

Coefficienti di Fourier di funzioni L^1

- Se $u \in L^1(\mathbb{T})$, allora $\hat{u}(k) \rightarrow 0$ per $|k| \rightarrow \infty$.
Quindi $u \mapsto \hat{u}$ definisce un'applicazione lineare e continua $L^1(\mathbb{T}) \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$.

dim

Sia $u \in L^1(\mathbb{T})$ e $\varepsilon > 0$. Dato che $L^2(\mathbb{T})$ è denso in $L^1(\mathbb{T})$, trova $v \in L^2(\mathbb{T})$ tale che $\|v - u\|_1 < \varepsilon$.
 $v \in L^2(\mathbb{T}) \Rightarrow \hat{v} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \subset c_0(\mathbb{Z}) \Rightarrow \exists N$ tale che
 $|\hat{v}(k)| \leq \varepsilon$ per $|k| \geq N$.

Allora se $|k| \geq N$:

$$|\hat{u}(k)| \leq \varepsilon + |\hat{v}(k) - \hat{u}(k)| = \varepsilon + \|v - u\|_1 \leq 2\varepsilon \quad \Delta$$

Coefficienti di Fourier e prodotti

$$u, v \in L^1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\text{Young}} \|u * v\|_1 \leq \|u\|_1 \|v\|_1 \Rightarrow u * v \in L^1(\mathbb{T})$$

$$\begin{aligned} \widehat{u * v}(k) &= \int_{\mathbb{T}} u * v(x) e^{-2\pi i k x} dx = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} u(x-y) v(y) dy \right) e^{-2\pi i k x} dx \\ &\stackrel{\text{Fubini-Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{T}} v(y) \left(\int_{\mathbb{T}} u(x-y) e^{-2\pi i k x} dx \right) dy = \int_{\mathbb{T}} v(y) e^{-2\pi i k y} \int_{\mathbb{T}} u(x-y) e^{-2\pi i k(x-y)} dx dy \\ &\stackrel{x-y=t}{=} \left(\int_{\mathbb{T}} v(y) e^{-2\pi i k y} dy \right) \left(\int_{\mathbb{T}} u(t) e^{-2\pi i k t} dt \right) = \hat{u}(k) \hat{v}(k) \end{aligned}$$

- $L^1(\mathbb{T})$ è un'algebra di Banach con il prodotto di convoluzione.
- $c_0(\mathbb{Z})$ è un'algebra di Banach con il prodotto puntuale.
- L'applicazione (lineare e continua) $L^1(\mathbb{T}) \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$, $u \mapsto \hat{u}$, è un omomorfismo di algebre di Banach.

Compattezza

Teorema Sia X uno spazio vettoriale normato. Allora

$$\overline{B_1} = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\} \text{ è compatta} \Leftrightarrow \dim X < +\infty$$

$\Leftarrow$) è il teorema di Bolzano-Weierstrass.

Lemma X spazio vettoriale normato, $V \neq X$ sottospazio vettoriale chiuso. Allora $\forall \varepsilon > 0 \exists u \in X$ tale che $\|u\| = 1$ e $\text{dist}(u, V) > 1 - \varepsilon$.

dim (del Lemma)

Sia $w \in X \setminus V$. V chiuso $\Rightarrow d := \text{dist}(w, V) > 0$.

Sia $v_0 \in V$ tale che $\|v_0 - w\| \leq \frac{d}{1-\varepsilon}$ e poniamo

$u = \frac{w - v_0}{\|w - v_0\|}$. Allora u è unitario: $\forall v \in V$ risulta

$$\begin{aligned} \|u - v\| &= \left\| \frac{w - v_0}{\|w - v_0\|} - v \right\| = \frac{1}{\|w - v_0\|} \|w - v_0 - \|w - v_0\| v\| \\ &\geq \frac{1-\varepsilon}{d} \cdot d = 1 - \varepsilon \end{aligned} \quad \square$$

Oss. La dimostrazione mostra che se $\text{dist}(w, V) > 0$ è realizzata $\Rightarrow$ si può prendere $\varepsilon = 0$. In particolare, questo è vero se X è finito dimensionale, o se X è un Hilbert. Il lemma con $\varepsilon = 0$ è falso in generale per X Banach.

dim (Implicazione $\Rightarrow$ del Teorema)

Se X ha dimensione infinita, possiamo costruire una successione (V_m) di sottospazi vettoriali di dimensione finita tale che $V_m \not\subset V_{m+1} \quad \forall m$

In particolare, V_m è chiuso e per il Lemma esiste $u_m \in V_m$ tale che $\|u_m\| = 1$ e $\text{dist}(u_m, V_{m-1}) \geq \frac{1}{2}$

In particolare

$$\|u_m - u_n\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{se } m > n$$

quindi nessuna sottosuccessione di (u_m) è di

Cauchy $\Rightarrow (u_m) \subset \overline{B_1}$ non possiede sottosuccessioni convergenti □

Criterio di compattezza in $L^p(\mathbb{R}^n)$

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \mid u \text{ continua, } \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \right\}$$

è uno spazio di Banach con $\|\cdot\|_\infty$.

Teorema (Arzeli-Ascoli) Un sottinsieme $A \subset C_0(\mathbb{R}^n)$

è pre-compatto se e solo se valgono le condizioni seguenti:

- (1) A equibondato, i.e. $\sup_{u \in A} \|u\|_\infty < +\infty$
- (2) A equicontinua, i.e. $\sup_{u \in A} \sup_{|y| \leq \varepsilon} \|\tau_y u - u\|_\infty = o(1)$ per $\varepsilon \rightarrow 0$
- (3) A equifinitesimo, i.e. $\sup_{u \in A} \|u\|_\infty, \mathbb{R}^n \setminus B_R = o(1)$ per $R \rightarrow +\infty$

Teorema (Fréchet-Kolmogorov) Sia $1 \leq p < +\infty$. Un sottinsieme

$A \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ è pre-compatto se e solo se valgono:

- (1) $\sup_{u \in A} \|u\|_p < +\infty$
- (2) $\sup_{u \in A} \sup_{|y| \leq \varepsilon} \|\tau_y u - u\|_p = o(1)$ per $\varepsilon \rightarrow 0$
- (3) $\sup_{u \in A} \|u\|_p, \mathbb{R}^n \setminus B_R = o(1)$ per $R \rightarrow +\infty$

dim [da (1), (2), (3) $\Rightarrow$ pre-compattezza]

Sia p_j un mollificatore continuo con supporto in B_j :

$$p_j \in C(\mathbb{R}^n), \quad p_j \geq 0, \quad \text{supp } p_j \subset B_j, \quad \int_{\mathbb{R}^n} p_j(x) dx = 1$$

Se $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, allora $u * p_j \in C(\mathbb{R}^n)$.

$$(i) \quad \|u * p_j\|_\infty \leq \|u\|_p \|p_j\|_q \quad \text{dove} \quad 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

(ii) Se $y \in \mathbb{R}^n$ allora

$$\begin{aligned} \|\tau_y(u * p_j) - u * p_j\|_\infty &= \|(\tau_y u - u) * p_j\|_\infty \\ &\leq \|\tau_y u - u\|_p \|p_j\|_q \end{aligned}$$

$$(iii) \quad \|u * \rho_\delta\|_{\infty, \mathbb{R}^n \setminus B_R} = \left\| \left(\frac{1}{|\mathbb{R}^n \setminus B_{R-\delta}|} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{R-\delta}} u \right) * \rho_\delta \right\|_{\infty, \mathbb{R}^n \setminus B_R} \\ \leq \|u\|_{p, \mathbb{R}^n \setminus B_{R-\delta}} \|\rho_\delta\|_q$$

• Se A verifica (1), (2), (3), allora $\forall \delta > 0$ l'insieme

$A_\delta := \{u * \rho_\delta \mid u \in A\}$ è pre-compatt. in $C_0(\mathbb{R}^n)$,
per Arzeli-Ascoli.

• A_δ è pre-compatt. in $L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\|u * \rho_\delta\|_p \leq \|u\|_p \|\rho_\delta\|_1 = \|u\|_p \Rightarrow A_\delta \subset L^p(\mathbb{R}^n)$$

Sia $(v_h = u_h * \rho_\delta) \subset A_\delta$. A meno di passare ad una sotto-successione, $v_h \rightarrow v \in C_0(\mathbb{R}^n)$ uniformemente.

Fisso $\varepsilon > 0$. Per (3):

$$\|v_h\|_{p, \mathbb{R}^n \setminus B_R} = \|u_h * \rho_\delta\|_{p, \mathbb{R}^n \setminus B_R} \leq \|u_h\|_{p, \mathbb{R}^n \setminus B_{R-\delta}} \leq \varepsilon$$

se R è suff. grande

$$\|v\|_{p, \mathbb{R}^n \setminus B_R} \stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{h \rightarrow \infty} \|v_h\|_{p, \mathbb{R}^n \setminus B_R} \leq \varepsilon$$

In particolare, $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|v_h - v\|_p \leq \|v_h - v\|_{p, B_R} + \|v_h - v\|_{p, \mathbb{R}^n \setminus B_R} \\ \stackrel{(1)}{=} o(1) \text{ per conv. unif.} \quad \stackrel{(2)}{\leq} \|v_h\|_{p, \mathbb{R}^n \setminus B_R} + \|v\|_{p, \mathbb{R}^n \setminus B_R} \\ \stackrel{(3)}{\leq} \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \Delta$$

Quindi $v_h \rightarrow v$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$

• Basta mostrare che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $A \subset B_\varepsilon(A_\delta)$.

Questo è implicato da: $\|u * \rho_\delta - u\|_p = o(1)$
per $\delta \rightarrow 0$ uniformemente in $u \in A$.

[• $A \in X$ sp. metrico completo - A pre-compatt. $\Leftrightarrow A$ totalmente limitato.

• Se $\forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon$ tot. limitato t.c. $A \subset B_\varepsilon(A_\varepsilon)$, allora A è totalmente limitato.

Sia $\omega(\varepsilon) = \sup_{u \in A} \sup_{|y| \leq \varepsilon} \|\tau_y u - u\|_p$ $\omega = o(1)$ per $\varepsilon \rightarrow 0$

Allora:

$$|u * \rho_\delta(x) - u(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (u(x-y) - u(x)) \rho_\delta(y) dy \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_y u(x) - u(x)| \rho_\delta(y) dy$$

per Jensen e integrando:

$$\|u * \rho_\delta - u\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\tau_y u(x) - u(x)|^p \rho_\delta(y) dy \right) dx$$

Tonelli

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\tau_y u(x) - u(x)|^p dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\delta(y) \|\tau_y u - u\|_p^p dy \leq \sup_{|y| \leq \delta} \|\tau_y u - u\|_p^p = \omega(\delta)^p$$

$$\Rightarrow \sup_{u \in A} \|u * \rho_\delta - u\|_p \leq \omega(\delta) = o(1) \text{ per } \delta \rightarrow 0$$

□

Es Dimostrare l'implicazione inversa.

Es Dedurre il criterio di compattezza per $L^p(E)$,
 $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile con $|E| > 0$.

Es* Caratterizzare i sottoinsiemi pre-compatti di
 ℓ^p , $1 \leq p < +\infty$, e di C_0 .