

Il Teorema di Baire

Teorema (X, d) spazio metrico completo. L'intersezione numerabile di aperti densi è densa.

dim

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(y, x) < r\}$$

$$\overline{B_r(x)} \subseteq \{y \in X \mid d(y, x) \leq r\}$$

$V_1, V_2, \dots$ aperti densi in X . W aperto non vuoto.

$W \cap V_1$ è un aperto non vuoto $\Rightarrow \exists x_1 \in X$ e $r_1 < 1$ b.c.

$$\overline{B_{r_1}(x_1)} \subset W \cap V_2 \quad \text{e} \quad 0 < r_1 < 1 \quad (1)$$

Sia $m \geq 2$. Se x_{m-1} e r_{m-1} sono stati scelti, poiché $V_m \cap B_{r_{m-1}}(x_{m-1})$ è un aperto non vuoto, possiamo trovare x_m e r_m b.c.

$$\overline{B_{r_m}(x_m)} \subset V_m \cap B_{r_{m-1}}(x_{m-1}), \quad 0 < r_m < \frac{1}{m} \quad (2)$$

Questo procedimento definisce per induzione una successione (x_m) .

Per costruzione:

$$B_{r_1}(x_1) \supset \overline{B_{r_2}(x_2)} \supset B_{r_3}(x_3) \supset \overline{B_{r_4}(x_4)} \supset \dots$$

Se $i > m$, $x_i \in B_{r_m}(x_m)$. Quindi se $i, j > m$

$$\Rightarrow d(x_i, x_j) < 2r_m < \frac{2}{m} \Rightarrow (x_m) \text{ è di Cauchy}$$

$$\Rightarrow x_m \rightarrow x$$

$$\forall i > m \quad x_i \in \overline{B_{r_m}(x_m)} \Rightarrow x \in \overline{B_{r_m}(x_m)} \quad \forall m \quad (2) \Rightarrow$$

$$x \in V_m \quad \forall m$$

$$\text{Inoltre } x \in \overline{B_{r_1}(x_1)} \stackrel{(1)}{\subset} W \quad \text{Quindi } W \cap \bigcap_{m \in \mathbb{N}} V_m \neq \emptyset \quad \square$$

Formulazione equivalente: In uno spazio metrico completo

l'unione numerabile di chiusi con parte interna vuota

ha ancora parte interna vuota.

Si usa anche la seguente terminologia:

- $A \subseteq X$ è magro (meagre/dense) se $\bar{A}$ ha parte interna vuota.
- Un'unione numerabile di magri si dice "insieme di prima categoria". Tutti gli altri insiemi si dicono di seconda categoria.

Il Teorema di Baire si riformula così: in uno spazio metrico completo ogni aperto non vuoto è di seconda categoria.

Es * $f \in C(\mathbb{R})$ tale che $\forall \varepsilon > 0 \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(n\varepsilon)$.

Dimostrare che allora $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. La conclusione è falsa se non si assume f continua.

Es * L'insieme $\{f \in C([0,1]) \mid f \text{ è derivabile in almeno } \text{un punto}\}$ è di prima categoria in $C^1([0,1])$ (spazio metrico completo con la norma $\|f\|_1 = \|f\|_0 + \|f'\|_0$).

Applicazioni lineari e continue

Siano X, Y spazi vettoriali normati, $T: X \rightarrow Y$ applicazione lineare. La norma operatoriale di T è

$$\|T\| := \sup \{ \|Tx\|_Y \mid \|x\|_X \leq 1 \} \in [0, +\infty]$$

Dato che $\|T(\lambda x)\| = |\lambda| \|Tx\|$,

$$\|T\| = \sup \{ \|Tx\|_Y \mid \|x\|_X = 1 \} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

T si dice limitata se $\|T\| < +\infty$.

$$\|T\| = \inf \{ \alpha > 0 \mid TB_X \subset \alpha B_Y \} =$$

$$= \inf \{ K > 0 \mid \|Tx_1 - Tx_2\|_Y \leq K \|x_1 - x_2\|_X \}$$

Miglior costante di Lipschitz

Prop $T: X \rightarrow Y$ lineare tra sp. vett. normati. Allora sono equivalenti:

(i) T è limitata

(ii) T è continua

(iii) T è continua in 0

(iv) T è limitata in un intorno di 0.

dim

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) ovvio

(iv) $\Rightarrow \exists \alpha > 0$ t.c. $T(\alpha B_X)$ è limitato, ovvio $\exists R > 0$

t.c. $T(R B_X) \subset R B_Y \Rightarrow TB_X \subset \frac{R}{\alpha} B_Y$, ovvio vale (i). $\square$

• $\|\cdot\|$ è una norma sullo spazio vettoriale $L(X, Y)$ di tutte le applicazioni lineari limitate da X in Y .

• $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$ se $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z$

;

Prop Se Y è completo, $L(X, Y)$ è completo.

Segue facilmente dal seguente risultato, applicato a $Z = B_Y$.

Prop Z spazio topologico, Y spazio metrico completo.

$C_b(Z, Y)$ è uno spazio metrico completo.

dim

$(f_n) \in C_b(Z, Y)$ di Cauchy $\Rightarrow \forall z \in Z$ $(f_n(z))$ è

di Cauchy in $Y \Rightarrow f_n \rightarrow f$ puntualmente.

$\forall \epsilon > 0 \exists m_0$ t.c. se $m, n > m_0$ risulta $d(f_m(z), f_n(z)) \leq \epsilon$

$\forall z \in Z \xRightarrow{m \rightarrow \infty} d(f_n(z), f(z)) \leq \epsilon$

Quindi $f_n \rightarrow f$ unif. $\Rightarrow f \in C_b(Z, Y)$ □

• Se X è uno spazio di Banach, $L(X) = L(X, X)$ è un'algebra di Banach unitaria.

• $L(X, \mathbb{C})$ (o $L(X, \mathbb{R})$ per spazi reali) si chiama spazio duale di X e si indica con X^* o X' .

La norma operatoriale su $L(X, \mathbb{C})$ è anche detta norma duale di X^* .

Uniforme limitatezza

Teorema (Banach - Steinhaus). Sia X uno spazio di Banach, Y uno spazio vettoriale normato e $\mathcal{T}$ un sottoinsieme di $L(X, Y)$. Allora vale l'alternativa

(A) $\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| < +\infty$

oppure

(B) $\exists G \subset X$ denso tale che:

$$\forall x \in G \quad \sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\| = +\infty$$

dim

Sia $\varphi(x) = \sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\|$. È estremo superiore di funzioni continue $\Rightarrow \varphi$ è semicontinua inferiore $\Rightarrow$

$$V_n := \{x \in X \mid \varphi(x) < n\} \text{ è aperto.}$$

Se $\exists N$ t.c. V_N non è denso, $\exists x_0 \in X$ e $\pi > 0$ t.c.

$$B_\pi(x_0) \cap V_N = \emptyset, \text{ anzi } \varphi \leq N \text{ su } \overline{B_\pi(x_0)}, \text{ i.e.}$$

$$\|T(x_0 + u)\| \leq N \quad \text{se } \|u\| \leq \pi$$

$$\Rightarrow \|Tu\| \leq N + \|Tx_0\| \leq 2N \quad \text{se } \|u\| \leq \pi$$

$$\Rightarrow \sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| \leq \frac{2N}{\pi} \text{ e rientra nel caso (A).}$$

Altrimenti, V_n è denso $\forall n$ $\xRightarrow{\text{Baire}} G := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ è

denso. Per definizione,

$$\sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\| = \varphi(x) = +\infty \quad \forall x \in G$$

dunque rientra nel caso (B). P

Ex 1 X Banach, Y sp. velt. normiert, $(T_n) \subset L(X, Y)$ l.c.

$T_n x \rightarrow T x \quad \forall x \in A \subset X$

a) $\sup_m \|T_m\| < +\infty$

b) $T \in L(X, Y)$

c) $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$