

Il teorema di Hahn-Banach

Teorema (Hahn-Banach) X spazio vettoriale reale
 $d: X \rightarrow \mathbb{R}$ funzione subaddittiva (ossia $d(x+y) \leq d(x) + d(y)$
 $\forall x, y \in X$) e positivamente omogenea (ossia $d(tx) = t d(x)$
 $\forall x \in X \forall t \geq 0$) $V \subset X$ sottospazio vettoriale e
 $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ applicaz. lineare tale che $\varphi(x) \leq d(x) \quad \forall x \in V$.
 Allora esiste $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ lineare che estende φ (ossia
 $\psi|_V = \varphi$) e tale che $\psi(x) \leq d(x) \quad \forall x \in X$.

dim

Sia $\mathcal{P}$ l'insieme delle applicazioni lineari $\gamma: \text{dom } \gamma \rightarrow \mathbb{R}$,
 dove $\text{dom } \gamma$ è un sottospazio vettoriale di X che contiene
 V , tali che γ estende φ e $\gamma(x) \leq d(x) \quad \forall x \in \text{dom } \gamma$.
 $\mathcal{P}$ è parzialmente ordinato dalla relazione $\gamma_1 \leq \gamma_2$
 se $\text{dom } \gamma_1 \subset \text{dom } \gamma_2$ e γ_2 estende γ_1 .

- Ogni $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ totalmente ordinato è maggiorato da
 un elemento di $\mathcal{P}$: una tale maggiorante è $\gamma_0 \in \mathcal{P}$
 definita come $\text{dom } \gamma_0 = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{P}_0} \text{dom } \gamma$ e $\gamma_0 = \gamma$ su
 $\text{dom } \gamma$. γ_0 è ben definita poiché $\mathcal{P}_0$ è tot. ordinato.
- Per il lemma di Zorn, $\mathcal{P}$ possiede un elemento
 massimale γ . Basta dimostrare che $\text{dom } \gamma = X$.

Se $\text{dom } \gamma \neq X$, sia $x_0 \in X \setminus \text{dom } \gamma$ e definiamo

$\tilde{\gamma}$ come $\text{dom } \tilde{\gamma} = \text{dom } \gamma + \mathbb{R}x_0$ e

$$\tilde{\gamma}(x + \lambda x_0) = \gamma(x) + c\lambda, \quad \forall x \in \text{dom } \gamma, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

con $c \in \mathbb{R}$ da determinare. Tale $\tilde{\gamma}$ estende γ e

ci basta dimostrare che è possibile scegliere $c \in \mathbb{R}$

in modo che $\tilde{\gamma}(x) \leq d(x) \quad \forall x \in \text{dom } \tilde{\gamma}$.

Si vuole

$$(*) \quad \psi(x) + c\lambda \leq d(x + \lambda x_0) \quad \forall x \in \text{dom } \psi, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

e dato che la disuguaglianza vale per $\lambda = 0$, basta verificarla per $\lambda \neq 0$. Rimpiazzando x con $-\lambda x$, $(*)$ diventa

$$\lambda(c - \psi(x)) \leq d(\lambda(x_0 - x)) \quad \forall x \in \text{dom } \psi, \forall \lambda \neq 0$$

Per $\lambda > 0$, il secondo membro vale $\lambda d(x_0 - x)$ e dividendo per λ si trova la condizione

$$c - \psi(x) \leq d(x_0 - x) \quad \forall x \in \text{dom } \psi$$

Per $\lambda < 0$, il secondo membro vale $-\lambda d(x - x_0)$ e dividendo per $-\lambda$ si trova la condizione

$$\psi(x) - c \leq d(x - x_0) \quad \forall x \in \text{dom } \psi$$

Riassumendo, è necessario e sufficiente che c verifichi:

$$\psi(x) - d(x - x_0) \leq c \leq \psi(x) + d(x_0 - x)$$

per ogni $x \in \text{dom } \psi$. Un numero reale c con questa proprietà esiste se e solamente se

$$(**) \quad \psi(x) - d(x - x_0) \leq \psi(y) + d(x_0 - y)$$

per ogni $x, y \in \text{dom } \psi$. $(**)$ vale poiché:

$$\begin{aligned} \psi(x) - \psi(y) - \psi(x - y) &\leq d(x - y) = d(x - x_0 + x_0 - y) \\ &\leq d(x - x_0) + d(x_0 - y) \end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Prime conseguenze di Hahn-Banach

Corollario 1 X spazio vettoriale normato, V sottospazio vettoriale, $\varphi \in V^*$. Allora $\exists \psi \in X^*$ tale che

$$\psi|_V = \varphi \quad \text{e} \quad \|\psi\|_{X^*} = \|\varphi\|_{V^*}$$

dim.

Applicando Hahn-Banach con $\alpha(x) = \|\varphi\|_{V^*} \|x\|$, si trova un'estensione lineare ψ di φ tale che

$$\psi(x) \leq \|\varphi\|_{V^*} \|x\| \quad \forall x \in X. \quad \text{Allora}$$

$$-\psi(x) = \psi(-x) \leq \|\varphi\|_{V^*} \|-x\| = \|\varphi\|_{V^*} \|x\|$$

dunque $|\psi(x)| \leq \|\varphi\|_{V^*} \|x\| \quad \forall x \in X$, da cui ψ è continua con norma $\|\psi\|_{X^*} \leq \|\varphi\|_{V^*}$. Dato che

$$\psi \text{ estende } \varphi, \quad \|\psi\|_{X^*} \geq \|\varphi\|_{V^*} \quad \square$$

Corollario 2 X spazio vettoriale normato, $x_0 \in X, x_0 \neq 0$. Allora $\exists \varphi_0 \in X^*$ tale che $\varphi_0(x_0) = \|x_0\|$ e $\|\varphi_0\| = 1$.

dim.

Applicare il Corollario 1 con $V = \mathbb{R}x_0$ e

$$\varphi(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\| \quad \square$$

Corollario 3 X spazio vettoriale normato, $x \in X$.

Allora la funzione $\varphi \mapsto |\varphi(x)|$ assume massimo su $\overline{B_{X^*}}$ e vale

$$\|\varphi\|_{X^*} = \max_{\varphi \in \overline{B_{X^*}}} |\varphi(x)|$$

dim Possiamo supporre $x \neq 0$. Da $|p(x)| \leq \|p\|_{X^*} \|x\|_X$
segue

$$\sup_{p \in B_{X^*}} |p(x)| \leq \|x\|_X$$

Per il Corollario 2, esiste $p \in X^*$ tale che
 $p(x) = \|x\|_X$ e $\|p\|_{X^*} = 1$. Quindi questo estremo
superiore è un massimo e vale l'uguaglianza. $\square$

Oss. Il Corollario 3 ci dice che l'immersione canonica
di X nella bidual $X^{**} = (X^*)^*$,

$X \rightarrow X^{**}$, $x \mapsto \tilde{\epsilon}_x$ dove $\tilde{\epsilon}_x(p) = p(x) \quad \forall p \in X^*$
è un'isometria.

Limitatezza per dualità

Prop 1 X spazio vettoriale normato, $A \subset X$

Allora A è limitato se e solo se $\forall \varphi \in X^*$

l'insieme $\langle \varphi, A \rangle = \{ \langle \varphi, x \rangle \mid x \in A \}$ è limitato in $\mathbb{C}$
dim

$\Rightarrow$) ovvio

$\Leftarrow$) Dato $x \in X$ sia $f_x : X^* \rightarrow \mathbb{C}$, $f_x(\varphi) = \langle \varphi, x \rangle$
 f_x è lineare e continua. Per ipotesi

$$\sup_{x \in A} |f_x(\varphi)| < +\infty \quad \forall \varphi \in X^*$$

X^* è completo, quindi possiamo applicare il teorema di Banach-Steinhaus e dedurre che

$$\sup_{x \in A} \|f_x\| < +\infty$$

Ma

Corollario 3

$$\|f_x\| = \sup_{\varphi \in \overline{B_{X^*}}} |f_x(\varphi)| = \sup_{\varphi \in \overline{B_{X^*}}} |\langle \varphi, x \rangle| = \|x\|$$

□

Prop 2 X spazio di Banach, $B \subset X^*$

Allora B è limitato se e solo se $\forall x \in X$ l'insieme

$\langle B, x \rangle = \{ \langle \varphi, x \rangle \mid \varphi \in B \}$ è limitato in $\mathbb{C}$.

dim

$\Rightarrow$) ovvio

$\Leftarrow$) Segue immediatamente da Banach-Steinhaus

□

Quando la somma di 2 sottosp. chiusi è chiusa?

Prop X spazio di Banach, V, W sottospazi vettoriali chiusi

Allora $V+W$ è chiusa se e solo se $\exists c > 0$ tale che $\forall x \in V+W$

$\exists v \in V, w \in W$ con $x = v+w$ e $\|v\| + \|w\| \leq c \|x\|$

dim

$\Rightarrow$) Mostriamo $V \times W$ dello spazio di Banach $\|(v, w)\| = \|v\| + \|w\|$

e consideriamo l'applicazione lineare e continua

$$S: V \times W \rightarrow V+W, (v, w) \mapsto v+w$$

S è surgettiva e dato che $V+W$ è uno spazio di Banach,

il teorema delle mappe aperte garantisce che $\exists \delta > 0$

tale che $x \in V+W, \|x\| \leq \delta \Rightarrow x = v+w$

con $v \in V, w \in W$ e $\|v\| + \|w\| \leq 1$

Riscalandolo, la tesi vale con $c = 1/\delta$

$\Leftarrow$) $(x_m) \subset V+W, x_m \rightarrow x$ A meno di sottrarre

una vettore nullo, possiamo supporre che

$$\|x_m - x_{m-1}\| \leq 2^{-m}, \text{ da cui } \|x_m - x_0\| = \sum_{h=0}^{m-1} \|x_h - x_{h-1}\| \leq \sum_{h=0}^{m-1} 2^{-h}$$

$$y_h = x_h - x_{h-1} \text{ per } h \geq 1, y_0 = x_0, x = \sum_{h=0}^{\infty} y_h$$

Dato che $y_h \in V+W$, per ipotesi $y_h = v_h + w_h$

$$\text{con } \|v_h\| + \|w_h\| \leq c \|y_h\| \leq c 2^{-h}$$

$\Rightarrow (v_h)$ e (w_h) sono sommabili ed essendo V e W

$$\text{chiusi, si ha } \sum_{h=0}^{\infty} v_h \in V \text{ e } \sum_{h=0}^{\infty} w_h \in W$$

$$\text{Allora } x = \sum_{h=0}^{\infty} y_h = \sum_{h=0}^{\infty} (v_h + w_h) = \sum_{h=0}^{\infty} v_h + \sum_{h=0}^{\infty} w_h \in V+W$$

e $V+W$ è chiuso. $\square$