

Sottospazi complementati

Defn Sia V un sottospazio vettoriale chiuso dello spazio di Banach X . V si dice complementato se esiste un sottospazio vettoriale chiuso $W \subset X$ tale che $V \cap W = \{0\}$ e $V + W = X$. Un tale W si dice complementare topologico di V in X .

Oss Un complementare algebrico (cioè senza richieste meno la chiusura di W) esiste sempre, per il lemma di Zorn. Un complementare topologico può non esistere. Anzi: ogni spazio di Banach che non ammette una norma equivalente hilbertiana possiede sottospazi chiusi non complementati. Un esempio canonico è $c_0 \subset \ell^\infty$ (fatti non banali).

• Se $\dim V < +\infty$, allora V è complementato. Infatti sia $v_1, \dots, v_m$ una base di V . Per Hahn-Banach, $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_m \in X^*$ tali che $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$. Allora $W := \bigcap_{i=1}^m \text{Ker } \varphi_i$ è un sottospazio vettoriale chiuso e $W \cap V = \{0\}$. Se $x \in X$, allora $v := \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) v_i \in V$ e $x - v \in W \Rightarrow V + W = X$. Δ

• Se $\text{codim } V (= \dim X/V) < +\infty$, allora V è complementato.

Sia infatti W un complementare algebrico di V in X .

Dato che $\dim W < +\infty \Rightarrow W$ è chiuso $\Rightarrow W$ compl top. Δ

- Se $P \in \mathcal{L}(X)$ è un proiettore (ovvero $P^2 = P$), allora $\text{Im } P$ e $\text{Ker } P$ sono una complementare topologica dell'altro [già visto]

- Viceversa, se W è una complementare topologica di V , allora $\exists$! proiettore P t.c. $\text{Im } P = V$ e $\text{Ker } P = W$

Infatti: dato che $V + W = X$ è chiusa, per la proposizione sulla somma di sottospazi chiusi $\exists c$ t.c. $\forall x \in X \quad \exists v \in V, w \in W$ t.c. $x = v + w$ e $\|v\| + \|w\| \leq c \|x\|$. Dato che $\mathcal{L}(X) = (c)$, tali v, w sono unici. Definiamo $Px = v$. La linearità segue dall'unicità e la stima sopra implica che P è continuo.

Quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sottospazi} \\ \text{Complementati} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Immagini di} \\ \text{Proiettori} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Nuclei di} \\ \text{Proiettori} \end{array} \right\}$$

Inverse sinistre e destre

Defn Un' applicazione $S \in L(X, Y)$ si dice inversa sinistra se $\exists D \in L(Y, X)$ tale che $SD = I_Y$. Una tale D si dice inversa destra di S . Analogamente, $D \in L(Y, X)$ si dice inversa destra se $\exists S \in L(X, Y)$ t.c. $SD = I_Y$ e S si dice inversa sinistra di D .

Supponiamo $D \in L(Y, X)$ inversa destra di $S \in L(X, Y)$.

- S è surgettiva, D è iniettiva.
- $P := DS$ è una proiezione su X : infatti
 $(DS)^2 = DSDS = DI_Y S = DS$

Inoltre:

- $\text{Ker } P = \text{Ker } S$ poiché D è iniettiva
- $\text{Im } P = \text{Im } D$ poiché S è surgettiva

Dunque $\text{Ker } S$ e $\text{Im } D$ sono complementari topologici l'uno dell'altro ed abbiamo dimostrato:

S inversa sinistra $\Rightarrow S$ surgettiva e
 $\text{Ker } S$ complementato

D inversa destra $\Rightarrow D$ iniettiva, $\text{Im } D$
chiuso e complementato

Valgono anche le implicazioni inverse:

- Se $S \in L(X, Y)$ è surgettiva e $\text{Ker } S$ possiede complementare topologica V , allora $S|_V : V \rightarrow Y$ è lineare, continua, bigettiva tra Banach, quindi per il teorema della mappa aperta, $(S|_V)^{-1}$ è continua. Perciò $D \in L(Y, X)$ definita come composizione $Y \xrightarrow{(S|_V)^{-1}} V \hookrightarrow X$ è una inversa destra di S .

- Se $D \in L(Y, X)$ è iniettiva e $\text{Im } D$ è chiuso e possiede un complementare topologica W , definiamo $S \in L(X, Y)$ come $Sx = 0$ se $x \in W$ e $Sx = D^{-1}x$ se $x \in \text{Im } D$. Infatti $D^{-1} : \text{Im } D \rightarrow X$ è continua per il teorema della mappa aperta. S è un'inversa sinistra di D .

Concludendo:

- S inversa sinistra $\Leftrightarrow S$ surgettiva e $\text{Ker } S$ complementare.
La scelta di un'inversa destra di S equivale alla scelta di un complementare topologico di $\text{Ker } S$.
- D inversa destra $\Leftrightarrow D$ iniettiva, $\text{Im } D$ chiuso e compl.
La scelta di un'inversa sinistra di D equivale alla scelta di un complementare topologico di $\text{Im } D$.

Un sottospazio chiuso non complementato

$$X = L^2(\mathbb{T}), \quad V = \{u \in L^2(\mathbb{T}) \mid \hat{u}(k) = 0 \quad \forall k \leq 0\}$$

Ovviamente V è chiuso, ma non è complementato in X
dim

Supponiamo per assurdo che V sia complementato. Allora

$\exists Q \in L(X)$ proiettore con immagine V .

$\tau_y u(x) = u(x-y)$ definisce un'azione lineare del gruppo $(\mathbb{T}) = S^1$ su $L^2(\mathbb{T})$, ossia l'applicazione

$y \mapsto \tau_y$ è un omomorfismo di gruppi da $\mathbb{T}$ in $L(X)$.

$$(*) \quad \widehat{\tau_y u}(k) = \int_{\mathbb{T}} u(x-y) e^{-2\pi i k x} dx = \int_{\mathbb{T}} u(t) e^{-2\pi i k(t+y)} dt \\ = e^{-2\pi i k y} \hat{u}(k)$$

$\Rightarrow V$ è τ_y -invariante $\forall y \in \mathbb{T}$.

Definiamo $P \in L(X)$ come

$$P u := \int_{\mathbb{T}} \tau_y Q \tau_y u \, dy$$

Se $u \in V \Rightarrow \tau_y u \in V \quad \forall y \in \mathbb{T} \Rightarrow Q \tau_y u = \tau_y u$

$\forall y \in \mathbb{T} \Rightarrow P u = u$

Se $u \in L^1(\mathbb{T}) \Rightarrow Q \tau_y u \in V \quad \forall y \in \mathbb{T} \Rightarrow \tau_{-y} Q \tau_y u \in V$

$\forall y \in \mathbb{T} \Rightarrow P u \in V$.

Quindi $\text{Im } P \subset V$ e $P|_V = \text{id}$. Queste due proprietà implicano che anche P è un proiettore con immagine V .

Fatto P commuta con τ_y , $\forall y \in \mathbb{T}$. Infatti

$$\tau_{-y} P \tau_y u = \tau_{-y} \int_{\mathbb{T}} \tau_z Q \tau_z \tau_y u \, dz = \int_{\mathbb{T}} \tau_{-(y+z)} Q \tau_{y+z} u \, dz \\ = P u$$

$\Rightarrow P \tau_y = \tau_y P \quad \forall y \in \mathbb{T}$

Conseguenza P è diagonale rispetto alla "base" $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

$P e_k(x) := e^{2\pi i k x}$ Infatti

$$\tau_y e_k = e^{-2\pi i k y} e_k \Rightarrow$$

$$\tau_y P e_k = P \tau_y e_k = P e^{-2\pi i k y} e_k = e^{-2\pi i k y} P e_k$$

Quindi:

$$e^{-2\pi i k y} \widehat{P e_k}(h) \stackrel{(*)}{=} \widehat{\tau_y P e_k}(h) = e^{-2\pi i k y} \widehat{P e_k}(h)$$

$$\Rightarrow \widehat{P e_k}(h) = 0 \text{ se } h \neq k \Rightarrow$$

$$P e_k = a_k e_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Dal fatto che P è un proiettore su V , deduciamo

che $a_k = 1 \quad \forall k \geq 0$ e $a_k = 0 \quad \forall k < 0$, ossia

$$P u = \sum_{k \geq 0} \hat{u}(k) e_k$$

Ma questa è un assurdo, poiché un tale P non può essere continuo in $L^2(\mathbb{T})$. Infatti, sia

$$p_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \pi^{|k|} e^{2\pi i k x}, \quad \pi < 1, \quad \text{il nucleo di Poisson}$$

Allora $\|p_n\|_1 = 1$, però

$$P p_n(x) = \sum_{k \geq 0} \pi^k e^{2\pi i k x} = \frac{1}{1 - \pi e^{2\pi i x}} \xrightarrow{\pi \rightarrow 1} \frac{1}{1 - e^{2\pi i x}}$$

$$\left| \frac{P p_n}{p_n} \right| = \left| \frac{1}{2 - 2 \cos 2\pi x} \right| = \frac{1}{4\pi^2 x^2 + o(x^2)} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left| \frac{1}{1 - e^{2\pi i x}} \right| dx = +\infty \quad \text{e per il Lemma}$$

di Fatou, $\|P p_n\|_1 \rightarrow +\infty$ per $\pi \uparrow 1 \Rightarrow P$ non è limitato. $\square$

Es Mostare che il sottospazio $W = \{u \in C(\mathbb{T}) \mid \hat{u}(k) = 0 \quad \forall k < 0\}$ non è complementato in $C(\mathbb{T})$.

Amesora conseguente di Hahn-Banach

X spazio vettoriale reale o complesso

$p: X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice una seminorma se

1) p è positiva: $p(u) \geq 0 \quad \forall u \in X$

2) p è omogenea: $p(\lambda u) = |\lambda| p(u) \quad \forall u \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

3) p è subadditiva: $p(u+v) \leq p(u) + p(v) \quad \forall u, v \in X$

Es. Mostare che $|p(u) - p(v)| \leq p(u-v)$ e che $\{u \in X \mid p(u) = 0\}$ è s.s.p.

Corollario Sia p una seminorma su X , sp. vett. sul

campo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$. Sia $V \subset X$ retta sp. vett. e sia

$\varphi: V \rightarrow \mathbb{F}$ lineare t.c. $|\varphi(u)| \leq p(u) \quad \forall u \in V$.

Allora $\exists \gamma: X \rightarrow \mathbb{F}$ lineare t.c. $\gamma|_V = \varphi$ e

$|\gamma(u)| \leq p(u) \quad \forall u \in X$

Caso reale Si applichi Hahn-Banach con p come

funzione subadditiva per omogenea e $\varphi \leq |\varphi| \leq p$ su V

Sia $\gamma: X \rightarrow \mathbb{R}$ un'estensione lineare di φ t.c. $\gamma \leq p$ su X

Allora $\gamma(u) = -\gamma(-u) \geq -p(-u) = -p(u) \Rightarrow |\gamma| \leq p$ Δ

Per il caso complesso è utile il seguente:

Lemma Sia X uno spazio vettoriale complesso

(a) Se $f = \operatorname{Re} \varphi$ con $\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}$ lineare complesso, allora

$$\varphi(u) = f(u) - i f(iu) \quad \forall u \in X \quad (*)$$

(b) Se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ è $\mathbb{R}$ -lineare e φ è definita da (*),

allora φ è $\mathbb{C}$ -lineare e $f = \operatorname{Re} \varphi$.

dim a) $\varphi(u) = \operatorname{Re}(\varphi(u)) + i \operatorname{Im}(\varphi(u)) = \operatorname{Re}(\varphi(u)) - i \operatorname{Re}(i\varphi(u))$
 $= \operatorname{Re}(\varphi(u)) - i \operatorname{Re}(\varphi(iu)) = f(u) - i f(iu)$ □

b) $\varphi(iu) = -f(iu) = i f(-u) = i(f(u) - i f(iu)) = i f(u)$ □

dim (Corollario nel caso complesso)

Sia $f = \operatorname{Re} \varphi$. Allora $|f| \leq |\varphi| \leq p$ su V e per il caso reale, esiste $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ che estende f e tale che $|g| \leq p$ su X . Per il Lemma a), si ha

$$\varphi(u) = f(u) - i f(iu) \quad \forall u \in V \quad (1)$$

Definiamo $\psi: X \rightarrow \mathbb{C}$ come $\psi(u) = g(u) - i g(iu)$ □

Per il Lemma (b), ψ è $\mathbb{C}$ -lineare e per (1),

$$\psi = \varphi \text{ su } V$$

Sia $u \in X \setminus V$ e sia $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, t.c. $\alpha \psi(u) \geq 0$.

Allora $|\psi(u)| = \alpha \psi(u) = \psi(\alpha u) = g(\alpha u) \leq p(\alpha u) = p(u)$. □

oss grazie al risultato appena dimostrato, i

Corollari 1, 2, 3 della volta scorsa, come pure i risultati sulla limitatezza per dualità, valgono anche nel caso complesso.