

Teorema dell'applicazione aperta

Teorema Sia $T: X \rightarrow Y$ lineare e continua tra spazi di Banach. Se T è surgettiva allora T è aperta (ovvero manda aperti in aperti).

• In generale, T è aperta $\Leftrightarrow T$ manda palle aperte in aperte. Essendo T lineare, ciò è equivalente a mandare la palla unitaria aperta B_X in un aperto. Ancora per linearità, ciò è equivalente a chiedere che $T B_X$ sia un intorno di 0 in Y . Quindi una formulazione equivalente del teorema della mappa aperta è:

$$(*) \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \delta B_Y \subset T B_X$$

dim Dimostrazione (*).

Passo 1 $\exists \delta > 0 \text{ t.c. } 2\delta B_Y \subset \overline{T B_X}$

T surgettiva $\Rightarrow Y = \bigcup_{m \geq 1} \overline{T m B_X} \xrightarrow{\text{Baire}} \exists m \geq 1$
tale che $\overline{T m B_X}$ ha parte interna non vuota.

Ma $\overline{T m B_X} = \overline{m T B_X} = m \overline{T B_X} \Rightarrow \overline{T B_X}$ ha
parte interna non vuota, ossia $\exists y_0 \in Y$ e
 $r > 0$ tali che $y_0 + r B_Y \subset \overline{T B_X}$ (1)

In particolare, $y_0 \in \overline{T B_X}$ e dato che $\overline{T B_X}$ è
simmetrico rispetto a 0, $-y_0 \in \overline{T B_X}$ (2).

Sommando (1) e (2), $2r B_Y \subset \overline{T B_X} + \overline{T B_X}$ (3)

$$\text{Se } y_1, y_2 \in \overline{TB_X} \Rightarrow y_1 + y_2 = 2 \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) \in 2 \overline{TB_X}$$

$$\text{poiché } \overline{TB_X} \text{ è convesso} \Rightarrow \overline{TB_X} + \overline{TB_X} \subseteq 2 \overline{TB_X}$$

$$\text{e (3) implica } \pi B_Y \subseteq 2 \overline{TB_X}$$

Questo conclude la dimostrazione del Paro 1 con

$$\delta = \frac{\pi}{4} \quad \triangle$$

Paro 2 $\delta B_Y \subseteq TB_X$

Sia $y \in \delta B_Y$. Per il Paro 1,

$$\exists x_1 \in X \quad \|x_1\| < \frac{1}{2} \quad \text{t.c.} \quad \|y - Tx_1\| < \frac{\delta}{2}$$

Di nuovo per il Paro 1

$$\exists x_2 \in X \quad \|x_2\| < \frac{1}{4} \quad \text{t.c.} \quad \|y - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{\delta}{4}$$

Per induzione

$$(4) \quad \exists x_m \in X \quad \|x_m\| < 2^{-m} \quad \text{t.c.} \quad \|y - \sum_{j=1}^m Tx_j\| < \delta 2^{-m}$$

Allora $x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m$ è ben definita e

$$\|x\| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\| < \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = 1 \Rightarrow x \in B_X$$

Per la continuità di T e per (4),

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} Tx_j = y$$

$$\Rightarrow y \in TB_X \quad \square$$

Corollario 1 $T: X \rightarrow Y$ lineare e continua tra

Banach. Se T è bigettiva, allora T^{-1} è

continua.

$$(*) \Rightarrow \|Tx\| \geq \delta \|x\| \quad \forall x \in X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{\delta} \|y\| \quad \forall y \in Y \Rightarrow \|T^{-1}\| \leq \frac{1}{\delta}$$

• Siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme sullo stesso spazio vettoriale X . Se $\exists c > 0$ tale che

$$\|x\|_1 \leq c \|x\|_2 \quad \forall x \in X \quad (1)$$

allora la topologia indotta da $\|\cdot\|_2$ è più fine (ossia contiene più aperti) di quella indotta da $\|\cdot\|_1$.

Infatti, basta verificare che la palla unitaria relativa a $\|\cdot\|_1$ è aperta per $\|\cdot\|_2$, o equivalentemente è un intorno di 0 per la topologia indotta da $\|\cdot\|_2$, o equivalentemente contiene una palla relativa a $\|\cdot\|_2$. Per (1), la palla di raggio $\frac{1}{c}$ relativa a $\|\cdot\|_2$ è contenuta nella palla unitaria relativa a $\|\cdot\|_1$. c.v.d.

Es Dimostrare il viceversa, ossia che se la topologia indotta da $\|\cdot\|_2$ è più fine di quella indotta da $\|\cdot\|_1$, allora $\exists c > 0$ t.c. valga (1).

• Se $\exists c, C > 0$ tali che

$$\|x\|_1 \leq c \|x\|_2 \quad \text{e} \quad \|x\|_2 \leq C \|x\|_1 \quad \forall x \in X$$

le due norme si dicono equivalenti. Quindi due norme sono equivalenti $\Leftrightarrow$ inducono la stessa topologia.

Corollario 2 Siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ norme di

Banach su X . Se $\exists c > 0$ tale che

$$\|x\|_1 \leq c \|x\|_2 \quad \forall x \in X \quad (1)$$

allora le due norme sono equivalenti.

dim Per (1), l'applicazione lineare

$$\text{Id} : (X, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_1), \quad x \mapsto x,$$

è continua. Per il corollario 1 la sua inversa è ancora continua, ossia $\exists C > 0$ t.c.

$$\|x\|_2 \leq C \|x\|_1, \quad \forall x \in X$$

□

Corollario 3 (Teorema del grafico chiuso). Sia

$T : X \rightarrow Y$ applicazione lineare tra spazi di Banach.

Allora T è continua se e solo se il suo grafico

$$\text{graf } T = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = Tx\}$$

è chiuso in $X \times Y$.

dim

L'implicazione $\Rightarrow$) è ovvia e vale anche senza assumere T lineare (l'implicazione inversa non varrebbe se T non è lineare, si consideri ad esempio $X = Y = \mathbb{R}$ e $T(x) = 1/x$ per $x \neq 0$, $T(0) = 0$).

$\Leftarrow$) $\|x\|_T := \|x\| + \|Tx\|$ è una norma su X , detta norma del grafico di T .

$\text{graf } T$ chiuso $\Rightarrow \| \cdot \|_T$ è completo. Infatti, se $(x_m) \subset X$ è di Cauchy per $\| \cdot \|_T$, allora (x_m) è di Cauchy in X e (Tx_m) è di Cauchy in Y .

$\Rightarrow x_m \rightarrow x$ e $Tx_m \rightarrow y$. Allora

$$(x, y) \in \overline{\text{graf } T} = \text{graf } T \Rightarrow y = Tx \Rightarrow$$

$$\|x_m - x\|_T = \|x_m - x\| + \|Tx_m - Tx\| = o(1) \quad \Delta$$

Vale ovviamente $\|x\| \leq \|x\|_T \quad \forall x \in X$, dunque

per il corollario 2, $\exists C$ t.c. $\|x\|_T \leq C \|x\| \quad \forall x$

$\Rightarrow \|Tx\| \leq (C-1)\|x\| \quad \forall x \Rightarrow T$ è continua

□

Serie di Fourier di funzioni continue

Sia $u \in C(\mathbb{T})$. Allora

$$S_m(u, x) = \sum_{|k| \leq m} \hat{u}(k) e^{2\pi i k x}$$

converge a u in $L^2(\mathbb{T})$. Possiamo aspettarsi anche la convergenza puntuale?

• $S_m(u, x) = u * q_m(x)$ dove $q_m(x) = \sum_{|k| \leq m} e^{2\pi i k x}$

$$e^{\pi i x} q_m(x) - e^{-\pi i x} q_m(x) = \sum_{|k| \leq m} e^{2\pi i (k + \frac{1}{2}) x}$$

$$= \sum_{|k| \leq m} e^{2\pi i (k - \frac{1}{2}) x} = \sum_{|k| \leq m} e^{2\pi i (k + \frac{1}{2}) x} = \sum_{-m-1 \leq h \leq m-1} e^{2\pi i (h + \frac{1}{2}) x}$$

$$= e^{2\pi i (m + \frac{1}{2}) x} - e^{2\pi i (-m - \frac{1}{2}) x} = 2i \sin 2\pi (m + \frac{1}{2}) x$$

$$\Rightarrow q_m(x) = \frac{2i \sin 2\pi (m + \frac{1}{2}) x}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} = \frac{\sin 2\pi (m + \frac{1}{2}) x}{\sin \pi x}$$

• $\|q_m\|_1 = \int_{\mathbb{T}} \frac{|\sin 2\pi (m + \frac{1}{2}) x|}{|\sin \pi x|} dx \geq \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{|\sin 2\pi (m + \frac{1}{2}) x|}{x} dx$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi(m + \frac{1}{2})} \frac{|\sin t|}{t} dt = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2m+1} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{|\sin t|}{t} dt$$

$$\geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2m+1} \frac{1}{\pi(k+1)} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} |\sin t| dt = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{2m+2} \frac{1}{k} \rightarrow +\infty \text{ per } m \rightarrow \infty$$

Sia $\varphi_m: C(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_m u = S_m(u, 0) = u * q_m(0)$

φ_m è lineare e $|\varphi_m u| \leq \|q_m\|_1 \|u\|_{\infty}$, dunque

φ_m è continua, con $\|\varphi_m\| \leq \|q_m\|_1$

• $\|q_m\| = \|q_m\|_1$

Sia
$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } q_m(-x) \geq 0 \\ -1 & \text{se } q_m(-x) < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{sia } h_j \in C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

$-1 \leq h_j \leq 1, \quad h_j(x) \rightarrow h(x) \quad \forall x \in \mathbb{T}$

$$|q_m h_j| = |q_m * h_j(0)| = \left| \int_{\mathbb{T}} q_m(-y) h_j(y) dy \right|$$

$$\xrightarrow{j \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{T}} q_m(-y) h(y) dy \right| = \int_{\mathbb{T}} |q_m(-y)| dy = \|q_m\|_1$$

$\Rightarrow \|q_m\| \geq \sup_j |q_m h_j| = \|q_m\|_1$

Δ

Quindi $\|q_m\|$ diverge. Per Banach-Steinhaus, esiste un insieme denso $G \subset C(\mathbb{T})$ (intersezione numerabile di aperti densi) tale che: $\forall u \in G \quad |S_m(u, 0)| \rightarrow +\infty$, in particolare la serie di Fourier di u non converge per $x=0$.

Conseguenza: L'insieme delle $u \in C(\mathbb{T})$ la cui serie di Fourier converge per $x=0$ è un primo categoria in $C(\mathbb{T})$.

Più in generale: se $E \subset \mathbb{T}$ è numerabile, l'insieme delle $u \in C(\mathbb{T})$ la cui serie di Fourier non converge per nessun $x \in E$ è il complementare di un primo categoria in $C(\mathbb{T})$.

Coefficienti di Fourier di funzioni L^1

Abbiamo visto che $u \mapsto \hat{u}$ definisce un'applicazione lineare e continua

$$\Phi : L^1(\mathbb{T}) \rightarrow C_0(\mathbb{Z}), \quad u \mapsto \hat{u}.$$

Φ è iniettiva.

Domanda Φ è surgettiva?

Risposta No.

Se lo fosse, per il Teorema della mappa aperta Φ^{-1} sarebbe continua, ossia esisterebbe $C > 0$ e c.

$$\|\Phi^{-1}a\|_1 \leq C \|a\|_\infty \quad \forall a \in C_0(\mathbb{Z}), \quad \text{e anche}$$
$$\|u\|_1 \leq C \|\hat{u}\|_\infty \quad \forall u \in L^1(\mathbb{T}) \quad (*).$$

Ma abbiamo visto che se $q_m(x) = \sum_{|k| \leq m} e^{2\pi i k x}$

risulta:

$$\hat{q}_m(k) = \begin{cases} 1 & |k| \leq m \\ 0 & |k| > m \end{cases}; \quad \|q_m\|_1 \rightarrow +\infty \text{ per } m \rightarrow \infty$$

Quindi (*) non può valere. Δ