunque anche X_H non si annulla in alcun punto di Σ. Quindi le linee integrali di X_H definiscono una *foliazione uni-dimensionale* di Σ, priva di singolarità. Le foglie di questa foliazione sono esattamente le orbite della restrizione a Σ del flusso di X_H, che pensiamo come oggetti geometrici, ignorando la loro parametrizzazione temporale. Vogliamo mostrare che questa foliazione dipende solamente dalla geometria di Σ e non dalla scelta dell'Hamiltoniana H di cui Σ è una superficie di livello.

Possiamo infatti definire questa foliazione, detta *foliazione caratteristica di* Σ, senza far ricorso a H, nel modo seguente. Consideriamo un punto $x \in \Sigma$ e la restrizione di ω_0 a $T_x\Sigma$. Essendo una forma bilineare antisimmetrica su uno spazio vettoriale di dimensione dispari, $\omega_0|_{T_x\Sigma}$ ha necessariamente un nucleo non zero, che, essendo ω_0 non degenere su tutto $\mathbb{R}^{2n}$, ha necessariamente dimensione uno. Dunque è ben definita la retta $\mathcal{L}_\Sigma(x) \subset T_x\Sigma$, caratterizzata dalla condizione

$$u \in \mathcal{L}_\Sigma(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega_0[u, v] = 0 \quad \forall v \in T_x\Sigma.$$

Facendo variare x in Σ, $\mathcal{L}_\Sigma(x)$ definisce un *sottofibrato in rette* del fibrato tangente di $T\Sigma$ (si usa anche il termine *distribuzione uni-dimensionale* su Σ), detto *fibrato in rette caratteristico di* Σ. La foliazione caratteristica di Σ è definita come l'insieme delle curve integrali di $\mathcal{L}_\Sigma$, ossia delle sottovarietà uni-dimensionali di Σ ovunque tangenti a $\mathcal{L}_\Sigma$.

Per verificare che le due definizioni coincidono, dobbiamo mostrare che $X_H(x)$ appartiene a $\mathcal{L}_\Sigma(x)$ per ogni $x \in \Sigma$. Ma questo segue dal fatto che il differenziale di H si annulla sul tangente di Σ, da cui

$$\omega_0\big[X_H(x), u\big] = -dH(x)[u] = 0, \qquad \forall u \in T_x\Sigma,$$

e dunque $\mathcal{L}_\Sigma(x) = \mathbb{R}X_H(x)$.

Osservazione 1.6. *Per le considerazioni viste sopra, se due Hamiltoniane H e K hanno una superficie di livello regolare Σ in comune, allora $X_H|_\Sigma$ e $X_K|_\Sigma$ sono paralleli. Questo segue anche dalle seguenti implicazioni:*

$$\ker dH(x) = \ker dK(x) \quad \Rightarrow \quad dH(x) \in \mathbb{R}\, dK(x) \quad \Rightarrow \quad X_H(x) \in \mathbb{R}\, X_K(x).$$

La proporzionalità tra X_H e X_K implica che le orbite di X_H coincidono con quelle di X_K a meno di riparametrizzazione temporale.

Osservazione 1.7. *Usando la struttura euclidea e la struttura complessa J dello spazio $\mathbb{R}^{2n}$, la foliazione caratteristica di una ipersuperficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^{2n}$ può essere definita equivalentemente ponendo*

$$\mathcal{L}_\Sigma(x) := J(T_x\Sigma)^\perp, \qquad \forall x \in \Sigma,$$

dove $(T_x\Sigma)^\perp$ indica la retta normale a Σ nel punto x. Infatti, rappresentando Σ come superficie di livello della funzione H (anche solo localmente), si ha, con la prima definizione di $\mathcal{L}_\Sigma$,

$$\mathcal{L}_\Sigma(x) = \mathbb{R}X_H(x) = \mathbb{R}J\nabla H(x),$$

e l'affermazione segue dal fatto che $\nabla H(x)$ è ortogonale a Σ in x. Il vantaggio della definizione in termini della sola ω_0 è che questa si estende immediatamente a ipersuperfici di varietà simplettiche arbitrarie.

1.4 La congettura di Weinstein

Un problema classico in dinamica Hamiltoniana è stabilire se le equazioni di Hamilton possiedano *soluzioni periodiche* per un assegnato valore dell'energia $H = c$. Nella riformulazione del paragrafo precedente, la domanda si traduce nell'esistenza o meno di curve chiuse nella foliazione caratteristica dell'ipersuperficie $\Sigma = H^{-1}(c)$ (nel caso c sia un valore regolare di H; si noti che c è un valore critico di H, allora i punti $x \in \Sigma$ dove $dH(x) = 0$ sono punti singolari per la foliazione caratteristica, ovvero orbite costanti del flusso Hamiltoniano, che sono soluzioni periodiche per ogni periodo).

Se $H^{-1}(c)$ non è compatto, è facile costruire esempi dove $H^{-1}(c)$ non possiede curve caratteristiche chiuse: si consideri ad esempio l'Hamiltoniana

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) := p_1.$$

Il flusso del corrispondente campo Hamiltoniano

$$X_H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \partial_{q_1},$$

è una famiglia ad un parametro di traslazioni

$$(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \mapsto (q_1 + t, q_2 \dots, q_n, p_1, \dots, p_n), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Anche nel caso compatto esistono controesempi, sebbene molto più raffinati: M. Herman (1999) e V. Ginzburg (1995, 1997, 1999) hanno costruito esempi di ipersuperfici compatte in $\mathbb{R}^{2n}$, $n > 2$, prive di caratterstiche chiuse; per $n = 2$ sono noti attualmente solamente controesempi con regolarità bassa (H di classe C^2), dovuti a V. Ginzburg e B. Gürel (2003); per $n = 1$, Σ, se compatta, è un insieme di sottovarietà diffeomorfe a S^1, quindi ogni caratteritica è chiusa.

Nel 1979, A. Weinstein ha congetturato che un'ipersuperficie compatta di $\mathbb{R}^{2n}$ che sia *di contatto* possiede sempre almeno una caratteristica chiusa (sotto l'ipotesi aggiuntiva $H^1(\Sigma, \mathbb{R}) = 0$, ipotesi che si è in seguito rivelata non necessaria). Vediamo cosa significhi la condizione di contatto:

DEFINIZIONE 1.8. *Un'ipersuperficie Σ in $\mathbb{R}^{2n}$ si dice di contatto se esiste un campo vettoriale Y definito in un intorno di Σ che sia trasverso a Σ e tale che $L_Y \omega_0 = \omega_0$.*

Vediamo cosa implichi la condizione di contatto, nel caso di un'ipersuperficie Σ compatta. Sia ϕ_t il flusso locale del campo Y: per compattezza, esistono $\epsilon > 0$ ed un intorno di Σ dove ϕ_t è definita per ogni $t \in]-\epsilon, \epsilon[$. Per la condizione di trasversalità, a meno di scegliere un ϵ più piccolo, possiamo supporre che un intorno di Σ sia foliato dalle ipersuperfici $\Sigma_t := \phi_t(\Sigma)$, per $t \in]-\epsilon, \epsilon[$. Affermiamo che

$$D\phi_t(x)\mathcal{L}_\Sigma(x) = \mathcal{L}_{\Sigma_t}(\phi_t(x)), \qquad \forall t \in]-\epsilon, \epsilon[, \ \forall x \in \Sigma, \tag{5}$$

ossia che la restrizione di ϕ_t a Σ induce un isomorfismo di fibrati vettoriali tra $\mathcal{L}_\Sigma \to \Sigma$ e $\mathcal{L}_{\Sigma_t} \to \Sigma_t$. Infatti, dall'identità $L_Y \omega_0 = \omega_0$ segue che

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* \omega_0 = \phi_t^* \big(L_Y \omega_0\big) = \phi_t^* \omega_0,$$

da cui, dato che $\phi_0^* \omega_0 = \mathrm{id}^* \omega_0 = \omega_0$,

$$\phi_t^* \omega_0 = e^t \omega_0.$$

Ma allora, se $u \in \mathcal{L}_\Sigma(x)$ e $v \in T_x\Sigma$, si ha

$$0 = \omega_0[u, v] = e^t \omega_0[u, v] = \phi_t^* \omega_0[u, v] = \omega_0\big[D\phi_t(x)u, D\phi_t(x)v\big].$$

Grazie al fatto che $D\phi_t(x)$ si restringe ad un isomorfismo da $T_x\Sigma$ a $T_{\phi_t(x)}\Sigma_t$, l'identità sopra implica che $D\phi_t(x)u$ appartiene al nucleo di $\omega_0|_{T_{\phi_t(x)}\Sigma_t}$, ossia a $\mathcal{L}_\Sigma(\phi_t(x))$. Questo dimostra (5).

Portando $\mathcal{L}_\Sigma$ in $\mathcal{L}_{\Sigma_t}$, il diffeomorfismo ϕ_t porta la foliazione caratteristica di Σ in quella di Σ_t. In altre parole, le dinamiche su Σ e su Σ_t (definite a meno di riparametrizzazione temporale) sono coniugate. In particolare, Σ possiede caratteristiche chiuse se e solo se Σ_t le possiede.

In questo corso dimostreremo la validità della congettura di Weinstein, un risultato dimostrato per la primo volta da C. Viterbo con altre tecniche:

Teorema 1.9. *Ogni ipersuperficie compatta e di contatto in* $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ *possiede almeno una caratteristica chiusa.*

Tanto la nozione di foliazione caratteristica quanto quella di ipersuperficie di contatto si estendono a varietà simplettiche arbitrarie. Risulta quindi naturale estendere la congettura di Weinstein ad ipersuperfici compatte e di contatto di varietà simplettiche arbitrarie. In questa generalità, la congettura è ancora aperta, anche se esistono risposte affermative per varie classi di esempi, ed in particolare nel caso generale per $n = 2$ (ossia per ipersuperfici in varietà di dimensione 4), grazie ad un recente risultato di C. H. Taubes (2009).

Osservazione 1.10. *La condizione di contatto della Definizione 1.8 è equivalente alla seguente condizione: esiste una 1-forma* α *su* Σ *tale che* $d\alpha = \omega_0|_\Sigma$ *e* $\alpha|_{\mathcal{L}_\Sigma} \neq 0$ *(si veda [HZ94, Capitolo 4, Proposizione 4]). Da questa condizione segue facilmente che* $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ *è una forma di volume su* Σ*, ovvero che il* $(2n-2)$*-fibrato* $\ker \alpha$ *è una struttura di contatto sulla varietà* $(2n-1)$*-dimensionale* Σ.

1.5 Diffeomorfismi simplettici

Un automorfismo lineare A di $\mathbb{R}^{2n}$ si dice *automorfismo simplettico* se conserva la forma simplettica ω_0, ossia $A^*\omega_0 = \omega_0$ o, equivalentemente,

$$\omega_0\big[Au, Av\big] = \omega_0[u, v], \qquad \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Dato che

$$\omega_0[u, v] = Ju \cdot v \quad \text{e} \quad \omega_0\big[Au, Av\big] = JAu \cdot Av = A^*JAu \cdot v,$$

dove A^* indica l'aggiunta di A rispetto al prodotto scalare euclideo, A è simplettico se e solo se

$$A^*JA = J.$$

Gli automorfismi lineare simplettici formano un sottogruppo di Lie di $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$, il *gruppo simplettico*, che si indica con $\mathrm{Sp}(2n)$.

Un *diffeomorfismo simplettico*, o *simplettomorfismo*, tra aperti di $\mathbb{R}^{2n}$ è un diffeomorfismo φ che conserva la forma simplettica ω_0, ossia $\varphi^*\omega_0 = \omega_0$ o, equivalentemente, tale che per ogni x nel suo dominio, il differenziale $D\varphi(x)$ appartenga a $\mathrm{Sp}(2n)$.

Osservazione 1.11. *Questa defnizione si estende immediatamente a diffeomorfismi tra due varietà simplettice* (M, ω) *e* (M', ω')*: il diffeomorfismo* $\varphi : M \to M'$ *si dice simplettomorfismo se* $\varphi^*\omega' = \omega$*. Il Teorema di Darboux 1.5 si può riformulare dicendo che ogni varietà simplettica è localmente simplettomorfa a* $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Sia $H \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n})$ un Hamiltoniana dipendente dal tempo, ed usiamo la notazione $H_t(x) = H(t, x)$. La famiglia ad un parametro di diffeomorfismi ϕ_t che risolvono il problema di Cauchy associato al campo vettoriale non autonomo X_{H_t}, ossia

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi_t(x) &= X_{H_t}(\phi_t(x)), \\ \phi_0(x) &= x, \end{cases}$$

è una famiglia di simplettomorfismi. Infatti, differenziando le equazioni sopra rispetto a x, otteniamo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}D\phi_t(x) &= DX_{H_t}(\phi_t(x))D\phi_t(x) = DJ\nabla H(\phi_t(x))D\phi_t(x) = JD^2H(\phi_t(x))D\phi_t(x), \\ D\phi_0(x) &= I, \end{cases}$$

da cui, ponendo $A(t) := D\phi_t(x)$, troviamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A(t)^*JA(t) &= A'(t)^*JA(t) + A(t)^*JA'(t) \\ &= (JD^2H(\phi_t(x))A(t))^*JA(t) + A(t)^*JJD^2H(\phi_t(x))A(t) \\ &= A(t)^*D^2H(\phi_t(x))(-J)JA(t) - A(t)^*D^2H(\phi_t(x))A(t) \\ &= A(t)^*D^2H(\phi_t(x))A(t) - A(t)^*D^2H(\phi_t(x))A(t) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Dato che $A(0) = I$, risulta

$$A(0)^* J A(0) = J,$$

e per (6),

$$A(t) J A(t) = J$$

per ogni t, il che mostra che $A(t) = D\phi_t(x)$ è simplettico.

Osservazione 1.12. *Alternativamente, il fatto che ϕ_t sia un cammino di diffeomorfismi simplettici può essere dimostrato usando il linguaggio delle forme differenziali (si veda la Proposizione 1.20 nell'Appendice). Infatti*

$$\frac{d}{dt}\phi_t^* \omega_0 = \phi_t^*\big(L_{X_{H_t}} \omega_0\big) = \phi_t^*\big(d\imath_{X_{H_t}} \omega_0 + \imath_{X_{H_t}} d\omega_0\big) = \phi_t^*\big(d(-dH_t)\big) = 0,$$

poiché $d \circ d = 0$. Insieme all'identità $\phi_0^*\omega = \mathrm{id}^*\omega_0 = \omega_0$, questo implica che $\phi_t^*\omega_0 = \omega_0$ per ogni t. Questa dimostrazione si estende immediatamente ai diffeomorfismi indotti da campi Hamiltoniani su varietà simplettiche arbitrarie.

Conservando la forma ω_0, i diffeomorfismi simplettici conservano anche la forma ω_0^n, che abbiamo visto essere un multiplo della forma di volume euclideo su $\mathbb{R}^{2n}$ (Osservazione 1.2). Quindi i diffeomorfismi simplettici conservano il volume (risultato noto come Teorema di Liouville).

1.6 Diffeomorfismi che conservano il volume

Supponiamo di avere due varietà orientate chiuse (ossia compatte senza bordo) M e N munite di forme di volume ρ e σ, rispettivamente. Ci poniamo la seguente domanda: esiste un diffeomorfismo $\varphi : M \to N$ che preserva le forme di volume, ossia tale che $\varphi^*\sigma = \rho$? Condizioni necessarie sono ovviamente: (i) M e N devono essere diffeomorfe e (ii) M e N devono avere lo stesso volume, ossia

$$\int_M \rho = \int_N \sigma.$$

Il seguente risultato mostra che queste due condizioni sono anche sufficienti. In altre parole, l'unico invariante dei diffeomorfismi che conservano il volume è il volume totale:

Teorema 1.13 (Moser). *Se (M, ρ) e (N, σ) sono varietà orientate chiuse, tra loro diffeomorfe e tali che*

$$\int_M \rho = \int_N \sigma, \tag{7}$$

allora esiste un diffeomorfismo $\varphi : M \to N$ tale che $\varphi^*\sigma = \rho$.

Dimostrazione. Possiamo identificare M e N tramite un diffeomorfismo qualsiasi e ridurci al caso di una sola varietà M con due forme di volume ρ e σ distinte, rispetto alle quali M ha lo stesso volume. Per (7), ρ e σ definiscono la stessa orientazione su M, dunque la combinazione convessa

$$\rho_t := \rho + t(\sigma - \rho)$$

è una forma di volume per ogni $t \in [0, 1]$. Seguiamo la seguente strategia: vogliamo costruire un cammino di diffeomorfismi ϕ_t, $t \in [0, 1]$, di M su sé stessa tale che

$$\phi_t^* \rho_t = \rho, \qquad \forall t \in [0, 1]. \tag{8}$$

Dato che $\rho_1 = \sigma$, il diffeomorfismo $\varphi := \phi_1$ soddisferà la condizione richiesta.

Chiamiamo X_t il cammino di campi vettoriali su M il cui flusso è ϕ_t, ossia

$$\frac{d}{dt}\phi_t = X_t(\phi_t), \quad \phi_0 = \mathrm{id}.$$

Il nostro scopo è determinare condizioni su X_t affinché il cammino di diffeomorfismi ϕ_t definito dall'equazione sopra soddisfi (8). Dato che $\rho_0 = \rho$, (8) è soddisfatta per $t = 0$ e ci basta verificare che la derivata rispetto a t di $\phi_t^* \rho_t$ si annulla identicamente. Calcoliamo questa derivata, usando i punti (1) e (4) della Proposizione 1.20 dell'Appendice 1.9,

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\rho_t = \phi_t^*\Big(L_{X_t}\rho_t + \frac{d}{dt}\rho_t\Big) = \phi_t^*\big(d\imath_{X_t}\rho_t + \imath_{X_t}d\rho_t + \sigma - \rho\big) = \phi_t^*\big(d\imath_{X_t}\rho_t + \sigma - \rho\big). \tag{9}$$

Dalla condizione (7) segue che la forma $\rho - \sigma$ è esatta, dunque esiste una $(n-1)$-forma η tale che

$$d\eta = \rho - \sigma.$$

Allora per avere che (9) si annulli per ogni $t \in [0,1]$ è sufficiente definire X_t come l'unico campo vettoriale tale che

$$\imath_{X_t}\rho_t = \eta, \qquad \forall t \in [0,1].$$

La buona definizione e la regolarità di X_t seguono dal fatto che ρ_t è una forma di volume per ogni $t \in [0,1]$: infatti se $\mu \neq 0$ è una forma n-lineare alternante su $\mathbb{R}^n$, allora l'applicazione lineare che a ciascun vettore $u \in \mathbb{R}^n$ associa la forma $(n-1)$-lineare $\imath_u \mu$ è un isomorfismo, essendo iniettiva tra spazi della stessa dimensione. $\square$

1.7 Il teorema non-squeezing di Gromov

Abbiamo visto che i diffeomorfismi simplettici tra aperti di $\mathbb{R}^{2n}$ conservano il volume. Tranne nel caso $n = 1$, in cui le due nozioni coincidono, la condizione di conservare la struttura simplettica e più restrittiva e produce fenomeni di rigidità inaspettati, come quello che ci accingiamo a descrivere.

Indichiamo con B_r la palla euclidea di raggio r in $\mathbb{R}^{2n}$ e con Z_s il cilindro

$$Z_s := \left\{(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid q_1^2 + p_1^2 < s^2\right\}.$$

Ovviamente $B_r \subset Z_s$ se e solo se $s \geq r$. Dato che la palla ha volume finito mentre il cilindro ha volume infinito, anche se $s < r$ non è difficile costruire un diffeomorfismo

$$\varphi : B_r \to \varphi(B_r) \subset Z_s$$

che conservi il volume (si può anche sceglierlo lineare). Invece non è possibile trovare un diffeomorfismo simplettico con la stessa proprietà, come afferma il sequente:

TEOREMA 1.14 (Gromov, 1985). *Se $0 < s < r$ non esiste alcun diffeomorfismo simplettico*

$$\varphi : B_r \to \mathbb{R}^{2n}$$

la cui immagine $\varphi(B_r)$ sia contenuta nel cilindro Z_s.

La dimostrazione di Gromov utilizza tecniche di curve pseudo-olomorfe, che sono state introdotte nello stesso articolo e che sono divenute molto importanti in geometria simplettica. In questo corso daremo una dimostrazione diversa, basata su tecniche analoghe a quelle che useremo per dimostrare la congettura di Weinstein.

OSSERVAZIONE 1.15. *Il teorema non-squeezing ha qualche somiglianza con il principio di indeterminazione in meccanica quantistica: ci dice che anche in meccanica classica, se conosciamo lo stato iniziale del nostro sistema con una precisione r (ossia se sappiamo che questo stato si trova in B_r) non possiamo, facendo evolvere il sistema (ossia applicando un diffeomorfismo simplettico),migliorare simultaneamente l'informazione su due variabili coniugate q_1 e p_1, neanche permettendoci di perdere completamente le informazioni sulle altre variabili (ossia non possiamo mandare B_r in Z_s con $s < r$).*

OSSERVAZIONE 1.16. *Sarebbe invece semplice costruire diffeomorfismi simplettici, anche lineari, che mandino la palla B_r in altri cilindri, come quelli della forma*

$$\left\{(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid q_1^2 + q_2^2 < s^2\right\},$$

qualunque sia $s > 0$.

Osservazione 1.17. *Il Teorema non-squeezing può essere equivalentemente riformulato come una disuguaglianza: se P indica il proiettore ortogonale sul piano generato dai vettori ∂_{q_1}, ∂_{p_1}, allora per ogni diffeomorfismo simplettico $\varphi : B_r \to \mathbb{R}^{2n}$ risulta*

$$\operatorname{area}\big(P\varphi(B_r)\big) \geq \pi r^2. \tag{10}$$

È infatti ovvio che questo enunciato implica il Teorema 1.14. D'altra parte, se assumiamo il Teorema 1.14, possiamo dimostrare (10) nel seguente modo. Se per assurdo $\varphi : B_r \to \mathbb{R}^{2n}$ è un simplettomorfismo per cui $P\varphi(B_r)$ ha area inferiore a πr^2, usando una versione per domini di $\mathbb{R}^2$ del Teorema 1.13 possiamo costruire un diffeomorfismo ψ che conserva l'area e che manda $P\varphi(B_r)$ dentro il disco di raggio t, con $s < t < r$. Dal fatto che ψ conserva l'area, segue che il diffeomorfismo $\psi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2n-2}}$ è simplettico. Dunque il simplettomorfismo $(\psi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2n-2}}) \circ \varphi$ manda B_r in Z_t con $t < r$, violando il Teorema 1.14.

1.8 Le congetture di Arnold

L'ultimo teorema che dimostreremo riguarda il numero dei punti fissi di *diffeomorfismi Hamiltoniani* del toro $\mathbb{T}^{2n}$, munito della sua struttura simplettica standard ω_0. Un diffeomorfismo Hamiltoniano φ di $\mathbb{T}^{2n}$ è per definizione il flusso a tempo 1 di un campo Hamiltoniano - eventualmente non autonomo - su $\mathbb{T}^{2n}$: $\varphi = \phi_1$, dove ϕ_t risolve

$$\frac{d}{dt}\phi_t = X_{H_t}(\phi_t), \quad \phi_0 = \mathrm{id},$$

per una certa $H \in C^\infty([0,1] \times \mathbb{T}^{2n})$. Come abbiamo visto, un tale diffeomorfismo è simplettico (sezione 1.5). Viceversa, si potrebbe mostrare che un diffeomorfismo simplettico $\varphi : \mathbb{T}^{2n} \to \mathbb{T}^{2n}$ è Hamiltoniano se e solamente se è isotopo all'identità e può essere sollevato ad un diffeomorfismo $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ tale che

$$\int_{[0,1]^{2n}} \tilde{\phi}(x)\, dx = 0.$$

Ricordiamo inoltre che un punto fisso x di un diffeomorfismo $\varphi : M \to M$ si dice *non-degenere* se 1 non è un autovalore dell'isomorfismo $D\varphi(x) : T_xM \to T_xM$, o equivalentemente se $\mathrm{id} - D\varphi(x)$ è invertibile su T_xM. Per il teorema della funzione inversa, i punti fissi non degeneri sono isolati.

Nel suo celebre libro di meccanica classica, V. Arnold ha congetturato che se φ è un diffeomorfismo Hamiltoniano di una varietà simplettica chiusa M allora, detto $\operatorname{Fix} \varphi$ l'insieme dei suo punti fissi e indicando con $|A|$ la cardinalità di un insieme A,

$$\big|\operatorname{Fix} \varphi\big| \geq \min_{f \in C^\infty(M)} \big|\operatorname{crit} f\big|,$$

dove $\operatorname{crit} f$ indica l'insieme dei punti critici di f, e che questa stima diventi

$$\big|\operatorname{Fix} \varphi\big| \geq \min_{\substack{f \in C^\infty(M) \\ f \text{ Morse}}} \big|\operatorname{crit} f\big|,$$

se si assume che i punti fissi di φ siano non degeneri (una funzione si dice di Morse se il suo differenziale secondo in ciascun punto critico è non-degenere).

Osservazione 1.18. *Nel caso $M = S^2$, entrambi i numeri a destra valgono 2, quindi le congetture di Arnold richiedono che un diffeomorfismo Hamiltoniano di S^2 (munita di una forma d'area qualsiasi, che per il Teorema di Moser 1.13 sono tutte equivalenti alla forma d'area sulla sfera euclidea di raggio opportuno) abbia almeno due punti fissi. Senza la restrizione della conservazione dell'area, non possiamo aspettarci più di un punto fisso per un diffeomorfismo di S^2 isotopo all'identità: si consideri ad esempio la traslazione $z \mapsto z + 1$ sulla sfera di Riemann $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*

Nel caso del toro $\mathbb{T}^{2n}$, la teoria di Morse implica che una funzione di Morse $f \in C^\infty(\mathbb{T}^{2n})$ possiede almeno 2^{2n} punti critici, mentre la teoria di Lusternik-Schnirelmann implica che un'arbitraria funzione $f \in C^\infty(\mathbb{T}^{2n})$ possiede almeno $2n + 1$ punti critici (dimostreremo questi fatti più avanti). Queste stime inferiori sono ottimali. Per il toro $\mathbb{T}^{2n}$ la congettura di Arnold è dunque implicata dal seguente:

Teorema 1.19 (Conley-Zehnder, 1984). *Un diffeomorfismo Hamiltoniano di $\mathbb{T}^{2n}$ ha almeno $2n+1$ punti fissi. Nel caso in cui tutti i punti fissi siano non-degeneri, ve ne sono almeno 2^{2n}.*

Dimostreremo questo teorema alla fine del corso. Nel caso non-degenere, la congettura di Arnold è stata dimostrata per classi di varietà simplettiche via via più generali da numerosi autori, a partire dalle idee di A. Floer, che combinano la teoria delle curve pseudo-olomorfe di Gromov con la teoria di Morse. È nota la sua validità in generale, ma in una forma più debole di quella enunciata qui e con una dimostrazione che presenta ancora aspetti non completamente chiariti. Nel caso degenere, la congettura è stata confermata soltanto per classi particolari di varietà simplettiche da Floer stesso e sussistono dubbi sulla sua validità in generale.

1.9 Appendice: forme differenziali

Se α e X sono una k-forma e un campo vettoriale sulla varietà M, $\imath_X \alpha$ indica la $(k-1)$-forma ottenuta contraendo α su X, ossia

$$(\imath_X \alpha)[u_1, \dots, u_{k-1}] := \alpha[X, u_1, \dots, u_{k-1}].$$

Si tratta di un'operazione puntuale, indotta da un'analoga operazione in categoria lineare. Nelle stesse ipotesi, la *derivata di Lie* di α lungo X è la k-forma $L_X \alpha$ definita da

$$(L_X \alpha)(x) := \frac{d}{dt} \Big[\phi_t^* \alpha(x) \Big]_{t=0}, \qquad \forall x \in M,$$

dove ϕ_t indica il flusso locale del campo X, ossia la soluzione di

$$\frac{d}{dt} \phi_t = X(\phi_t), \quad \phi_0 = \mathrm{id}.$$

Elenchiamo alcune utili proprietà della derivata di Lie di forme nella seguente:

Proposizione 1.20. *Sia M una varietà differenziabile.*

1. *Se X_t e α_t sono famiglie ad un parametro di campi vettoriali e di k forme e ϕ_t è il flusso locale di X_t, ossia la soluzione del sistema non autonomo*

   $$\frac{d}{dt} \phi_t = X_t(\phi_t), \quad \phi_0 = \mathrm{id},$$

   allora

   $$\frac{d}{dt} (\phi_t^* \alpha_t) = \phi_t^* \Big(L_{X_t} \alpha_t + \frac{d}{dt} \alpha_t \Big).$$

2. *Se f è una funzione su M, $L_X f = df[X] = \imath_X f$.*

3. *$L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X \beta$.*

4. *(Identità di Cartan) $L_X \alpha = d\imath_X \alpha + \imath_X d\alpha$.*

1.10 Esercizi

Classificazione degli spazi vettoriali simplettici. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, munito di una forma bilineare antisimmetrica non degenere ω (ossia, uno *spazio vettoriale simplettico*). Si vuole dimostrare che $\dim V = 2n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ e che esiste un isomorfismo lineare $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to V$ tale che $\Phi^* \omega = \omega_0$. Si proceda nel modo seguente:

1. Fissato $u_1 \neq 0$ in V, si mostri che esiste $v_1 \in V$ tale che $\omega[u_1, v_1] = 1$.

2. Sia V_1 il piano generato da u_1 e v_1. Se $V_1^{\perp_\omega}$ indica l'insieme dei vettori $u \in V$ tali che $\omega[u, v] = 0$ per ogni $v \in V_1$, si mostri che $V = V_1 \oplus V_1^{\perp_\omega}$.

3. Si dimostri che V possiede una base $u_1, v_1, \dots, u_n, v_n$ tale che

   $$\omega[u_i, u_j] = \omega[v_i, v_j] = 0, \qquad \omega[u_i, v_j] = \delta_{i,j},$$

   per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

4. Si concluda.

Teorema di Darboux. Sia (M, ω) una varietà simplettica. Si vuole dimostrare il teorema di Darboux: ogni punto di M possiede un intorno aperto U diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^{2n}$ tramite un diffeomorfismo $\varphi : U \to \mathbb{R}^{2n}$ tale che $\varphi^*\omega_0 = \omega$. Si proceda nel modo seguente:

1. Sfruttando l'esercizio precedente, si dimostri che ci si può ricondurre al seguente enunciato: se ω è una struttura simplettica su un intorno U di 0 in $\mathbb{R}^{2n}$ tale che $\omega(0) = \omega_0$, allora esiste un diffeomorfismo $\varphi : V \to \varphi(V) \subset U$, con V intorno di 0, tale che $\varphi(0) = 0$ e $\varphi^*\omega = \omega_0$.

2. Si mostri che $\omega_t := \omega_0 + t(\omega - \omega_0)$ è non-degenere in un intorno di 0, per ogni $t \in [0, 1]$.

3. Ragionando come nella dimostrazione del Teorema di Moser 1.13, si determini un campo vettoriale X_t, $t \in [0, 1]$, su un intorno di 0 tale che $X_t(0) = 0$ per ogni $t \in [0, 1]$ e il cui flusso locale ϕ_t soddisfi

$$\phi_t^*\omega_t = \omega_0, \qquad \forall t \in [0, 1].$$

Fibrati cotangenti. Sia Q una varietà e sia T^*Q il suo fibrato cotangente, con proiezione $\pi : T^*Q \to Q$. Sia η la 1-forma sulla varietà T^*Q definita da

$$\eta(x)[\xi] := \langle x, D\pi(x)[\xi]\rangle, \qquad \forall x \in T^*Q,\ \forall \xi \in T_xT^*Q,$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica l'accoppiamento di dualità tra covettori e vettori.

1. Si dimostri che in coordinate cotangenti $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$, η assume la forma

$$\eta = \sum_{j=1}^{n} p_j\, dq_j.$$

2. Si dimostri che $d\eta$ è una forma simplettica su T^*Q (la *forma simplettica standard* di T^*Q).

3. Si verifichi che, tramite l'identificazione tra $T^*\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{2n}$ indotta dal prodotto scalare euclideo, la forma simplettica $d\eta$ considerata qui coincide con la forma simplettica standard ω_0.

4. Sia σ una 2-forma chiusa su Q. Si dimostri che la forma

$$\omega_\sigma := d\eta + \pi^*\sigma$$

è ancora una struttura simplettica su T^*Q.

Sottovarietà lagrangiane. Una sottovarietà lagrangiana di una varietà simplettica (M, ω) di dimensione $2n$ è una sottovarietà $L \subset M$ di dimensione n tale che $\omega|_L = 0$.

1. Si diano esempi di sottovarietà lagrangiane di $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ che siano (i) un sottospazio vettoriale, (ii) diffeomorfe ad un toro $\mathbb{T}^n$.

2. Si dimostri che l'immagine di una sezione $\theta : Q \to T^*Q$ è una sottovarietà lagrangiana (rispetto alla struttura simplettica standard di T^*Q definita nell'esercizio precedente) se e solamente se θ, pensata come una 1-forma, è chiusa.

3. Si dimostri che se una sottovarietà lagrangiana L è contenuta in una ipesuperficie $\Sigma \subset M$, allora è una sottovarietà invariante per la foliazione caratteristica di Σ (ossia, $\mathcal{L}_\Sigma$ è tangente a L).

Lemma di Poincaré. Si vuole dimostrare il lemma di Poincaré: se U è un aperto di $\mathbb{R}^n$ stellato rispetto all'origine (ossia $x \in U$ implica $tx \in U$ per ogni $t \in [0, 1]$) e α è una k-forma chiusa su U, allora α è esatta. Si proceda nel modo seguente:

1. Si dimostri la Proposizione 1.20.

2. Si mostri che il flusso ϕ_t del campo vettoriale $X(x) = x$ è ben definito su $]-\infty, 0] \times U$ e che $\phi_t(x) \to 0$ e $D\phi_t(x) \to 0$ per $t \to -\infty$, per ogni $x \in U$.

3. Si definisca un'applicazione lineare H dallo spazio delle k-forme su U in quello delle $(k-1)$-forme su U tramite la formula
$$H\alpha := \imath_X \left(\int_{-\infty}^{0} \phi_t^* \alpha \, dt \right).$$
4. Usando l'identità di Cartan, si dimostri che
$$d \circ H + H \circ d = \mathrm{Id}.$$
5. Si concluda.

Riferimenti bibliografici

[HZ94] H. Hofer and E. Zehnder, *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*, Birkhäuser, Basel, 1994.