

TEOREMA DI TYCHONOV

1. Filtri su un insieme (WEIL, 1937)

Def: un FILTRO su un insieme X non vuoto è un insieme $\mathcal{F}$ di parti di X verificante le proprietà seguenti:

- i. $\forall F \in \mathcal{F}, F \neq \emptyset$;
- ii. $\forall F \in \mathcal{F} \text{ e } F \subseteq G \subseteq X, G \in \mathcal{F}$;
- iii. $\forall F \in \mathcal{F}, \forall F' \in \mathcal{F}, F \cap F' \in \mathcal{F}$.

Esempio 1: Gli intorno di un punto x di uno sp. topologico sono un filtro, detto "il filtro degli intorno del punto x " e denotato $\mathcal{U}_x$ nel seguito.

Esempio 2: I sottoinsiemi co-finiti di $\mathbb{N}$ sono un filtro: il filtro di Fréchet.

Esempio 3: Per ogni $A \subseteq X$ è definito il filtro "su X

$\langle A \rangle = \{ B \subseteq X : B \supseteq A \}$; esso è il minimo filtro $\mathcal{F}$ su X tale che $A \in \mathcal{F}$; si dice "filtro principale" (generato da A) -

Def: Una BASE DI FILTRO $\mathcal{B}$ su un insieme non vuoto X è un insieme di parti di X tale che

- i. $\forall B \in \mathcal{B}, B \neq \emptyset$
- ii. $\forall B \in \mathcal{B} \forall B' \in \mathcal{B} \exists B'' \in \mathcal{B} \text{ t.c. } B'' \subseteq B' \cap B$

Data una base di filtro $\mathcal{B}$, esiste il più piccolo filtro $\mathcal{F} = \langle \mathcal{B} \rangle$ contenente $\mathcal{B}$; esso è costituito da tutti quei sottoinsiemi di X che includono qualche elemento di $\mathcal{B}$; dunque $\langle \mathcal{B} \rangle = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \langle B \rangle$.

Esempio 4: su (X, d) è uno spazio metrico e $x \in X$, le palle di centro x e raggio positivo sono una base del filtro degli intorno di x .

Esempio 5: gli intervalli naturali $\{ [n, \infty) \cap \mathbb{N} \}_{n \in \mathbb{N}}$ sono una base del filtro di Fréchet su $\mathbb{N}$.

Esempio 6: Il singoletto $\{A\}$ è una base del filtro principale di $A \subseteq X$.

NOTA: Dagli esempi si vede che un filtro può essere comodamente descritto per mezzo di una base. Alcuni autori (Dugundji p.es.) considerano solo la nozione di base di filtro. Per altri versi certi fatti si descrivono meglio in termini di filtri.

Ordine e operazioni reticolari fra filtri e basi di filtro

- Def. Date le basi di filtro $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ in X si dice che " $\mathcal{A}$ è più fine di $\mathcal{B}$ " se il filtro generato da $\mathcal{A}$ include il filtro generato da $\mathcal{B}$. Equivalientemente: $\forall B \in \mathcal{B} \exists A \in \mathcal{A} : A \subseteq B$.
Si scrive $\mathcal{A} \geq \mathcal{B}$; si noti che per filtri equivale a $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$.
- Def. Dati due filtri sull'insieme X , $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, esiste sempre il massimo filtro meno fine di entrambi; esso è $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.
Non esiste sempre il minimo filtro più fine di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$; precisamente, esiste sse $\forall A \in \mathcal{A} \forall B \in \mathcal{B} A \cap B \neq \emptyset$.

In tal caso si denota $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ ed è $\{A \cap B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$

Più in generale, data una famiglia di filtri $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ esiste il loro estremo superiore ed è $\{\bigcap_{i \in I} A_i : I \subseteq I, I \text{ finito}, A_i \in \mathcal{F}_i\}$ purché tale insieme non contenga $\emptyset$

Filtri Massimali, o Ultrafiltri. Poiché l'ordinamento per finezza (inclusione) dei filtri verifica la condizione della catena ascendente, si ha per il lemma di Zorn, che ogni filtro su un insieme è incluso in qualche filtro massimale. I filtri $\mathcal{M}$ massimali sono caratterizzati dalla proprietà:

$$(*) \quad \forall A \subseteq X \quad A \in \mathcal{M} \quad \text{oppure} \quad A^c \in \mathcal{M}$$

Infatti: se $\mathcal{M}$ è un filtro e $A^c \notin \mathcal{M}$ allora $\forall B \in \mathcal{M} B \not\subseteq A^c$ (se no $A^c \in \mathcal{M}$) cioè $B \cap A \neq \emptyset$; quindi esiste $\mathcal{M} \vee \langle A \rangle$; ma se $\mathcal{M}$ è massimale deve coincidere con esso, quindi $A \in \mathcal{M}$.

Viceversa: se $\forall A \subseteq X$ vale $A \in \mathcal{M} \vee A^c \in \mathcal{M}$ e $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{M}$ è un filtro in X , $\forall A \in \mathcal{F}$ non può essere $A^c \in \mathcal{M}$ se no $A^c \in \mathcal{F}$ e $\emptyset = A^c \cap A \in \mathcal{F}$; quindi $A \in \mathcal{M}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{M}$, cioè $\mathcal{M}$ è massimale.
oss: tenendo conto della definizione di filtro generato, si ha: la base di filtro $\mathcal{B}$ genera un filtro massimale sse $\forall A \subseteq X \exists B \in \mathcal{B}$ t. che $B \subseteq A$ oppure $B \subseteq A^c$.

Filtri e Applicazioni. Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ basi di filtro rispettivamente sull'insieme X e Y ; sia $f: X \rightarrow Y$ una applicazione.

Def. Il filtro immagine di $\mathcal{A}$ tramite f è il filtro $f(\mathcal{A})$ generato da $\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$ (è già un filtro se $\mathcal{A}$ è ^{quest'ultimo} e se f è surgett.).

Il filtro pre-immagine di $\mathcal{B}$ tramite f è il filtro

$f^{-1}(\mathcal{B})$ generato da $\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ (è già un filtro se $\mathcal{B}$ è ^{quest'ultimo}).

Si noti la relazione di inclusione fra le operazioni di immagine e pre-immagine di filtri:

$$f(\mathcal{A}) \supseteq \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \supseteq f^{-1}(\mathcal{B})$$

(infatti entrambe significano: $\forall B \in \mathcal{B} \exists A \in \mathcal{A} : A \subseteq f(B)$)

Dalla caratterizzazione dei filtri massimali segue subito che l'immagine di un ultrafiltro è un ultrafiltro.

Infatti se $\mathcal{M}$ è un ultrafiltro su X e $f: X \rightarrow Y$, sia $A \subseteq Y$.

Allora $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ oppure $f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c) \in \mathcal{M}$ perché $\mathcal{M}$ è massimale.

Quindi $A \supseteq f f^{-1}(A)$ oppure $A^c \supseteq f f^{-1}(A^c)$ appartiene a $f(\mathcal{M})$.

Filtri & Topologia

Sia X uno spazio topologico e $\mathcal{F}$ un filtro su X .

Def. Diciamo che il filtro $\mathcal{F}$ converge al punto $x \in X$ sse $\mathcal{F} \geq \mathcal{U}_x$; si scrive $\mathcal{F} \rightarrow x$. Equivamente, $\forall U \in \mathcal{U}_x \exists F \in \mathcal{F} : F \subseteq U$.

Def. Diciamo che $x \in X$ è aderente a $\mathcal{F}$ sse $\forall F \in \mathcal{F} \forall U \in \mathcal{U}_x F \cap U \neq \emptyset$; equivamente, sse $\exists \mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F} \mathcal{F}' \rightarrow x$ ma anche, sse $\forall F \in \mathcal{F} \exists x \in \overline{F}$.

Dunque, l'insieme dei punti aderenti a $\mathcal{F}$ è $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$; inoltre x è aderente a $\mathcal{F}$ sse esiste $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}, \mathcal{F}' \rightarrow x$.

Sia $f: X \rightarrow Y$ una applicazione fra gli spazi topologici X e Y . Dalla definizione di immagine di un filtro si ha che f è continua in $x \in X$ sse $f(\mathcal{U}_x) \supseteq \mathcal{U}_{f(x)}$.

Poiché la topologia prodotto sul prodotto cartesiano di una famiglia di spazi topologici $\{X_i\}_{i \in I}$ è quella meno fine che rende continue le proiezioni $p_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ si ha che il filtro degli intorni di $x \in \prod_{i \in I} X_i$ nella topologia prodotto è quello generato dalla famiglia di filtri $\{\mathcal{F}_i^{-1}(\mathcal{U}_{x_i})\}_{i \in I}$ (ove $x_i = p_i(x) \in X_i$). Infatti U è intorno di $x \in \prod_{i \in I} X_i$ sse esiste $J \subseteq I$ finito tale che $U \supseteq \bigcap_{i \in J} \mathcal{F}_i^{-1}(U_i)$ con $U_i \in \mathcal{U}(x_i) \forall i \in J$.

Perciò se $\mathcal{F}$ è un filtro su $\prod_{i \in I} X_i$ esso converge a x sse $\forall i \in I \mathcal{F}_i(\mathcal{F})$ converge a x_i (infatti entrambe le cose equivalgono a $\mathcal{F} \geq \mathcal{U}_x = \sup(\mathcal{F}_i^{-1}(\mathcal{U}_{x_i}))$, ricordando che $\mathcal{F} \geq \mathcal{F}_i^{-1}(\mathcal{U}_{x_i})$ sse $\mathcal{F}_i(\mathcal{F}) \supseteq \mathcal{U}_{x_i}$).

Filtri e Compattezza -

La proprietà di compattezza secondo Heine - Boel (per ricoprimenti) si può tradurre nel linguaggio dei filtri, essendo ovviamente equivalenti le proprietà:

1. Ogni ricoprimento aperto di X ha un sottoricoprimento finito;
2. Ogni famiglia di chiusi con intersezioni finite non vuote ha intersezione non vuota;
3. Ogni filtro ha punti aderenti; $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$
4. Ogni filtro ha un raffinamento convergente;
5. Ogni ultrafiltro è convergente.

Si noti che l'implicazione $5 \Rightarrow 4$ richiede l'assioma di scelta (nella forma del lemma di Zorn impiegato per mostrare che ogni filtro ammette un raffinamento massimale)

TEOREMA DI TYCHONOV - Il prodotto topologico di spazi compatti $\{X_i\}_{i \in I}$ è compatto

DIM: Sia $\mathcal{M}$ un ultrafiltro su $\prod_{i \in I} X_i$. Le immagini $\pi_i(\mathcal{M})$ sono ultrafiltri sui fattori X_i , perciò convergono $\pi_i(\mathcal{M}) \rightarrow x_i \in X_i$. Se definiamo $x \in \prod_{i \in I} X_i$ con $\pi_i(x) = x_i$ si ha come osservato $\mathcal{M} \rightarrow x$.

Quindi $\prod_{i \in I} X_i$ è compatto $\square$

L'ASSIOMA DI SCELTA è equivalente al teorema di Tychonov.

Siano $\{X_i\}_{i \in I}$ insiemi non vuoti. Assumendo il teorema di Tychonov si può mostrare che $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ (cioè esiste una funzione di scelta $\xi: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ con $\xi(i) \in X_i \forall i \in I$)

Sia $\infty \notin \bigcup_{i \in I} X_i$ e si consideri $\tilde{X}_i = X_i \cup \{\infty\}$ come spazio topologico (compatto) con gli aperti $\emptyset, \{\infty\}, \tilde{X}_i$. Per Tychonov $\prod_{i \in I} \tilde{X}_i$ è compatto, perciò la famiglia di chiusi $\{\tilde{X}_i \setminus \{\infty\}\}_{i \in I}$, che ha intersezioni finite non vuote,

ha intersezione non vuota, $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ $\square$